Matematicamente.it

Carmelo Di Stefano

Dal problema al modello matematico

Volume terzo

Funzioni, Calcolo differenziale, Calcolo Integrale, Statistica

ISBN 9788896354537

COPERTINA

Carmelo Di Stefano

Dal problema al modello matematico

Vol. 3

Funzioni, Calcolo differenziale

Calcolo Integrale, Statistica

Matematicamente.it

www.matematicamente.it - info@matematicamente.it
http://mathinterattiva.altervista.org/index.htm

ISBN 9788896354476

Edizione riveduta e corretta. Maggio 2014

Se vuoi contribuire a migliorare questo testo, invia segnalazioni di errori, mancanze, integrazioni all'autore carmelodst@alice.it o all'editore info@matematicamente.it. I proprietari di immagini, o di altri contenuti, che sono stati utilizzati impropriamente e inavvertitamente in questo libro, se ritengono di non essere stati citati correttamente sono pregati di mettersi in contatto con l'autore o con l'editore per gli interventi che si riterranno necessari; si fa presente che questo libro non ha scopo di lucro.

PRESENTAZIONE

Nel corso della lettura dei volumi troverai diverse cose, che di seguito ti spiego brevemente.
All'inizio di alcune unità trovi un breve ripasso di argomenti svolti negli anni precedenti che ti risultano utili per affrontare serenamente la stessa unità. Vanno sotto il nome di **Richiamiamo le Conoscenze**. In alcune unità vi sono anche argomenti di approfondimento, denominati con il titolo ***Quelli che vogliono sapere di più …***
Le definizioni, i teoremi, i corollari e simili enti matematici, sono contenuti all'interno di appositi box di un uguale colore (verde per le definizioni, celeste per i teoremi e così via)
Ogni tanto troverai anche un box che ti spiega il significato di alcuni vocaboli, si intitola **Che cosa significa?**
Poi ci sono dei box con delle informazioni storiche che si chiamano **I Protagonisti**, che contengono informazioni relativamente a famosi matematici citati nelle stesse pagine; e **L'angolo storico**, in cui invece ci sono informazioni di varia natura, su quando per la prima volta si sono incontrate le nozioni di cui si sta parlando e simili informazioni. Trovi anche, ogni tanto un box denominato **L'antologia**, in cui sono riportati passi di famose opere matematiche, commentate. Vi sono anche dei box chiamati **Enigmi matematici** o **Intervallo matematico**, che si riferiscono in genere ad applicazioni giocose della matematica.
Alla fine di ogni argomento vi sono le relative verifiche. In esse sono presenti esercizi di tre livelli di difficoltà, opportunamente indicati. Il Livello 1 è relativo a esercizi che sono spesso semplice applicazione di quanto detto nella teoria; quelli di Livello 2 o contengono calcoli più complicati, o hanno bisogno di un impegno maggiore; infine quelli di Livello 3 riguardano quesiti che devono essere impostati usando la fantasia e non in modo ripetitivo. Questi ultimi sono riferiti ai più volenterosi. Per quelli a cui piace veramente ragionare e impegnarsi, alla fine di ogni unità sono presenti alcuni esercizi molto complessi, che vanno sotto il nome di **La sfida**
Invece per aiutarti all'inizio di ogni gruppo di esercizi di livello 1 o 2 vi sono alcuni esercizi simili svolti.
Sono talvolta presenti box legati a importanti software matematici: Derive, Geogebra, Excel, Microsoft Mathematica. In essi ti vengono spiegate brevemente alcune funzionalità dei software, ti si spiega velocemente cosa puoi fare con essi relativamente all'argomento affrontato e poi ti vengono proposti esercizi da risolvere con i detti software. Ricorda che Geogebra e Microsoft Mathematica sono liberamente scaricabili da Internet, mentre Derive può essere scaricato liberamente solo in una versione di prova che, dopo 30 giorni, non ti permette più di salvare. Excel, o simile, è di solito installato in tutti i PC.
Alla fine dell'unità sono presentati, quando possibile, esercizi tratti dagli esami di stato, soprattutto del Liceo Scientifico, riferiti ad anni passati. Sono anche presenti dei quesiti tratti da gare matematiche italiane ed internazionali, alcuni quesiti sono anche enunciati in lingua inglese. Così come quesiti tratti dai Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari.
In alcune unità poi sono presentate anche delle proposte di **attività interdisciplinari**.
Infine sono proposti dei test, almeno 10 di numero, relativi ai più importanti argomenti dell'unità didattica. Questi li trovi anche in formato multimediale scaricabili sempre dal sito http://mathinterattiva.altervista.org.
Un altro sito da cui puoi scaricare molto materiale didattico gratuito è http://matdidattica.altervista.org.

Buon lavoro
Carmelo Di Stefano

Indice

9. Funzioni reali di una variabile reale

9.1 Caratteristiche delle funzioni

9.2 Continuità delle funzioni

10. Il calcolo differenziale

10.1 Le derivate

10.2 Rappresentazione grafica delle funzioni

11. Il calcolo integrale

11.1 Integrazione indefinita

12.2 Statistica inferenziale

9. Funzioni reali di una variabile reale

9.1 Caratteristiche delle funzioni

Prerequisiti
- Sistema di riferimento cartesiano ortogonale
- Rappresentazione grafica ed equazioni delle rette
- Concetto di dominio e codominio di una funzione
- Funzioni polinomiali
- Funzioni logaritmiche ed esponenziali
- Funzioni goniometriche

Obiettivi
- Comprendere il concetto di funzione
- Comprendere il concetto di rappresentazione grafica di una funzione
- Sapere determinare dominio e codominio di una generica funzione
- Sapere determinare se una funzione è invertibile e in caso affermativo sapere calcolare l'inversa
- Sapere determinare la composizione di due o più funzioni

Contenuti
- Intervalli di numeri reali
- Definizione di funzione secondo Dirichlet
- Classificazione delle funzioni
- Dominio e codominio delle funzioni
- Iniettività e suriettività di una funzione. Funzioni invertibili
- Monotonia di una funzione
- Particolari simmetrie delle funzioni
- Invertibilità di una funzione
- Composizione di due o più funzioni

Parole chiave
Biiettività – Codominio – Dominio – Iniettività – Insieme di esistenza – Intervallo – Invertibilità
Monotonia – Suriettività – Trascendente

Richiamiamo le conoscenze...

Insiemi di numeri reali

Risolvendo equazioni o disequazioni le soluzioni possono scriversi in diversi modi.
Per esempio le soluzioni della disequazione $x - 2 > 0$, possono scriversi: $x > 2$ o $(2; +\infty)$.
Le soluzioni della disequazione $x-2\geq 0$ possono scriversi: $x \geq 2$ o $[2; +\infty)$.
Le soluzioni della disequazione $x-2<0$ possono scriversi: $x < 2$ o $(-\infty; 2)$.
Le soluzioni della disequazione $x-2\leq 0$ possono scriversi: $x \leq 2$ o $(-\infty; 2]$.
Le soluzioni della disequazione $x^2 - 4 \geq 0$ possono scriversi: $x \geq 2 \vee x \leq 2$ o $(-\infty; 2)] \cup [2; +\infty)$.
Le soluzioni della disequazione $(x - 2)^2 > 0$ possono scriversi: $x \neq 2$ o$(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

La funzione valore assoluto

A volte è utile considerare solo valori positivi, per esempio nel caso di misure fisiche di lunghezza, massa e simili. Non ha certo senso parlare di una stanza di –5 metri quadrati o di un masso di massa –3 Kg. Per ovviare a tali inconvenienti si usa perciò una funzione che del numero considera solo la sua parte priva del segno, quella che in genere si chiama **valore assoluto**, ma che è chiamato, in diversi contesti, anche **modulo**, **ampiezza** o simili terminologie.

Definizione A

Dato un numero reale x, diciamo suo **valore assoluto** l'espressione: $|x|=\begin{cases} x & se\, x\geq 0 \\ -x & se\, x<0 \end{cases}$.

Esempio A

Avremo $|2|=2, |0|=0, |-4|=4$.

Si ha:

Teorema A

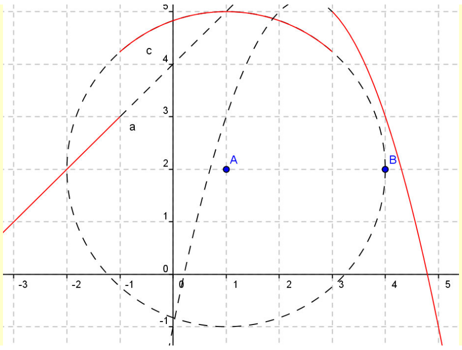
Si ha $|x+y|\leq |x|+|y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Rappresentazione grafica di semplici funzioni razionali

Sappiamo già rappresentare semplici funzioni, quelle rettilinee, paraboliche, logaritmiche, goniometriche, esponenziali. Sappiamo perciò rappresentare alcune funzioni che si ottengono sommando o sottraendo alcune di queste.

Esempio B

Vogliamo rappresentare la funzione $f(x)=\begin{cases} x+4 & x<-1 \\ \sqrt{9-(x-1)^2}+2 & -1\leq x\leq 3 \\ -x^2+5x-1 & x>3 \end{cases}$. Osserviamo che $y = x + 4$ è una retta, quindi disegnarla solo per $x < -1$, equivale a tracciare una semiretta. $y=\sqrt{9-(x-1)^2}+2$, la possiamo pensare ottenuta da $(y-2)^2=9-(x-1)^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=3^2$, cioè dalla circonferenza di centro (1; 2) e raggio 3. Pertanto dovremmo tracciare solo il suo arco i cui punti hanno ascissa che vanno da –1 a 3. Infine $y=-x^2+5x-1$ è una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate. Pertanto dobbiamo tracciare il suo arco che si ottiene per $x > 3$. Infine la funzione è quella che vediamo di seguito, in cui la funzione è quella in rosso, mentre i tratteggi mostrano le funzioni da cui abbiamo "prelevato" alcuni pezzi.



Risoluzione di disequazioni irrazionali

Valgono le seguenti regole.

Teorema B

- La disequazione $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ equivale ai due sistemi $\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq [g(x)]^2 \end{cases}$.
- La disequazione $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ equivale al sistema $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^2 \end{cases}$.

Verifiche

Livello 1

Calcolare

1. $|3 + |4 - 5| - 2|$ [2] $\quad |1 - |2 - |3 - 4|| - 5|$ [5] $\quad ||1 - 2| - |3 - 4| - 5|$ [5] $\quad |1 - 2 - |3 - |4 - 5||$ [1]
2. $\dfrac{|1-2|-3}{1-|2-3|}$ [∅] $\quad \dfrac{|1-2-|3-4||}{|1-|2-3|-4|}$ [0] $\quad \dfrac{|1-|2-|3-4|||}{|1-2-|3-4||}$ [0] $\quad \dfrac{|1-|2-3-|-4|||}{1-2-|3-4|}$ [– 2]

Livello 2

3. $|x + 1| - (x + 1)$ $\left[\begin{cases} -2x-1 & x<-1 \\ 0 & x \geq -1 \end{cases}\right]$ $\quad |x^2| - x^2$ [0] $\quad |x + 1| + x + 1$ $\left[\begin{cases} 0 & x<-1 \\ 2x+2 & x \geq -1 \end{cases}\right]$
4. $||x| - 1| - |x - 1|$ $\left[\begin{cases} -2 & x<-1 \\ -2x & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & x>0 \end{cases}\right]$ $\quad \dfrac{|x-2|-|x+2|}{|x-2|+|x+2|}$ $\left[\begin{cases} -2/x & x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ -x/2 & -2<x<2 \end{cases}\right]$
5. Semplificare $\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{b}{|b|}+\dfrac{c}{|c|}+\dfrac{abc}{|abc|}$, $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\left[\begin{cases} 4 & a,b,c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \\ -4 & a,b,c \in \mathbb{R}^- \setminus \{0\} \\ 0 & abc = 0 \end{cases}\right]$
6. Dimostrare che $|x - y| = \max(x, y) - \min(x, y)$.
7. Determinare minimo e massimo dell'espressione $|x - 2| + |x - 4| - |2x - 6|$, con $2 \leq x \leq 8$. [m = 0; M = 8]

Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni:

8. $|x - |2x + 1|| = 3$ $[x = -4/3 \vee x = 2]$ $\quad |x - 1| + |x + 1| = 2$ $[-1 \leq x \leq 1]$
9. $(1 - |x|) \cdot (1 + x) > 0$ $[x < -1 \vee -1 < x < 1]$ $\quad |x - 1| + |x + 2| < 5$ $[-3 < x < 2]$
10. $1 \leq |x - 2| \leq 7$ $[-5 \leq x \leq 1 \vee 3 \leq x \leq 9]$ $\quad \dfrac{|x-|x||}{x} > 0$ [∅]

11. Trovare i valori del parametro reale m per i quali l'equazione $|||x| - 2| - m| = 5$ ha esattamente 5 soluzioni. [$m = 7$]

Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

12. $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ 2x-1 & x\le 0\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 0 \\ 2x-1 & x> 0\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases} x^2-x+1 & x>1 \\ -x^2+x-1 & x\le 1\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases} 4x-1 & x>2 \\ x^2-5x+6 & x\le 2\end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} 3x & x>1 \\ \sqrt{1-(x-1)^2}-1 & x\le 0\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases} 2-3x & x<1 \\ \sqrt{4-(x-2)^2}+1 & 1\le x\le 4 \\ x^2-12x+5 & x>4\end{cases}$ $f(x)=\sqrt{\left|(1+x)\cdot(1-|x|)\right|}$

14. $f(x)=\begin{cases} 6x+1 & x<-2 \\ \sqrt{16-(x-2)^2}+3 & -2\le x\le 4 \\ x^2-14x+3 & x>4\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases} 4-5x & x<-4 \\ \sqrt{25-(x-3)^2}+2 & -4\le x\le 0 \\ x^2-2x+3 & x>0\end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} 5x+2 & x<0 \\ \sqrt{9-(x-3)^2}+1 & 0\le x\le 5 \\ -x^2-18x-2 & x>5\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases} 1+5x & x<-2 \\ \sqrt{16-(x+1)^2}+3 & -2\le x\le 1 \\ x^2-4x-6 & x>1\end{cases}$

Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali

16. $x+1>\sqrt{x+1}$ [$x>0$] $x+1\le\sqrt{x-1}$ [$\varnothing$] $x+1>\sqrt{x^2+1}$ [$x>0$]

17. $x-1<\sqrt{x^2+x}$ [$\varnothing$] $2x-3>\sqrt{2x^2-x-1}$ $\left[x>\dfrac{11+\sqrt{41}}{4}\right]$

Intervalli di numeri reali

Abbiamo già considerato, nel volume 2, l'insieme dei numeri naturali. Vogliamo adesso conoscere meglio l'insieme dei numeri reali.

Esempio 1

L'insieme dei numeri interi ha una proprietà che serve per ordinare e classificare gli insiemi numerici finiti. Cioè il fatto che ogni numero intero ha un precedente e un successivo. Per esempio il precedente del numero intero 3 è 2, il successivo 4. Ecco perché possiamo parlare di primo, secondo, terzo elemento e così via. Lo stesso non accade invece per i numeri razionali. Qual è il successivo del numero razionale 1,2? 1,3 no, perché per esempio 1,21 è più grande di 1,2 e più piccolo di 1,3. ma fra 1,2 e 1,21 c'è anche 1,203 oppure 1,20004 o ancora 1,20000007 e così via.

Quanto visto nell'esempio precedente merita una definizione.

Definizione 1

Un insieme numerico A si dice insieme **discreto**, se comunque si considerano due suoi elementi a e b con $a < b$ l'insieme $\{x \in A: a < x < b\}$ è finito.

Nella definizione precedente un numero finito significa anche zero.

Esempio 2

Nell'insieme dei numeri naturali, presi i numeri 4 e 21, l'insieme $\{x \in \mathbb{N}: 4 < x < 21\}$ contiene 16 elementi: $\{5, 6, 7, \ldots, 19, 20\}$. Fra i numeri 45 e 46 esistono 0 numeri interi.

Ovviamente ogni insieme finito è un insieme discreto. Vale il seguente banale risultato.

Teorema 1

Se A è un insieme discreto ogni suo sottoinsieme è anch'esso discreto.

Esempio 3

L'insieme dei soli numeri pari è discreto in quanto sottoinsieme dell'insieme discreto di tutti i numeri interi.

Per semplificare poniamo qualche definizione.

Definizione 2

Dati due numeri a e b con $a < b$, l'insieme dei numeri
- maggiori di a e minori di b si chiama **intervallo aperto**
- maggiori o uguali di a e minori di b si chiama **intervallo semiaperto a destra**
- maggiori di a e minori o uguali di b si chiama **intervallo semiaperto a sinistra**
- maggiori o uguali di a e minori o uguali di b si chiama **intervallo chiuso**

Dato un numero reale a l'insieme dei numeri
- maggiori di a si chiama **intervallo infinito aperto a destra**
- maggiori o uguali di a si chiama **intervallo infinito semiaperto a destra**.
- minori di a si chiama **intervallo infinito aperto a sinistra**
- minori o uguali di a si chiama **intervallo infinito semiaperto a sinistra**

Notazione 1

Dati i numeri a e b, con $a < b$, indichiamo l'intervallo aperto con $(a; b)$; l' intervallo semiaperto a destra con $[a; b)$; l'intervallo semiaperto a sinistra con $(a; b]$; l'intervallo chiuso con $[a; b]$; l'intervallo infinito aperto con $(a; +\infty)$; l' intervallo infinito semiaperto a destra con $[a; +\infty)$; l'intervallo infinito aperto a sinistra con $(-\infty; a]$; l'intervallo infinito semiaperto a sinistra con $(-\infty; a]$.

L'angolo storico

Il simbolo ∞ è usato per la prima volta da John Wallis in *De sectionibus conicis* del 1655, si pensa che egli abbia usato il simbolo tardo romano per il numero mille.

Definizione 3

Un insieme numerico A, tale che esista un intervallo $(a; b)$, con $a, b \in A$, che contiene infiniti elementi di A, si dice insieme **denso**.

Esempio 4

L'insieme dei numeri razionali è un insieme denso, per quanto visto nell'esempio 1. Anche i numeri reali sono un insieme denso. L'insieme X dei numeri reali minori o uguali di 3 o maggiori o uguali di 5 invece non è denso, poiché se consideriamo i numeri 3 e 5 dell'insieme, fra essi non ci sono elementi di X.

Vale ovviamente il seguente risultato.

Teorema 2

Se A è un insieme denso ogni insieme che contiene A è anch'esso denso.

I numeri reali verificano però una proprietà che li rende più densi dei razionali.

Esempio 5

Abbiamo già osservato che, per esempio, fra i numeri razionali 1,2 e 1,3 esistono infiniti altri numeri razionali. Ma esistono anche infiniti numeri che non sono razionali. Dato che $1{,}2^2 = 1{,}44$ e $1{,}3^2 = 1{,}69$ fra i numeri del tipo $\sqrt{x}; 1,21 < x < 1,69; x^2 \notin \mathbb{Q}$, ve ne sono infiniti che sono compresi tra 1,2 e 1,3 e non sono numeri razionali.

Quindi, a differenza dei numeri razionali che al loro interno hanno dei "buchi", i numeri reali invece non ne hanno, fra due numeri reali non solo ci sono infiniti numeri reali, ma solo numeri reali.

Definizione 4

Un insieme numerico *A*, tale che, ogni intervallo (*a*; *b*) contiene solo elementi di *A*, si dice insieme **continuo**.

Esempio 6

Un sottoinsieme di un insieme continuo non è detto che sia continuo, per esempio l'insieme *A* dei numeri minori o uguali di 2 o maggiori o uguali di 5 non è continuo, dato che, per esempio l'intervallo (2, 5) non contiene elementi di A. Quindi in questo caso non è neanche denso.

Approfondiremo questi concetti nella successiva unità.

Verifiche

Lavoriamo insieme

L'insieme $X = \left\{ \frac{n+2}{n-2} : n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \right\}$ è discreto o denso? Cominciamo a scrivere qualcuno dei suoi elementi: $X = \left\{ 5, 3, \frac{7}{3}, 2, \frac{9}{5}, \frac{5}{3}, \frac{11}{7}, \frac{3}{2}, \ldots \right\}$. Non è difficile osservare che abbiamo ottenuto numeri man mano sempre più piccoli, e questo fatto vale sempre, cioè ogni numero che otteniamo è più piccolo del precedente. Quindi l'insieme è discreto, dato che fra due elementi consecutivi non ci sono elementi dell'insieme.

Stabilire quali dei seguenti insiemi sono discreti, quali densi, quali continui e quali con nessuna delle precedenti proprietà (NP)

Livello 1

1. Insieme dei numeri pari [Discreto] Insieme dei numeri razionali minori di 4 [Denso]
2. Insieme dei multipli di 4 [Discreto] Insieme dei numeri interi minori di 32 [Discreto]
3. Insieme dei numeri il cui quadrato è minore di 2 [Continuo] $\{1/n: n \in \mathbb{N}\}$ [Discreto]
4. Insieme dei numeri razionali minori di 1 e maggiori di 0 [Denso] $\{1/z: z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ [Discreto]
5. Insieme dei numeri razionali minori di 1 o maggiori di 2 [Denso] $\{1/q: q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$ [Denso]
6. Insieme dei razionali minori o uguali di 1 o maggiori o uguali di 2 [NP]
7. Insieme dei numeri reali minori di 1 [Continuo] $\{1/r: r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ [Continuo]
8. Insieme dei reali il cui quadrato è un numero intero [Discreto]

Livello 2

9. $X = \left\{ \frac{z+2}{z+3} : z \in \mathbb{Z} \right\}$ [Discreto] $X = \left\{ \frac{z+2}{z+3} : z \in \mathbb{Q} \right\}$ [Denso] $X = \left\{ \frac{r+2}{r+3} : r \in \mathbb{R} \right\}$ [Continuo]
10. $X = \left\{ \frac{q+2}{q+3} : q \geq 1 \vee q \leq -1 \right\}$ [NP] L'unione di due insiemi discreti è un insieme discreto? [Sì]
11. L'unione di due insiemi densi è un insieme denso? [No]

12. L'unione di due insiemi continui è un insieme continuo? [No]
13. L'intersezione di due insiemi discreti è un insieme discreto? [Sì]
14. L'intersezione di due insiemi densi è un insieme denso? [Sì]
15. L'intersezione di due insiemi continui è un insieme continuo? [Sì]

Livello 3

16. L'unione di un insieme discreto con un insieme denso, che tipo di insieme è? [NP]
17. L'unione di un insieme discreto con un insieme continuo, che tipo di insieme è? [NP]
18. L'unione di un insieme denso con un insieme continuo, che tipo di insieme è? [NP]
19. L'intersezione di un insieme discreto con un insieme denso, che tipo di insieme è? [Discreto]
20. L'intersezione di un insieme discreto con uno continuo, che tipo di insieme è? [Discreto]
21. L'intersezione di un insieme denso con un insieme continuo, che tipo di insieme è? [Denso]

Definizione di funzione secondo Dirichlet

Il problema

Soprattutto nelle scienze fisiche si va alla ricerca di una relazione che leghi una certa grandezza a una o più altre grandezze. Per esempio, per descrivere il movimento di una particella si cerca una relazione che leghi lo spazio percorso al trascorrere del tempo. Si ottengono diverse relazioni a seconda delle ipotesi sul movimento (uniforme, con velocità costante, con accelerazione costante,…). Dal punto di vista matematico ciò cosa significa?

La ricerca della relazione fra una grandezza e una o più altre è una delle caratteristiche delle scienze matematiche. Abbiamo già visto diverse di queste relazioni, per esempio in quelle che legano fra di loro i punti di una retta o di una conica. La differenza fondamentale è che, nel caso della retta siamo sempre in grado di esprimere una delle due incognite mediante l'altra in un solo modo, ovviamente se sono presenti entrambe le incognite.

Esempio 7

L'equazione della retta $3x - 2y + 1 = 0$, può scriversi nella cosiddetta forma esplicita: $y = 3/2x + ½$, ma anche esprimendo x mediante y: $x = 2/3y - 1/3$. In genere si preferisce la prima forma.

Quanto visto in precedenza non è invece sempre possibile per l'equazione di una generica conica.

Esempio 8

- L'equazione di una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate esprime la relazione fra le ordinate e le ascisse dei punti della parabola: $y = ax^2 + bx + c$. Se volessimo esprimere l'equazione precedente mediante la variabile x, non otterremmo una sola relazione, bensì due:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a \cdot (c - y)}}{2a}.$$
- Nell'equazione dell'iperbole equilatera $xy = 1$, possiamo esprimere ciascuna delle due incognite mediante l'altra: $y = 1/x \vee x = 1/y$.
- Non vi è una relazione univoca che mette in relazione una delle due incognite mediante l'altra nel caso dell'equazione di una generica circonferenza, ellisse o iperbole, anche se in forma canonica.

Alla luce di quanto visto, poniamo la seguente definizione.

Definizione 5

Una legge di natura qualsiasi che a ogni elemento di un insieme A, associa al più un elemento di un insieme B si chiama **funzione definita in *A* e a valori in *B***. Il generico elemento si chiama **variabile indipendente**, il suo corrispondente si chiama **variabile dipendente**.

Notazione 1

Per indicare che vi è una funzione f, definita in A ed a valori in B, si scrive: $f : A \to B$.

Notazione 2

Il corrispondente di un elemento a in una funzione f, se esiste, si indica con il simbolo $f(a)$ che si legge **effe di a**.

La precedente definizione è detta anche di Dirichlet, in essa al più un corrispondente significa zero od un corrispondente.

I protagonisti

Lejeune Dirichlet nacque il 13 Febbraio 1805 a Düren, che allora faceva parte dell'impero francese. Ad appena 20 anni dimostrò un caso particolare del famoso ultimo teorema di Fermat, che è stato dimostrato nella sua completezza solo alla fine degli anni '90 del secolo scorso. Verso la fine della sua vita accettò di insegnare presso la allora prestigiosissima università Göttingen, in questa città morì il 5 Maggio 1859. Dirichlet, ha avuto il merito di trovare una "buona" definizione, soprattutto con la dicitura "legge di natura qualsiasi", che fa sì che si possano considerare anche leggi non numeriche.

L'angolo storico

Il termine **funzione** è dovuto al grande filosofo e matematico tedesco del '600 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), che coniò anche il termine **funzione di**. Invece il simbolo $f(x)$ per indicare l'elemento corrispondente di x mediante la funzione f, è stato introdotto nel 1734 da un altro grande matematico, lo svizzero Leonhard Euler (1707–1783).

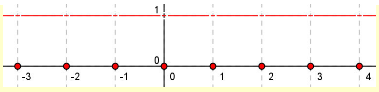
Esempio 9

- La legge che a ogni macchina associa una targa è una funzione, dato che ogni macchina ha una sola targa.
- Non è invece una funzione la legge che associa il numero civico di una strada a un'abitazione, poiché è vero che ad ogni porta è associato un solo numero civico, ma un appartamento può avere più numeri civici ad esso associati.
- Un altro esempio di funzione è quella che a ogni spettatore di uno spettacolo associa il posto sul quale sedersi.
- Non è una funzione che associa il numero 1 con il punteggio ottenuto lanciando un dado, perché il risultato non è sempre lo stesso, quindi non possiamo avere una funzione il cui valore dipenda da situazioni esterne.

Se gli insiemi su cui opera la funzione sono numerici, anche la funzione si dice numerica, in particolare se essi sono sottoinsiemi di numeri reali, la funzione si chiama **reale di variabile reale**.
Abbiamo già dato esempi di funzioni a cui sono associate delle rappresentazioni grafiche nel piano cartesiano, per esempio le funzioni lineari (cioè polinomi di primo grado in due variabili) rappresentano rette, quelle quadratiche ((cioè polinomi di secondo grado in due variabili, con la y presente solo al primo grado) sono parabole e così via. Questo ci porta a pensare che qualsiasi funzione numerica $y = f(x)$, possa rappresentarsi. Ciò non è vero come dimostrò per primo il citato Dirichlet.
Cominciamo a considerare prima una funzione che, seppure con una "strana" definizione, si può rappresentare.

Esempio 10

Vogliamo rappresentare la funzione così definita: $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$. Cioè se l'ascissa è un numero intero allora l'ordinata vale 0, se invece l'ascissa non è intera l'ordinata è 1.
Quindi la rappresentazione grafica è la retta $y = 1$, che ha infiniti "buchi" in corrispondenza delle ascisse intere. In corrispondenza di questi valori abbiamo dei punti sull'asse delle ascisse. In figura abbiamo una rap-

presentazione della funzione 

Adesso vogliamo rappresentare una funzione apparentemente simile alla precedente.

Esempio 11

Consideriamo la cosiddetta funzione di Dirichlet così definita: $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Stavolta se l'ascissa è un numero razionale allora l'ordinata vale 0, se invece l'ascissa è irrazionale l'ordinata è 1. La definizione è coerente e riusciamo sempre a conoscere il corrispondente di un dato numero, per esempio $f(1,23) = 0, f\left(\sqrt{2}\right) = 1$. Però stavolta non riusciamo a rappresentare la funzione, perché l'insieme dei numeri reali è *denso*, cioè, a differenza dei numeri naturali per i quali fra due numeri ci sono solo un numero finito di numeri naturali, fra due numeri razionali esistono infiniti numeri razionali. Ma anche l'insieme dei numeri irrazionali è denso, pertanto mentre fra il numero naturale 1 e il numero naturale 2 non ci sono numeri naturali, fra il numero razionale 1 e il numero razionale 2 ci sono infiniti numeri razionali e infiniti irrazionali. Quindi la funzione dovrebbe essere la retta $y = 1$ con infiniti buchi in corrispondenza di ogni ascissa razionale e la retta $y = 0$ con infiniti buchi in corrispondenza di ogni ascissa irrazionale, che ovviamente è impossibile da realizzare.

Considereremo soprattutto funzioni numeriche, quindi vediamo come possiamo classificarle.

Definizione 6

Una funzione reale di una variabile reale si dice **algebrica** se le operazioni che coinvolgono la variabile indipendente sono solo le 4 operazioni aritmetiche elementari e l'elevamento a potenza di esponente reale.

Esempio 12

- La funzione $f(x) = (1 + x)^x$ è una funzione algebrica.
- La funzione $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 1} + ln(2)$ è una funzione algebrica, poiché il logaritmo ha per argomento un numero e non un'espressione dipendente da x.
- Invece la funzione $f(x) = ln(x)$ non lo è, poiché la x è argomento del logaritmo naturale.

Definizione 7

Una funzione reale di una variabile reale si dice **razionale** se le operazioni che coinvolgono la variabile indipendente sono solo le 4 operazioni aritmetiche elementari.

Esempio 13

- La funzione $f(x) = \dfrac{x + ln(3)}{2x^2 - sin(1)}$ è una funzione razionale, poiché le funzioni non razionali logaritmo naturale e seno, non sono applicate alla variabile x, ma a dei numeri, pertanto non sono valori generici, bensì valori numerici determinati.
- Invece la funzione $f(x) = (1 + x)^x$, non è una funzione razionale, poiché la x è presente come esponente.

Definizione 8

Una funzione reale di una variabile reale non algebrica si dice **trascendente**.

Esempio 14

- La funzione $f(x) = (1 + x)^{sin(x)}$ è una funzione trascendente.

- Invece la funzione $f(x) = (x^2 - 1)^{ln(\pi/3)}$ è una funzione algebrica, addirittura razionale.

Verifiche

Lavoriamo insieme

La legge $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x > 1 \\ x^2 + 1 & x < 2 \end{cases}$ non definisce una funzione, perché ogni x: $1 < x < 2$, ha due diversi corrispondenti, dato che per esempio per $x = 1{,}5$ possiamo applicare entrambe le leggi.

Stabilire quale delle seguenti leggi definiscono funzioni

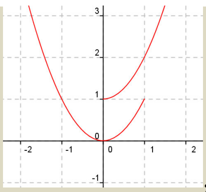
***Livello* 1**

1. Associamo i libri di una biblioteca allo scaffale nel quale sono riposti. [Sì]
2. Associamo le automobili al proprio proprietario. [No]
3. Associamo i figli ai loro padri. [Sì]
4. Associamo i padri ai loro figli. [No]
5. Associamo a ogni cittadino italiano il proprio codice fiscale. [Sì]
6. Associamo a un gruppo di degenti di un ospedale la loro temperatura corporea rilevata a un dato orario di un certo giorno. [Sì]
7. Associamo a ogni numero naturale il proprio doppio. [Sì]
8. Associamo a ogni materia il professore che la insegna. [No]
9. Associamo a ogni numero intero il proprio successivo. [Sì]
10. Associamo a ogni numero intero la somma delle proprie cifre. [Sì]
11. All'insieme {1, 2, 3, 4, 5} l'estratto numero k ($1 \le k \le 5$) della prima estrazione del 2014 sulla ruota di Napoli. [Sì]
12. All'insieme {1, 2, …, 10} il primo estratto della ruota numero k ($1 \le k \le 10$) della prima estrazione del 2014. [No]

***Livello* 2**

13. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x > 1 \\ x^2 + 1 & x < 0 \end{cases}$ [Sì] $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x > 1 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$ [No] $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ 3 & x > 0 \end{cases}$ [Sì]
14. $f(x) = \begin{cases} 1 & x < -2 \\ 2 & x = 0 \\ 3 & x > 1 \end{cases}$ [Sì] $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 2 \\ 2 & x = 2 \\ 3 & x \ge 2 \end{cases}$ [No] $f(x) = \begin{cases} 1 & 1 < x < 2 \\ 2 & 2 \le x < 5 \\ 3 & x \ge 4 \end{cases}$ [No]

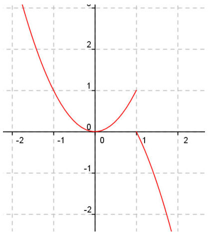
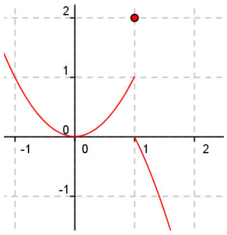
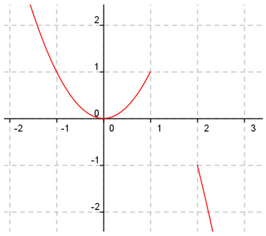
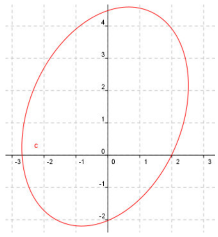
Lavoriamo insieme

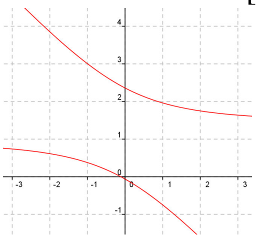
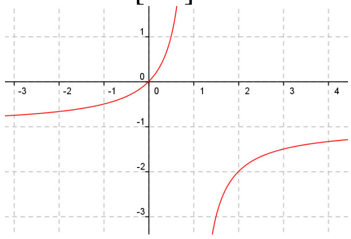
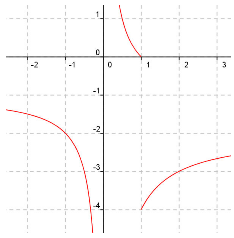
Il seguente grafico non si può riferire a una funzione 

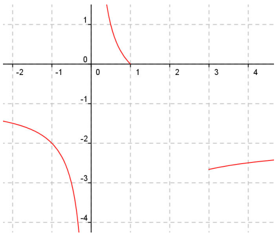
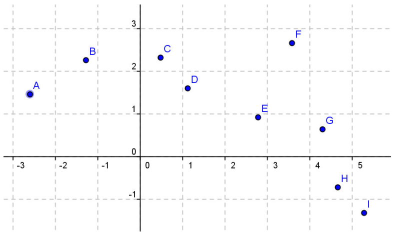
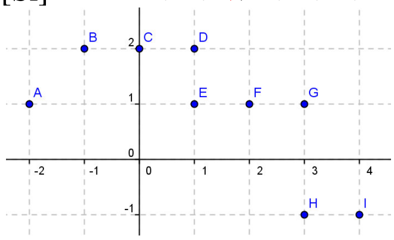
, poiché ci sono ascisse comprese tra 0 e 1, che hanno più di un'ordinata.

Stabilire quali dei seguenti grafici si riferiscono a funzioni, giustificando le risposte

Livello 1

15.  [Sì]  [No]  [Sì]  [No]

16.  [No]  [Sì]  [Sì]

17.  [Sì]  [Sì]  [No]

Lavoriamo insieme

Data la funzione $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, determinare $f(3)$.

Basta sostituire 3 a ogni x che compare nella definizione: $f(3)=\dfrac{3^2+1}{3^2-1}=\dfrac{9+1}{9-1}=\dfrac{10}{8}=\dfrac{4}{5}$

Livello 1

Per ciascuna delle date funzioni determinare quanto richiesto

18. $f(x) = x - 2$, $f(2) = ?$ [0] $f(x) = 3x + 1$, $f(½) = ?$ [5/2] $f(x) = ½x^2 - 1$, $f(-1) = ?$ [– ½]

19. $f(x) = -x^2 + x$, $f(-2/3) = ?$ [–10/9] $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$, $f(2) = ?$ [0] $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}-1$, $f(-½) = ?$ [–7/2]

20. $f(x)=\sqrt{x+1}$, $f(3) = ?$ [2] $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$, $f(-3/2) = ?$ [½] $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{x+1}$, $f(1/3) = ?$ $\left[\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right]$

21. $f(x)=\sqrt[3]{4x+1-x^2}$ $f(-3)=?$ $\left[\sqrt[3]{20}\right]$ $f(x)=\sqrt{x-\sqrt{x+1}}$, $f(3) = ?$ [1] $f(x) = ln[ln(x) + 1]$, $f(e) = ?$ [$ln(2)$]

22. $f(x) = x^3 - x + 1/x$, $f(3/4) = ?$ [193/192] $f(x) = ln(x + 1)$, $f\left(\sqrt{2}\right) = ?$ $\left[ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$

23. $f(x) = sin(2x) - cos(x)$, $f(\pi/3) = ?$ $\left[\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$ $f(x) = x + tan(3x)$, $f(\pi/4) = ?$ [$\pi/4 - 1$]

24. $f(x)=\sqrt{x+1}-|x+2|$, $f(-1) = ?$ $\left[\left(\sqrt{3}-4\right)/3\right]$ $f(x) = |x - |x + 2| + 1|$, $f(-2/3) = ?$ [1]

25. $f(x)=\dfrac{ln\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^3-1}}$, $f(2) = ?$ $\left[\dfrac{ln(3)}{\sqrt{7}}\right]$ $f(x)=sin\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$, $f(\pi/2) = ?$ $\left[sin\left(\dfrac{2+\pi}{\pi}\right)\right]$

Livello 2

26. $f(x)=\begin{cases} x-1 & x>1 \\ 2x+1 & x\le 1\end{cases}$, $f(1) = ?$ [3] $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\ge 0 \\ x^2+1 & x<0\end{cases}$, $f(½) = ?$ [5/4]

27. $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x>0\\ 3x+1 & x\le 0\end{cases}$, $f(2)$ = ? [3] $f(x)=\begin{cases}sin(x) & x\ge 0\\ cos(x) & x<0\end{cases}$, $f(\pi/2)$ = ? [1]

28. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & x>2\\ \sqrt[3]{x-1} & x\le 2\end{cases}$, $f(-½) + f(½)$ = ? $\left[-\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{12}}{2}\right]$ $f(x)=\begin{cases}x^3-1 & x\ge 0\\ \frac{x^2+1}{x} & x<0\end{cases}$, $f(-½) - f(½)$=?[13/8]

29. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & x\le 0\\ ln(x) & 0<x\le 2\\ \sqrt{x} & x>2\end{cases}$, $f(-1) + f(0) - f(1)$ = ? [– 3/2]

30. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1} & x\le 1\\ ln(x-1) & 1<x\le 3\\ \frac{1}{x^2-1} & x>3\end{cases}$, $f(-1) + f(2) - f(4)$ = ? $\left[\sqrt{2}-\frac{1}{15}\right]$

Lavoriamo insieme

Data la funzione $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, determinare $f(-x)$ ed esprimerla mediante $f(x)$.

Basta sostituire $(-x)$ a x: $f(-x)=\frac{-x+1}{-x-1}=\frac{x-1}{x+1}$. Adesso osserviamo che si ha: $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$

Date le funzioni seguenti, calcolare quanto richiesto

Livello 1

31. $f(x) = x^2 + x + 1$, $f(2x)$ = ? $[4x^2 + 2x + 1]$ $f(x) = x^3 - x + 1$, $f(x + 1)$ = ? $[x^3 + 3x^2 + 2x + 1]$

32. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$, $f(x^2)$ = ? $\left[\frac{x^4-1}{x^4+1}\right]$ $f(x) = (x - 1)^x$, $f(x^2)$ = ? $\left[\left(x^2-1\right)^{x^2}\right]$

33. $f(x) = x^4 + 5x^2 + 3$, $f(x^2 - 1)$ = ? $[x^8 - 4x^6 + 11x^4 - 14x^2 + 9]$

34. $f(x) = |x + sin(x)|$, $f\left(\sqrt{x}\right)$ = ? $\left[\left|\sqrt{x}+sin\left(\sqrt{x}\right)\right|\right]$ $f(x) = x^2 + 1$, $f[sin(x)]$ = ? $[sin(x^2 + 1)]$

Livello 2

35. $f(x)=\frac{e^{2x-1}+1}{e^{x+1}-1}$, $f(2x+1)$ = ? $\left[\frac{e^{4x+1}+1}{e^{2x+2}-1}\right]$ $f(x)=\frac{x+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}$, $f\left(x+\frac{1}{x}\right)$ = ? $\left[\frac{x^4+3x^2+1}{x^4+x^2+1}\right]$

36. $f(x) = x^2 - x$, $f(e^{x+1} - e^{x-1})$ $[e^{2x-2} \cdot (e^2 - 1)^2 + e^{x-1} \cdot (1 - e^2)]$

Livello 3

37. $f(x) = x + 1/x$, $f(1/x)$ = ? In che relazione sono le due funzioni? $[f(x) = f(1/x)]$

38. $f(x)=\frac{x\cdot(x-1)}{2}$, $f(x+2)$ = ? In che relazione sono le due funzioni? $\left[f(x+2)=\frac{(x+1)\cdot(x+2)}{x\cdot(x-1)}\cdot f(x)\right]$

39. $f(x) = x^2 + x + 1$, $f(x + h)$ = ? Determinare per quale valore di h tale espressione è priva del termine di primo grado e per quale valore è priva del termine noto. $[x^2 + (2h + 1)x + h^2 + h + 1; h = -½; \varnothing]$

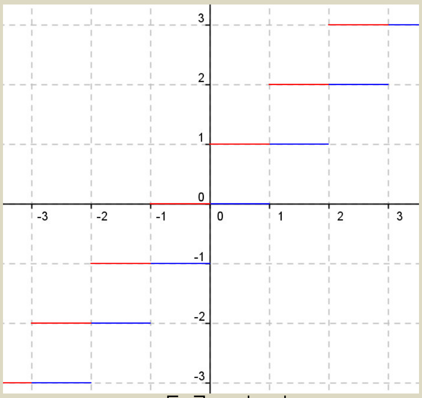
Lavoriamo insieme

Consideriamo le funzioni che indichiamo con $\lfloor x\rfloor$ e con $\lceil x\rceil$ e che chiamiamo rispettivamente massimo intero contenuto in x o anche *floor* o pavimento, e minimo intero che contiene x, o anche *ceiling* o soffitto. Vogliamo rappresentare queste funzioni.

Prima cerchiamo di capire le definizioni delle due funzioni. Vediamo qualche esempio:

$$\lfloor 0\rfloor = 0, \lfloor 0,35\rfloor = 0, \lfloor 0,9999\rfloor = 0, \lfloor 1\rfloor = 1, \lfloor -1,25\rfloor = -2$$
$$\lceil 0\rceil = 0, \lceil 0,35\rceil = 1, \lceil 0,9999\rceil = 1, \lceil 1\rceil = 1, \lceil -1,25\rceil = -1$$

Quindi le rappresentazioni delle funzioni sono degli "scalini" larghi una unità, come mostrato di seguito, dove in blu abbiamo la funzione pavimento e in rosso la funzione soffitto.



Dalla definizione e dal grafico si deduce che si ha: $\lceil x\rceil = \lfloor x\rfloor + 1$ e inoltre

$$x\in (n; n+1),\ n\in \mathbb{N} \Rightarrow \lceil x\rceil = n+1, \lfloor x\rfloor = n$$

Livello 3

Rappresentare le seguenti funzioni (*round*(*x*) è la funzione che associa a ogni ascissa la sua approssimazione per eccesso (se la prima cifra decimale è maggiore o uguale a 5) o per difetto (se minore di 5))

40. $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\end{cases}$ $\qquad f(x)=\begin{cases}-1 & x\in\mathbb{Z}\wedge x\ pari\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\\ 1 & x\in\mathbb{Z}\wedge x\ dispari\end{cases}$ $\qquad f(x) = x + \lfloor x\rfloor$
41. $f(x) = \lceil x\rceil - x$ $\qquad f(x) = \lceil x\rceil + \lfloor x\rfloor$ $\qquad f(x) = \lceil x\rceil^2$ $\qquad f(x) = \lfloor x\rfloor^2$
42. $f(x) = \lceil x\rceil - \lfloor x\rfloor$. Esprimere in modo più semplice questa funzione. [$f(x) = -1$]
43. $f(x) = \lfloor x\rfloor \cdot \lceil x\rceil$. Le ordinate delle ascisse intere hanno una particolarità, quale? [Sono i quadrati delle ascisse]
44. $f(x) = round(x)$ $\qquad f(x) = |round(x)|$ $\qquad f(x) = round(x) - \lceil x\rceil$ $\qquad f(x) = round(x) - \lfloor x\rfloor$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione $3\cdot\lfloor x\rfloor - 1 = 2\cdot\lfloor x+1\rfloor + 2$. Cominciamo a semplificare.

$$3\cdot\lfloor x\rfloor - 2\cdot\lfloor x+1\rfloor = 3$$

In che relazione sono $\lfloor x\rfloor$ e $\lfloor x+1\rfloor$? Per capirlo consideriamo qualche caso particolare:

$$\lfloor 1,75\rfloor = 1, \lfloor 1,75+1\rfloor = \lfloor 2,75\rfloor = 2;\ \lfloor -1,75\rfloor = -2, \lfloor -1,75+1\rfloor = \lfloor -0,75\rfloor = -1$$

Cioè $\lfloor x+1\rfloor = \lfloor x\rfloor + 1$. Quindi: $\quad 3\cdot\lfloor x\rfloor - 2\cdot\lfloor x+1\rfloor = 3 \Rightarrow 3\cdot\lfloor x\rfloor - 2\cdot\lfloor x\rfloor - 2 = 3 \Rightarrow \lfloor x\rfloor = 5$

Ovviamente le soluzioni sono tutti i numeri il cui "pavimento" è 5, cioè $5 \le x < 6$.

Risolvere le seguenti equazioni

Livello 3

45. $\lfloor x\rfloor + x = 1$ [$\varnothing$] $\qquad \lceil x\rceil - x = 2$ [$\varnothing$] $\qquad \lceil x\rceil + \lfloor x\rfloor = 5$ [$2 < x < 3$] $\qquad \lfloor x\rfloor + 1 = 2\cdot\lfloor x+2\rfloor$ [$-3 \le x < -2$]
46. $\lfloor x+1\rfloor = \lfloor x\rfloor + 1$ [$\forall x\in\mathbb{R}$] $\qquad 2\cdot\lfloor x\rfloor + 3 = 3\cdot\lfloor x-2\rfloor + 5$ [$4 \le x < 5$] $\qquad \lceil x\rceil - \lfloor x\rfloor = 5$ [$\varnothing$]
47. $\lfloor x\rfloor - x = 2$ [$\varnothing$] $\qquad \lceil x\rceil + 1 = 2\cdot\lfloor x+2\rfloor$ [$-2 \le x < -1$] $\qquad \lceil x+1\rceil - 3 = 4\cdot\lceil x-2\rceil$ [$1 < x \le 2$]
48. $\lceil x\rceil\cdot\lceil x+1\rceil = 1$ $\left[x = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right]$ $\qquad \lfloor x\rfloor\cdot\lfloor x-1\rfloor = 0$ [$-1 \le x \le 1$] $\qquad \lfloor x\rfloor\cdot\lceil x\rceil = 0$ [$-1 \le x \le 1$]
49. $\lfloor x\rfloor^2 = 1$ [$-1 \le x < 0 \vee 1 \le x < 2$] $\qquad \lfloor x^2\rfloor = 1$ [$-\sqrt{2} < x \le -1 \vee 1 \le x < \sqrt{2}$]
50. $\lceil x\rceil^2 = 1$ [$-1 \le x < 0 \vee 0 < x \le 1$] $\qquad \lceil x^2\rceil = 1$ [$-2 < x \le -1 \vee 0 < x \le 1$]

51. Provare che $\lfloor x \rfloor + \lfloor 1-x \rfloor = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

Lavoriamo insieme

La funzione $f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot tan(\pi/7) & x < \pi \\ 1 + ln(3) & x \geq \pi \end{cases}$ è algebrica e razionale, poiché nella sua definizione la variabile dipendente è coinvolta solo nell'operazione di elevamento al cubo.

Classificare le seguenti funzioni

Livello 1

52. $f(x) = x^2 - tan(3)$ [razionale] $f(x) = 3^2 - tan(x)$ [trascendente]

53. $f(x) = (2x - ln(4))^5$ [razionale] $f(x) = (2x - ln(4))^{5x+1}$ [algebrica non razionale]

54. $f(x) = \dfrac{x^4 - \sqrt{x}}{\sqrt{x^3} - \pi}$ [algebrica non razionale] $f(x) = \dfrac{x^5 + \sqrt{cos(\pi)}}{\sqrt{x + \log_{1/2} 5}}$ [algebrica non razionale]

55. $f(x) = \begin{cases} |x| & x < 1 \\ |sin\ x| & x > 2 \end{cases}$ [trascendente] $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{x} & x < 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{x}}{\log_x 3} & x > 2 \end{cases}$ [trascendente]

56. $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^x & x > 0 \\ sin\left(\dfrac{\pi}{9}\right) & x \leq 0 \end{cases}$ [algebrica non raz.] $f(x) = \begin{cases} 2^x & x > \dfrac{3}{4} \\ x^2 & x < -\dfrac{1}{4} \end{cases}$ [algebrica non raz.]

Dominio e codominio delle funzioni

Nella definizione di funzione abbiamo sempre aggiunto la clausola "se esiste il corrispondente", infatti non è detto che la legge stabilita sia verificata da tutti gli elementi dell'insieme di partenza.

Esempio 15

Se consideriamo la funzione reale di variabile reale definita da $f(x) = \sqrt{x}$, ovviamente questa funzione è definita solo per valori non negativi di *x*.

Diamo allora una nuova definizione.

Definizione 9

Data una funzione reale di variabile reale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diciamo suo **dominio** (brevemente **dom(*f*)**) o **insieme di esistenza** (brevemente **IdE(*f*)**) il sottoinsieme dei numeri reali che hanno un corrispondente reale mediante la *f*.

Che cosa significa

Dominio deriva dal latino *dominium* che a sua volta deriva da *dominus*, cioè signore. Quindi il dominio è il luogo in cui qualcuno o qualcosa domina, padroneggia. Come estensione perciò il dominio di una funzione è dove essa agisce.

Esempio 16

Il dominio della funzione $f(x)=\sqrt{x}$ è, per quanto detto, *dom*(*f*) = $\{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\} = \mathbb{R}^+_0$.

Ovviamente possiamo considerare anche il sottoinsieme corrispondente al dominio.

Definizione 10

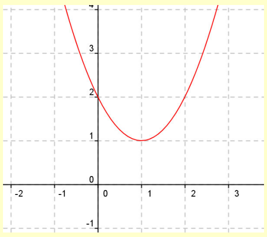
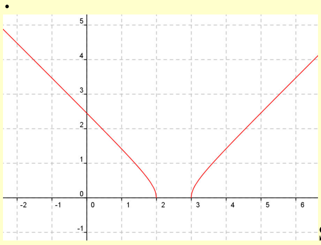
Data una funzione reale di variabile reale $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diciamo suo **codominio** (brevemente **cod(*f*)**) o **immagine** (brevemente **Im(*f*)**) il sottoinsieme dei numeri reali che sono corrispondenti di almeno un numero reale mediante la *f*.

Esempio 17

- Il codominio della funzione $f(x)=\sqrt{x}$ è ovviamente *cod*(*f*) = $\{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\} = \mathbb{R}^+_0$. Quindi in modo corretto potremmo scrivere: $f(x)=\sqrt{x}: \mathbb{R}^+_0 \to \mathbb{R}^+_0$.
- Non dobbiamo pensare che il dominio coincida sempre con il codominio. La funzione $f(x) = x^2$ ha per dominio $\mathbb{R}$, mentre il suo codominio è l'insieme dei numeri reali non negativi. $f(x) = x^2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+_0$.

Con la rappresentazione grafica risulta particolarmente semplice determinare dominio e codominio di una funzione.

Esempio 18

- Il grafico seguente  si riferisce, almeno tenuto conto di ciò che si vede, a una funzione il cui dominio e il cui codominio è l'insieme dei numeri reali.
- Il grafico seguente  si riferisce, sempre tenuto conto di ciò che si vede, a una funzione il cui dominio è l'insieme dei numeri reali, ma il cui codominio sono tutti i numeri reali maggiori o uguali a 1.
- Il grafico  si riferisce a una funzione di dominio $\{x \in \mathbb{R}: x \leq 2 \vee x \geq 3\} = (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$ e codominio $\{y \in \mathbb{R}: y \geq 0\} = \mathbb{R}^+_0$.

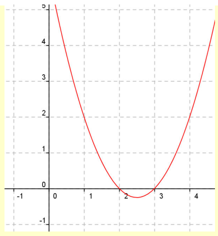
A volte può essere utile variare il dominio di una funzione.

Definizione 11

Data una funzione reale di variabile reale $f: A \to B$, diciamo sua **restrizione** la funzione che ha la stessa definizione della f, ma il cui dominio è un sottoinsieme di $dom(f)$.

Ovviamente restringendo il dominio della funzione, in generale si restringe anche il suo codominio.

Esempio 19



Data la funzione $f(x) = x^2 - 5x + 6$, il cui grafico è la parabola mostrata in figura che ha dominio $\mathbb{R}$ e codominio $\{y \in \mathbb{R}: y \geq -¼\} = [-¼; +\infty)$, come si capisce facilmente, dato che le coordinate del vertice sono $V \equiv (5/2; -¼)$. Restringendo la funzione alle sole ascisse maggiori di 4, il codominio diventa $\{y \in \mathbb{R}: y \geq 2\} = [2; +\infty)$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Determinare l'insieme di esistenza della funzione $f(x) = \sqrt{x-2} + ln(5x-1) - \frac{\sqrt[3]{x}}{3-x}$.

Tutto dipende dalle operazioni coinvolte nella definizione della funzione. Ovviamente non danno "preoccupazioni" la somma algebrica e il prodotto, lo danno invece la divisione (la frazione), la radice quadrata e il logaritmo. Neanche la radice cubica impone restrizioni sul dominio. Basta quindi imporre le condizioni per l'esistenza di ciascuna di queste operazioni, ottenendo il seguente sistema:

$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 5x-1>0 \\ 3-x \neq 0 \end{cases}$, che andiamo a risolvere: $\begin{cases} x \geq 2 \\ x > \frac{1}{5} \\ x \neq 3 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2 \wedge \neq 3 \Rightarrow dom(f) = [2,3) \cup (3,+\infty]$

Determinare l'insieme di esistenza delle seguenti funzioni

Livello 1

1. $f_1(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $[\mathbb{R} \setminus \{1\}]$ $f_2(x) = \frac{1}{x^2+1}$ $[\mathbb{R}]$ $f_3(x) = \sqrt{x^2+2}$ $[\mathbb{R}]$
2. $g_1(x) = 1 + \frac{1}{x^2-1}$ $[\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}]$ $g_2(x) = ln(x^2 + 5)$ $[\mathbb{R}]$ $g_3(x) = 4x + ln(5)$ $[\mathbb{R}]$
3. $h_1(x) = \sqrt[4]{2x-1} + \sqrt[5]{3x-1}$ $[½; +\infty)$ $h_2(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{17}}$ $[\mathbb{R}^+_0]$ $h_3(x) = \frac{x+5}{x^2-4}$ $[\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}]$
4. $k_1(x) = \frac{x+2}{ln(x-1)}$ $[(1; 2) \cup (2; +\infty)]$ $k_2(x) = \sqrt{-x^2}$ $[\{0\}]$ $k_3(x) = ln(x + 2)$ $[(-2; +\infty)]$
5. $m_1(x) = \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}-1}$ $[(0; 1) \cup (1; +\infty)]$ $m_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $[(0; +\infty)]$ $m_3(x) = \frac{sin(2x+1)}{\sqrt[3]{x+2}}$ $[\mathbb{R} \setminus \{-2\}]$
6. $n_1(x) = tan(3x - 4)$ $\left[x \neq \frac{\pi+8}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3}\right]$ $n_2(x) = cot(4x + 2)$ $\left[x \neq \frac{\pi-2}{4} + k \cdot \frac{\pi}{4}\right]$

7. $p_1(x) = sec(x^2)$ $\left[x \neq \pm\frac{\sqrt{2\pi\cdot(4k\pm1)}}{2}\right]$ $p_2(x) = \frac{log_2(x+1)}{x^4+5}$ [(–1; + ∞)]

8. $q_1(x) = \frac{sin(x+1)}{cos(x)}$ [$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$] $q_2(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2+1}}$ [[0; + ∞)] $q_3(x) = \sqrt{|x+3|}$ [$\mathbb{R}$]

9. $r_1(x) = \frac{x^2+1}{x+3} - \frac{x}{2-x}$ [$\mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$] $r_2(x) = \sqrt{x+\pi}$ [(–π; + ∞)]

Livello 2

10. $f_1(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x^2-3}$ $\left[\mathbb{R}_0^+ \setminus \{\sqrt{3}\}\right]$ $f_2(x) = \frac{\log_x(3)}{2x+1}$ [(0; 1) ∪ (1; + ∞)]

11. $g_1(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{2-3x}$ [[–2; 2/3]] $g_2(x) = ln(x+1) - \sqrt{1-2x}$ [(– 1; ½]]

12. $h_1(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-9}}$ [(–∞;–3) ∪ (3; +∞)] $h_2(x) = log_3\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ [(–∞;–1) ∪ (2; +∞)]

13. $K_1(x) = log_{3x-1}(4x + 1)$ [(1/3; 2/3) ∪ (2/3; + ∞)] $k_2(x) = ln[ln(2x – 5)]$ [(3; + ∞)]

14. $m_1(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$ [(1; + ∞)] $m_2(x) = \frac{x+tan(x)}{sin(x)}$ [$\mathbb{R} \setminus \{k\pi/2\}$]

15. $n_1(x) = \frac{\sqrt{ln(2x+1)}}{\sqrt[3]{\sqrt{x-2}+1}}$ [[2; + ∞)] $n_2(x) = \sqrt{\sqrt{x}-1}$ [[1; +∞)]

16. $p_1(x) = \sqrt{log_5(x-2)-1}$ [[7; +∞)] $p_2(x) = cot(2x) - \frac{\sqrt[3]{x}}{4x+1}$ [$\mathbb{R} \setminus \{k\pi/2; -1/4\}$]

17. $q_1(x) = (x+1)^x + ln(3x+1)$ [(–1/3; +∞)] $q_2(x) = \sqrt[7]{x+9} + \sqrt{3x^2-2} + \frac{ln(x-1)}{x-x^2}$ [(1; + ∞)]

18. $r_1(x) = ln(x^2-4) - \frac{\sqrt{x-2}-\sqrt[3]{x}}{x^4-1}$ [(2; + ∞)] $r_2(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x}} + ln(x^2-16) - \frac{\sqrt[4]{x}-5}{3+x^2}$ [(4; + ∞)]

19. $k(x) = \sqrt{x^3-2} + ln(x^2+1) + \frac{\sqrt[3]{x-7}}{9-x^2}$ $\left[\left[\sqrt[3]{2};3\right)\cup(3;+\infty)\right]$

20. $f(x) = \sqrt{3x-2} + ln(5x+1) - \frac{\sqrt[5]{x-4}}{3-x^2}$ $\left[\left[\frac{2}{3};\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)\right]$

21. $n(x) = \sqrt{\frac{7x-1}{4x-3}} + 2ln(x^2-x+3) + \frac{4x-1}{3x^2-x-2}$ [(–∞;–2/3) ∪ (–2/3; 1/7] ∪ (¾; 1) ∪ (1; +∞)]

Livello 3

22. $p(x) = \log_{x^2-1}(x^3-2) + \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}-1}-2}$ [[25; + ∞)]

23. $q(x) = sin^{-1}(x^2-x)$ (ricorda che il dominio di $sin^{-1}(x)$ è [–1; 1] $\left[\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]\right]$

24. $t(x) = sin^{-1}(2x^2-3x+1) + cos^{-1}(2x-3)$ [[1; 3/2]] $u(x) = sin^{-1}(ln(2x+1))$ $\left[\left[\frac{e^{-1}-1}{2};\frac{e-1}{2}\right]\right]$

25. $w(x) = \sqrt{sin^{-1}(1-3x)}$ [(0; 1/3)] $z(x) = ln\left[cos^{-1}(4x+1)\right]$ [[– ½; 0)]

Lavoriamo insieme

Determinare l'insieme di esistenza della funzione $f(x) = \frac{\sqrt{4x+1-|3x|}}{|2x-4|-|3x+7|}$.

Anche in questo caso dobbiamo risolvere un sistema: $\begin{cases} 4x+1-|3x|\geq 0 \\ |2x-4|-|3x+7|\neq 0 \end{cases}$. Risolviamo separatamente:

$$4x+1-|3x|\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x+1-3x\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 4x+1+3x\geq 0 \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x\geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x\geq -\frac{1}{7} \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow x\geq 0 \vee 0<x\leq -\frac{1}{7} \Rightarrow x\geq -\frac{1}{7}$$

$$|2x-4|-|3x+7|\neq 0 \Rightarrow 2x-4\neq 3x+7 \vee 2x-4\neq -3x-7 \Rightarrow x\neq -11 \vee x\neq -\frac{3}{5}$$

Quindi il sistema equivale al seguente: $\begin{cases} x\geq -\frac{1}{7} \\ x\neq -11 \vee x\neq -\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow x\geq -\frac{1}{7}$, la cui soluzione è appunto il dominio cercato.

Determinare l'insieme di esistenza delle seguenti funzioni

Livello 3

26. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-|3x+1|}}{|-2x+1|-|x-7|}$ [[–2/3; 0]] $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1-|x-3|}}{\sqrt{x-|-3+x|-|2x+5|}}$ [[3/2; +∞)]

27. $f(x)=\dfrac{\sqrt{7x+1-|5x+2|}}{|3x+1|-|-x+5|}$ [[½; 1) ∪ (1; +∞)] $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x+5-|4x+1|}}{|-x+2|-|3x-8|}$ [[–6/7; 4]\{5/2; 3}]

28. $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-|4x+7|}}{|-5x+3|-|8x-2|}$ [[–5/2; –1]] $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-|7x-1|}}{|5x-8|-|-3x+2|}$ [[1/8; 1/6]]

29. $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x-3+|6x+7|}}{|2x+1|+|-3x-2|}$ [(–∞; –5] ∪ [–2/5; +∞)] $f(x)=\dfrac{\sqrt{7+|-2x+3|}}{|x-9|-|4x+5|}$ [ℝ\{–14/3; 4/5}]

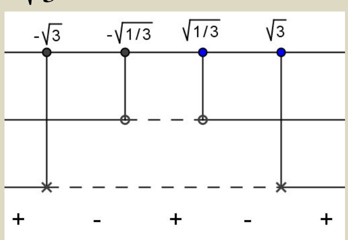
30. $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x-|4x-7|}}{\sqrt{|-5x+1|-x}}$ [[1; 7]] $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x-5-|4x|}}{\sqrt{|-x|-|-7x+3|}}$ [∅]

31. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1+|3x+4|}}{|x+2|+\sqrt{|4x+1|-2}}$ [(–∞;–3/2) ∪ [–5/4; –¾] ∪ [¼; +∞)] $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3-|4x-1|}}{|x+1|-|2x-7|}$ [∅]

Lavoriamo insieme

Per la determinazione del codominio di una funzione può essere utile determinare prima il segno, dato che in tal modo stabiliamo per quali ascisse si ottengono ordinate positive e per quali negative o nulle.

Per esempio sia $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{5x^2-15}$. Basta risolvere la disequazione $\dfrac{3x^2-1}{5x^2-15}\geq 0$. Le cui soluzioni si trovano facilmente, determinando il segno del numeratore: $3x^2-1\geq 0 \Rightarrow x\leq -\sqrt{\frac{1}{3}} \vee \geq \sqrt{\frac{1}{3}}$, quindi del denominatore:



$5x^2-15\geq 0 \Rightarrow x\leq -\sqrt{3} \vee \geq \sqrt{3}$. Riportiamo il tutto in un grafico

L'ultima riga indica il segno della funzione in ciascuno degli intervalli.

Determinare quando sono positive le seguenti funzioni

Livello 1

32. $f(x)=\dfrac{4x-1}{x-x^2}$ $[1/4 < x < 1 \vee x > 0]$ $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-x^2}$ $[-1 < x < 0]$

33. $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{5x^2-4}$ $\left[x<-\dfrac{2\cdot\sqrt{5}}{5}\vee\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ $f(x)=\dfrac{x^4-x}{2x^3-1}$ $\left[\left(0<x<\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}\vee x>1\right)\right]$

34. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+4}$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$ $f(x)=\dfrac{x^2-5}{1-3x+x^2}$ $\left[x<-\sqrt{5}\vee\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\sqrt{5}\vee x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

35. $f(x)=\dfrac{-1}{1-x+x^2}$ $[\varnothing]$ $f(x)=\dfrac{x^2+x}{5x^2+x-1}$ $\left[\left(x<-1\vee\dfrac{-1-\sqrt{21}}{10}<x<0\vee x>\dfrac{\sqrt{21}-1}{10}\right)\right]$

36. $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}$ $[3/2 < x \le 4]$ $f(x)=\dfrac{2x^3-1}{x^2-11x-12}$ $\left[-1<x<\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}\vee x>12\right]$

37. $f(x)=\dfrac{x-1}{3x+2}$ $[x < -2/3 \vee x > 1]$ $f(x) = ln(3x^2 - x - 1) - 2$ $\left[x<\dfrac{1-\sqrt{13+12e^2}}{6}\vee x>\dfrac{1+\sqrt{13+12e^2}}{6}\right]$

38. $f(x) = log_2(x) + log_2(3x - 1)$ $\left[x<\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}\vee x>\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\right]$ $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{4-3x}$ $[x < 4/3]$

Livello 2

Si ricordi che $log_a(b)\begin{cases}>0 & se\ (a>1\wedge b>1)\vee(0<a<1\wedge 0<b<1)\\ <0 & se\ (a>1\wedge 0<b<1)\vee(a>1\wedge 0<b<1)\end{cases}$

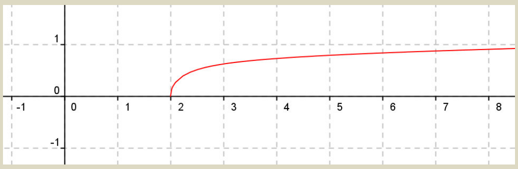
39. $f(x) = log_{4x-1}(5x + 2)$ $[x > 1/2]$ $f(x)=log_{x^2-x}(3-2x)$ $\left[\left(x<0\wedge x\neq\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\vee\left(1<x<\dfrac{3}{2}\right)\right]$

40. $f(x) = log_{2x+5}(x^2 - 16)$ $\left[x>\sqrt{17}\right]$ $f(x) = log_{3x+2}(7x - 2)$ $[x > 3/7]$

41. $f(x)=\dfrac{log_{11x+12}(4x+3)}{x+1}$ $[x > -1/2]$ $f(x)=\dfrac{x}{log_{4x-1}(7-2x)}$ $[1/2 < x < 3]$

Lavoriamo insieme

Tenuto conto del grafico vogliamo determinare dominio e codominio della funzione.

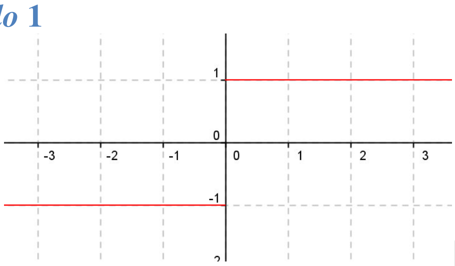
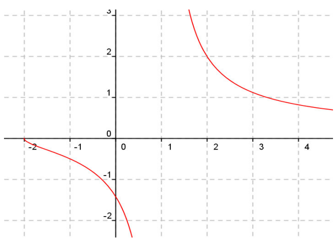


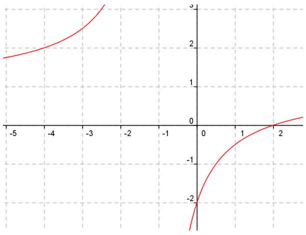
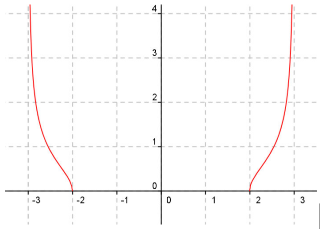
Ovviamente la risposta dipende solo da ciò che vediamo, ipotizziamo perciò che il grafico sia "regolare", nel senso che se, come nel nostro caso non vediamo nulla prima dell'ascissa x = 1, vuol dire che non c'è effettivamente nulla, lo stesso per le ordinate. Pertanto sulla base di ciò possiamo affermare che si ha:

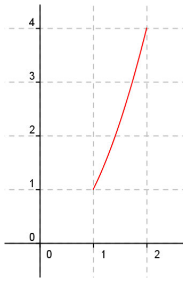
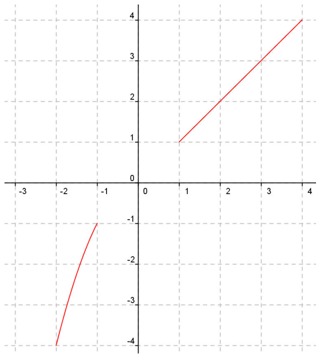
$$dom(f)=[2,+\infty),cod(f)=[0,1)$$

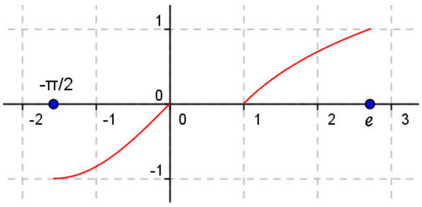
Determinare dominio e codominio delle seguenti funzioni tenendo conto del grafico mostrato

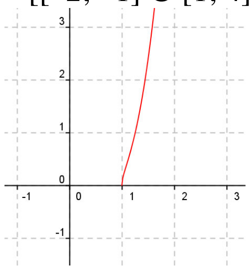
Livello 1

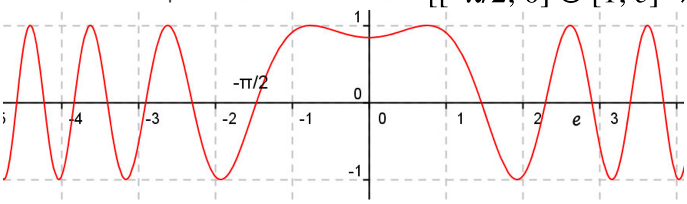
42.  $[\mathbb{R} \to \{-1; 1\}]$  $[[-2; 1) \cup (1; +\infty) \to \mathbb{R}]$

43.  $[\mathbb{R}\backslash\{-1\}\to\mathbb{R}\backslash\{1\}]$  $[(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)\to\mathbb{R}^*_0]$

44.  $[[1; 2] \to [1; 4]]$  $[[-2; -1] \cup [1; 4]; [-4; -1] \cup [1; 4]]$

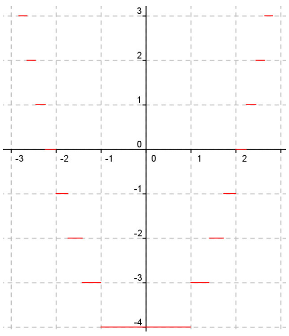
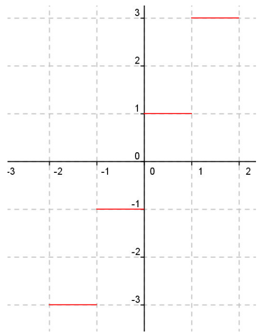
45. 

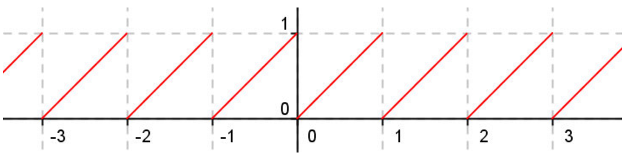
$[[-\pi/2; 0] \cup [1; e]\to [-1; 1]]\}]$  $[[1; +\infty)\to[0; +\infty)]$

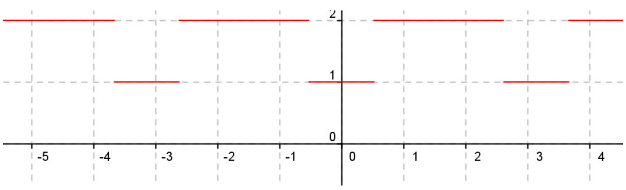
46. 

$[\mathbb{R}\to [-1; 1]]$

Livello 2

47.  $[\mathbb{R}\to [-4;+\infty) \cap \mathbb{Z}]$  [$\mathbb{R} \to$ interi dispari]

48.  $[\mathbb{R}\to [0;1]]$

49.  $[\mathbb{R}\to \{1; 2\}]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo trovare il codominio della funzione $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

Questo equivale a stabilire per quali valori di x l'equazione $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ ammette soluzioni reali.
Si ha: $y \cdot (x-1) = x^2+1 \Rightarrow x^2 - xy + 1 + y = 0$, che è un'equazione di secondo grado in x e ha soluzioni reali solo quando il discriminante è negativo, cioè $\Delta = y^2 - 4 \cdot (1+y) \geq 0 \Rightarrow y^2 - 4y - 4 \geq 0$.
Il delta di questa disequazione è positivo, pertanto le soluzioni sono: $y \leq 2-\sqrt{8} \vee y \geq 2+\sqrt{8}$, che è perciò il codominio cercato.

Determinare il codominio delle seguenti funzioni

Livello 1

50. $f(x) = 3x - 1$ $[\mathbb{R}]$ $f(x) = x^2 + 1$ $[[1; +\infty)]$ $f(x) = -x^2 - 3$ $[(-\infty; -3]$ $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ $[\mathbb{R}\setminus\{1\}]$
51. $f(x) = (x^2+3)^2$ $[[9; +\infty)]$ $f(x) = x^4 + 4x^2 + 5$ $[[5; +\infty)]$ $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5}$ $[(0; 1/5]]$
52. $f(x) = e^{2x-1}$ $[[0; +\infty)]$ $f(x) = csc(2x - 1)$ $[(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)]$ $f(x) = 3sin(4x)$ $[[-3; 3]]$
53. $f(x) = 2^{x+1}$ $[[0; +\infty)]$ $f(x)=\sqrt{2x^2+5}$ $\left[\left[\sqrt{5};+\infty\right)\right]$ $f(x)=\sqrt{x+1}$ $[[0;+\infty)]$
54. $f(x) = sin(3x - 1)$ $[[-1; 1]]$ $f(x) = 1 - cos(-x + 5)$ $[[-1; 3]]$ $f(x)=\dfrac{-1}{2x^2+3}$ $[[-1/3; 0)]$

Livello 2

55. $f(x)=\dfrac{1}{2+3\cdot sin(x)}$ $[(-\infty; -1] \cup [1/5; +\infty)]$ $f(x)=\dfrac{-2}{1-4\cdot cos(2x)}$ $[(-\infty; -2/5] \cup [2/3; +\infty)]$
56. $f(x)=\sqrt{sin^2(4x+2)+1}$ $\left[1;\sqrt{2}\right]$ $f(x)=\sqrt{1+2\cdot cos(x^2)}$ $\left[\left[0;\sqrt{3}\right]\right]$
57. $f(x) = sin^{-1}(3x + 4)$ $[[-\pi/2; \pi/2]]$ $f(x) = sin^{-1}(x^2)$ $[[0; \pi/2]]$ $f(x)=\dfrac{ln(x)}{1+ln(x)}$ $[\mathbb{R}\setminus\{1\}]$
58. $f(x)=\sqrt{sin^{-1}(x)}$ $\left[0;\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right]$ $f(x) = ln[cos^{-1}(2x - 1)]$ $[(0; ln(\pi/2))]$ $f(x)=x+\sqrt{x}$ $[\mathbb{R}^+_0]$

Livello 3

59. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$ $[(-\infty; 1/4] \cup (1; +\infty)]$ $f(x)=\dfrac{x^2-2}{1-x}$ $[(-\infty; +\infty)]$
60. $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{2-x^2}$ $[(-\infty; -5] \cup [-1; +\infty)]$ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{3-x^2}$ $[(-\infty; -1)] \cup (1/3; +\infty)]$
61. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{1-x-x^2}$ $[(-\infty; -1)] \cup (3/5; +\infty)]$ $f(x)=\dfrac{x^4+1}{5-2x^4}$ $[(-\infty;-1/2) \cup [-1/5; +\infty)]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo trovare dei valori da assegnare al parametro reale m in modo che la funzione seguente $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2-m}}{mx+1}$, abbia come dominio l'insieme di tutti i numeri reali.
Deve essere $\begin{cases} x^2-m\geq 0 \\ mx+1\neq 0 \end{cases}$ e questo deve accadere per ogni valore reale di x. Per la disequazione basta che sia $m \leq 0$, mentre la disuguaglianza è verificata per ogni x solo se $m = 0$. Pertanto la funzione ha dominio tutti i reali solo per $m = 0$ e in tal caso essa diviene: $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2}}{1} \Rightarrow f(x)=x+|x|$.
Per risolvere il problema in generale risolviamo il precedente sistema parametrico, escludendo il caso già

trattato m = 0. $\begin{cases} x^2-m\ge 0 \\ mx+1\ne 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<0 \\ \forall x\in\mathbb{R} \\ x\ne -\frac{1}{m}\end{cases} \vee \begin{cases} m>0 \\ x\le -\sqrt{m} \vee x\ge\sqrt{m} \\ x\ne -\frac{1}{m}\end{cases}$. Il primo caso si risolve immediatamente: $\begin{cases} m<0 \\ x\ne -\frac{1}{m}\end{cases}$. Più laborioso è il secondo. Infatti dobbiamo distinguere due sottocasi.

$$\begin{cases} m>0 \\ x\le -\sqrt{m} \vee x\ge\sqrt{m} \\ x\ne -\frac{1}{m}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ge 1 \\ x\le -\sqrt{m} \vee x\ge\sqrt{m} \\ x\ne -\frac{1}{m}\end{cases} \vee \begin{cases} 0<m<1 \\ x\le -\sqrt{m} \vee x\ge\sqrt{m} \\ x\ne -\frac{1}{m}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ge 1 \\ x\le -\sqrt{m} \vee x\ge\sqrt{m}\end{cases} \vee \begin{cases} 0<m<1 \\ x\le -\sqrt{m} \vee x\ge\sqrt{m} \wedge x\ne -\frac{1}{m}\end{cases}$$

Quindi il problema iniziale avrebbe soluzione solo se volessimo un dominio del tipo $\mathbb{R}\setminus\{a\}$, con a numero reale positivo, ma non lo avrebbe con a numero reale non positivo. Per esempio per a = 3, basterebbe prendere m = –1/3. Infatti il dominio della funzione $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}x+1}$ è $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Avremmo soluzioni anche se volessimo un dominio del tipo (–∞; –a] ∪ [a; +∞), con a ≥ 1, oppure del tipo (–∞; –1/a^2) ∪ (–1/a^2; –a] ∪ [a; +∞), con 0 < a < 1.

Per esempio per a = 4, prendiamo m = 16 e abbiamo $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2-16}}{16x+1}$, il cui dominio è [–4; 4].

Mentre per a = 2/3, prendiamo m = 4/9 e abbiamo $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2-\frac{4}{9}}}{\frac{4}{9}x+1}$, il cui dominio è

(–∞; –9/4) ∪ (–9/4; –2/3] ∪ [2/3; +∞)

Determinare i valori del parametro reale *m*, in modo che il dominio delle seguenti funzioni sia l'insieme dei numeri reali

Livello 2

62. $\dfrac{4x^2-3x}{7mx^2-3x+1}$ [m > 9/28] $\sqrt[4]{mx^2+x+m}$ [m > ½] $ln(mx^2+2)$ [m > 0]

63. $\dfrac{3x^2-2x}{mx^2-mx+1}$ [0 < m < 4] $log_{m+1}(mx^2-3x+2)$ [m > 9/8] $\sqrt[6]{mx^2-1}$ [∅]

Determinare i valori del parametro reale m, in modo che il dominio delle seguenti funzioni sia quello indicato accanto

Livello 3

64. $\dfrac{x^2-1}{3mx-1}$; ℝ\{½} [m = 2/3] $\dfrac{1}{x^2-mx+2}$; ℝ\{–1, 3} [∅] $\dfrac{1}{6x^2+mx-3}$; ℝ\{–3/2; 1/3} [m = 7]

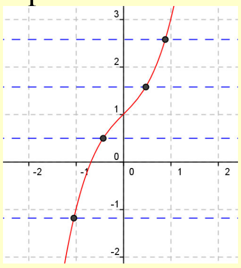
65. $\sqrt{4mx-1}$; [2/3; +∞) [m = 3/8] $ln(3-4mx)$; (–∞; –1) [∅] $ln(3-4mx)$; (–1; +∞) [m = –3/4]

Iniettività e suriettività di una funzione. Funzioni invertibili

Abbiamo detto che una funzione è una legge che a ogni valore del dominio associa un solo valore del codominio. Vi sono però funzioni per cui vale anche il viceversa, cioè a ogni valore del codominio è associato un valore del dominio.

Esempio 20

Ogni retta non parallela all'asse delle ordinate verifica quanto detto. In generale ogni funzione che, come quella in figura, è tale che ogni retta parallela all'asse delle ordinate incontra il grafico al massimo in un punto, verifica quanto detto.



Diamo un nome a questo tipo di funzioni

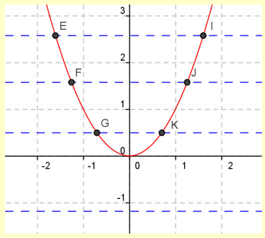
Definizione 12

Una funzione f, si dice **iniettiva** se ogni elemento di $cod(f)$ è corrispondente di un solo elemento di $dom(f)$.

Il dominio di una funzione serve a stabilire quali valori hanno corrispondente. Il codominio è l'immagine del dominio, cioè l'insieme dei corrispondenti. Se definiamo una funzione su un generico insieme, ovviamente non è detto che tale insieme corrisponda con il codominio.

Esempio 21

Se consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$, il suo codominio è l'insieme dei reali non negativi, non tutti i reali. In figura vediamo che ci sono ordinate che non hanno corrispondenti ascisse. Per inciso notiamo che la funzione non è iniettiva, essendoci ordinate che corrispondono alla stessa ascissa.



Anche in questo caso poniamo una definizione.

Definizione 13

Una funzione $f : A \to B$, si dice **suriettiva** se $cod(f) = B$.

Ovviamente vi sono anche funzioni che sono contemporaneamente iniettive e suriettive.

Definizione 14

Una funzione si dice **biiettiva** o anche una **corrispondenza biunivoca** se è sia iniettiva che suriettiva.

Che cosa significa

Iniettiva – Da iniettare, estensione del movimento della iniezione, mediante la quale operazione un fluido viene inserito in un determinato luogo.
Suriettiva – Anche detta su tutto, cioè la funzione agisce su tutto l'insieme di arrivo. Il suffisso *ettiva* viene

messo per "intonazione" con gli altri vocaboli.
Biiettiva – Nel senso di doppiamente (bis) iniettiva, quindi in un senso e nell'altro.

La particolarità di una funzione iniettiva consiste nel fatto che possiamo ricavare dall'ordinata la corrispondente ascissa, così come, in genere, da ogni ascissa ricaviamo l'eventuale ordinata. Possiamo cioè scambiare fra loro la variabile dipendente e quella indipendente.

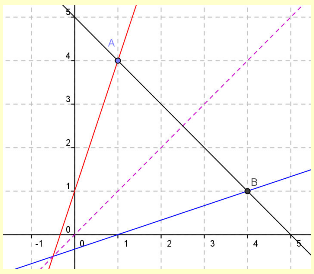
Definizione 15

Data una funzione iniettiva *f*, diciamo sua funzione **inversa** la funzione la cui legge associa a tutti gli elementi di *cod*(*f*) gli elementi di *dom*(*f*) di cui essi sono corrispondenti. L'inversa di *f* si indica con f^{-1}.

È evidente che nell'inversione di una funzione si scambiano dominio e codominio fra di loro.

Esempio 22

La funzione $f(x) = 3x + 1$, essendo una retta è ovviamente iniettiva e perciò invertibile. La sua inversa si ottiene ricavando *x*: $y = 3x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{3}$. In figura abbiamo le due rette, in rosso la *f* e in blu la f^{-1}



Osserviamo altresì che l'inversa di una funzione iniettiva si può trovare anche come simmetrica della data funzione rispetto alla retta $y = x$, poiché tale simmetria serve appunto a scambiare fra loro ascisse e ordinate.

Dato che una funzione è iniettiva se ad ascisse diverse corrispondono ordinate diverse, sono certamente iniettive le seguenti funzioni.

Definizione 16

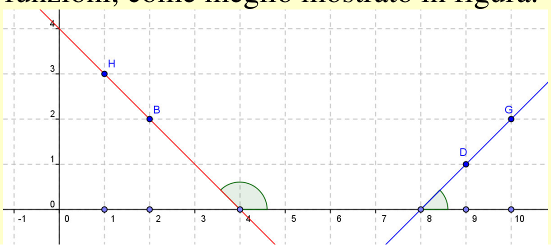
Una funzione per la quale comunque si considerano $x_1, x_2 \in X \cap dom(f)$, si ha

- $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, si dice **crescente in $X \cap dom(f)$**.
- $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, si dice **decrescente in $X \cap dom(f)$**.

In generale le funzioni precedenti vanno sotto il nome di funzioni **strettamente monotòne**.

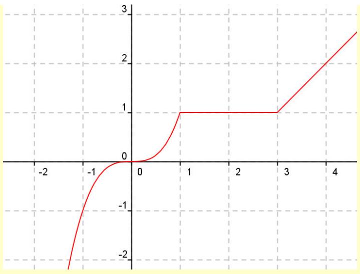
Esempio 23

Ogni retta non parallela agli assi coordinati è una funzione crescente se il suo coefficiente angolare è un numero positivo, decrescente se è un numero negativo. Infatti nel primo caso l'angolo da essa formato con il semiasse positivo delle ascisse è acuto, nel secondo ottuso. E tali fatti implicano appunto la crescenza, rispettivamente decrescenza, delle funzioni, come meglio mostrato in figura.



Ci sono funzioni che pur non decrescendo, non sempre crescono.

Esempio 24

La funzione in figura  è crescente in (–∞; 1], è costante in [1; 3] e di nuovo crescente in (3; +∞).

Distinguiamo le funzioni come la precedente dalle funzioni strettamente monotòne.

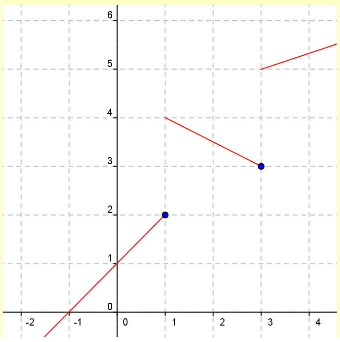
Definizione 17

Una funzione per la quale comunque si considerano $x_1, x_2 \in X \cap dom(f)$, si ha
$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, si dice **non decrescente in $X \cap dom(f)$**.
$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, si dice **non crescente in $X \cap dom(f)$**.
In generale le funzioni precedenti vanno sotto il nome di funzioni **debolmente monotòne**.

Ovviamente ogni funzione strettamente monotòna è iniettiva, ma non è sempre vero il viceversa. Cioè la stretta monotonia è condizione sufficiente ma non necessaria per la iniettività.

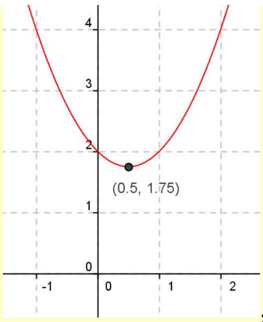
Esempio 25

La funzione in figura non è strettamene monotòna nel suo dominio, eppure è iniettiva.



In generale un funzione "regolare" (dove con questo nome indichiamo una funzione rappresentabile, cioè non una funzione alla Dirichlet), se non è monotòna è comunque formata dall'unione di funzioni monotòne.

Esempio 26

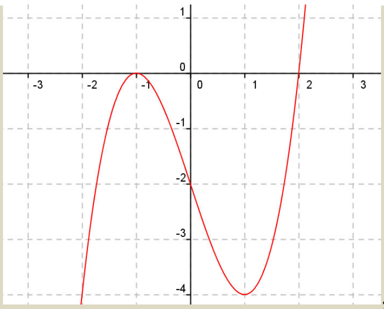
La funzione in figura non è monotòna nel suo dominio 

, ma si può considerare formata unendo una funzione strettamente decrescente in (–∞; ½) e una strettamente crescente in [½; +∞).

Negli esercizi forniremo esempi di funzioni formate dall'unione solo di funzioni crescenti o solo decrescenti, che però nel loro dominio non sono monotòne.

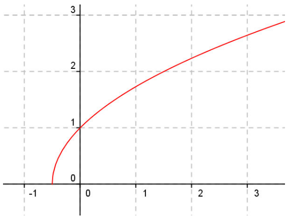
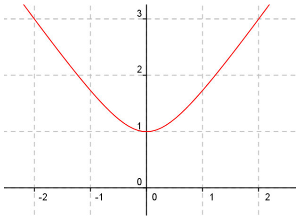
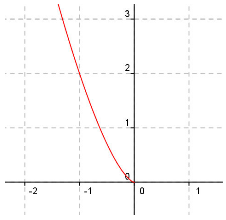
Verifiche

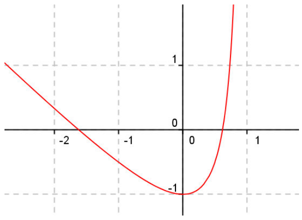
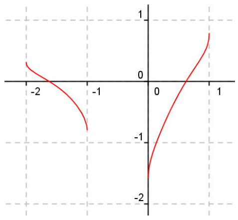
Lavoriamo insieme

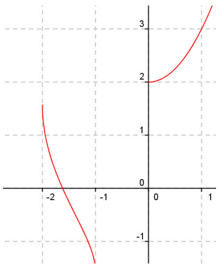
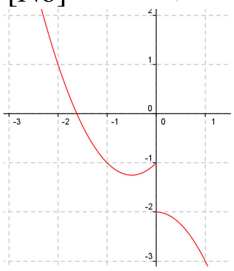
Considerando il grafico seguente , possiamo dire che la funzione non è iniettiva, poiché per esempio, l'equazione $f(x) = -2$ ha ben 3 soluzioni.

Tenuto conto del grafico, stabilire se le seguenti funzioni sono iniettive nel loro insieme di esistenza

Livello 1

1.  [Sì]  [No]  [Sì]

2.  [Sì]  [No]  [No]

3.  [Sì]  [No]

Lavoriamo insieme

Data la funzione $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+3}$, vogliamo stabilire se è iniettiva. Consideriamo due generiche ascisse e supponiamo che abbiano la stessa ordinata, se la funzione è iniettiva ciò non è possibile, ossia dobbiamo dimostrare che $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Nel nostro caso abbiamo $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{3x_1-1}{2x_1+3}=\dfrac{3x_2-1}{2x_2+3}$.

Ovviamente ciascuna delle ascisse scelte appartiene a $dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{-3/2\}$. Si ha quindi:

$$(3x_1 - 1)(2x_2 + 3) = (3x_2 - 1)(2x_1 + 3) \Rightarrow 6x_1x_2 + 9x_1 - 2x_2 - 3 = 6x_1x_2 + 9x_2 - 2x_1 - 3 \Rightarrow$$
$$9x_1 + 2x_1 = 9x_2 + 2x_2 \Rightarrow 11x_1 = 11x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

quindi se le ordinate sono uguali anche le ascisse lo sono, pertanto la funzione è iniettiva.

Stabilire se le seguenti funzioni sono iniettive nel loro insieme di esistenza:

Livello 2

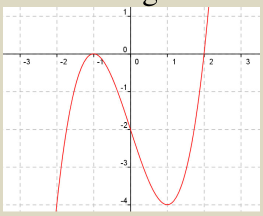
4. $f(x)=\dfrac{24x+5}{17x-9}$ [sì] $f(x) = 5x - 1$ [sì] $f(x) = x^2 - 1$ [no] $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ [no] $f(x) = e^{2x-1}$ [sì]

5. $f(x)=\dfrac{4x-1}{11x+3}$ [sì] $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ [no] $f(x) = x^3$ [sì] $f(x) = 2x^2 - x + 1$ [no] $f(x) = sin^{-1}(x + 3)$ [sì]

6. $f(x)=\sqrt{x^3+1}$ [sì] $f(x) = |x|$ [no] $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$ [no] $f(x)=\dfrac{|x+1|}{x-1}$ [no] $f(x) = ln(x^2 + 2)$ [no]

Lavoriamo insieme

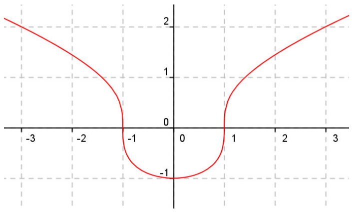
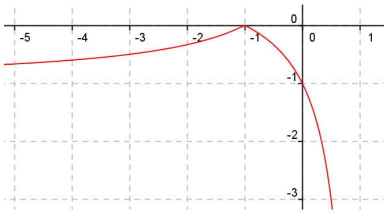
Riprendiamo in considerazione il grafico che avevamo già visto non rappresentare una funzione iniettiva

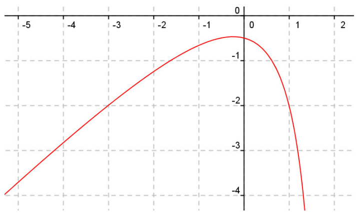
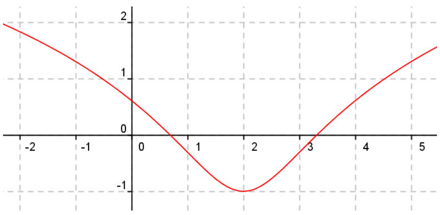


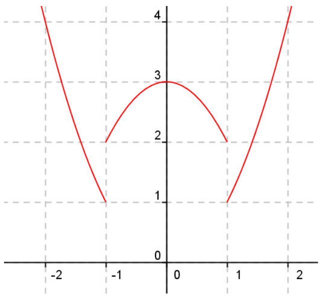
osserviamo però che possiamo considerare infinite restrizioni della funzione che risultano iniettive, per esempio se restringiamo a (–∞;–1] oppure a [–1; 1] o anche a [1; +∞) e ad altri infiniti domini.

Determinare una restrizione delle seguenti funzioni affinché esse risultino iniettive, ovviamente le risposte possono essere infinite, noi proponiamo quelle più "ampie"

Livello 2

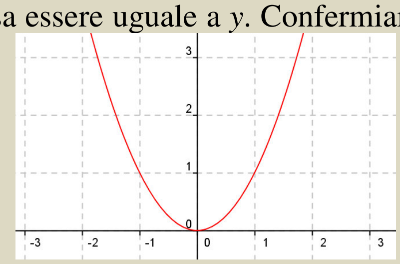
7.  [$\mathbb{R}^+_0 \vee \mathbb{R}^-_0$]  [(–∞; –1] ∨ [–1; +∞]]

8.  [$\mathbb{R}^+_0 \vee \mathbb{R}^-_0$]  [(–∞; 2] ∨ [2; +∞]]

9.  [(–∞; –1] ∨ [–1; 0] ∨ [0; 1] ∨ [–1;+∞)]

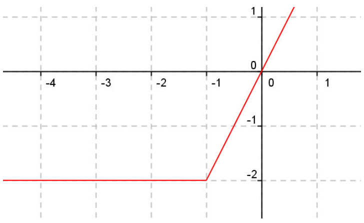
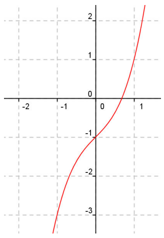
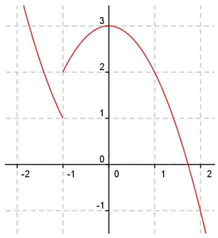
Lavoriamo insieme

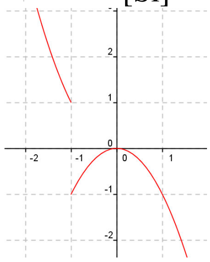
La funzione $f(x) = x^2$ non è iniettiva, poiché per esempio $f(1) = f(-1)$. Vogliamo stabilire se è suriettiva su tutti i reali, ossia se l'equazione $y = x^2$ ammette soluzioni nell'incognita x per qualsiasi scelta di y nell'insieme dei numeri reali. Ovviamente ciò non succede, perché se scegliamo $y < 0$, non esiste alcun x il cui quadrato possa essere uguale a y. Confermiamo il tutto con il grafico, che è quello ben noto di una parabola.



Stabilire se le seguenti funzioni sono suriettive su tutti i reali

Livello 1

10.  [No]  [Sì]  [Sì]

11.  [No]  [No]

Livello 2

12. $f(x)=\dfrac{x+5}{x-1}$ [no] $f(x) = 2 - 3x$ [sì] $f(x) = -x^2 - 1$ [no] $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ [no]

13. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}$ [no] $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{3x-2}$ [no] $f(x) = x^3 + x - 1$ [sì] $f(x) = x^2 - 5x + 6$ [no]

14. $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ [no] $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ [no] $f(x) = |x| - |2x + 1|$ [no] $f(x) = (x^3 + 1)^2$ [sì]

15. $f(x) = ln(3x +1)$ [sì] $f(x)=e^{x^2-1}$ [no] $f(x) = tan(4x - 1)$ [sì]

Lavoriamo insieme

Abbiamo già visto che la funzione $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+3}$ è iniettiva, pertanto è invertibile, vogliamo determinare la sua funzione inversa. Basta risolvere l'equazione $y=\dfrac{3x-1}{2x+3}$ nell'incognita x.

$$y\cdot(2x+3)=3x-1\Rightarrow(2y-3)\cdot x=-1-3y\Rightarrow x=\frac{1+3y}{3-2y}$$

Abbiamo $dom(f)=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\},cod(f)=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$. Quindi $dom\left(f^{-1}\right)=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\},cod\left(f^{-1}\right)=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

Dopo avere verificato che le seguenti funzioni sono iniettive, determinare le funzioni inverse nel loro insieme di esistenza.

Livello 2

16. $f(x)=\dfrac{7x+2}{15x-1}$ $\left[f^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{15x-7}\right]$ $f(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{4}{3}$ $\left[f^{-1}(x)=2x+\dfrac{8}{3}\right]$ $f(x)=log_3\left(\sqrt{x}\right)$ $[f^{-1}(x) = 3^{2x}]$

17. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ $\left[f^{-1}(x)=\dfrac{x^2+1}{1-x^2},x>0\right]$ $f(x)=\sqrt{x-1}$ $[f^{-1}(x) = x^2 + 1, x > 0]$

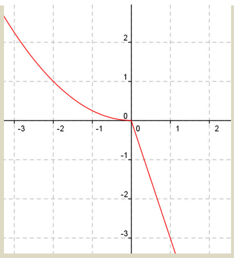
18. $f(x) = x^3 + 1$ $\left[f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}\right]$ $f(x) = e^{1-x}$ $[f^{-1}(x) = 1 - ln(x)]$ $f(x) = ln(x + 1)$ $[f^{-1}(x) = e^x - 1]$

19. $f(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$ $\left[f^{-1}(x)=\dfrac{ln(x)+1}{ln(x)-1}\right]$ $f(x)=\dfrac{8x+4}{-7x+1}$ $\left[f^{-1}(x)=\dfrac{x-4}{7x+8}\right]$

Livello 3

20. La somma di due funzioni iniettive è una funzione iniettiva? Giustificare la risposta. [No]
21. Una funzione lineare del tipo $y=ax+b,a\neq 0$ è iniettiva. La somma di due funzioni lineari è sempre iniettiva? Giustificare la risposta. [No]

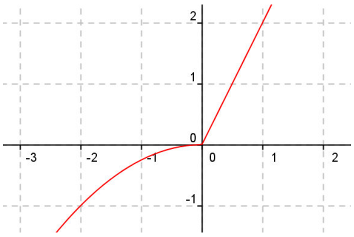
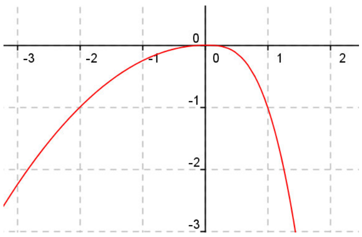
Lavoriamo insieme

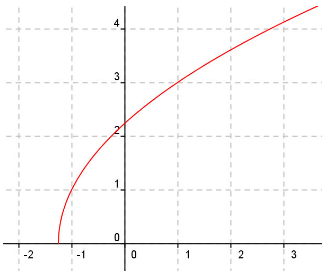
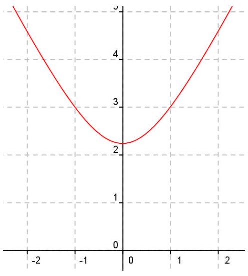
La funzione rappresentata nel grafico seguente è strettamente decrescente 

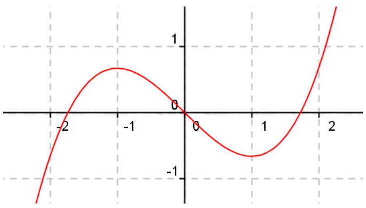
invece la seguente è non crescente , perché in $[-2; 0]$ è costante.

Tenuto conto del grafico determinare in quali intervalli sono crescenti, in quali costanti e in quali decrescenti.

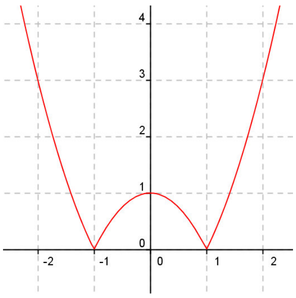
Livello 1

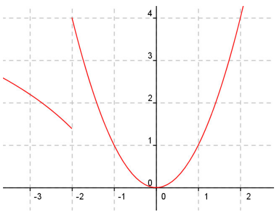
22.  [Str. Cr.]  [Cr.: $x \leq 0$, Decr.: $x > 0$]

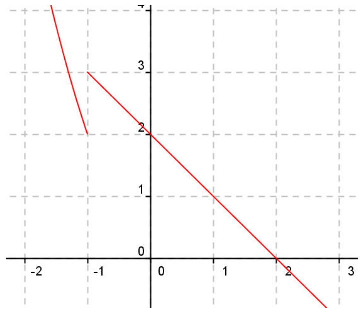
23.  [Str. Cr.]  [Decr.: $x \leq 0$, Cr.: $x > 0$]

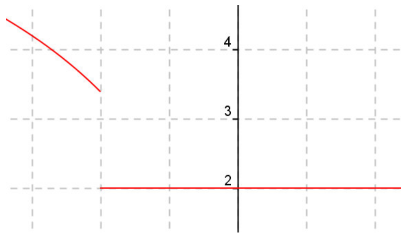
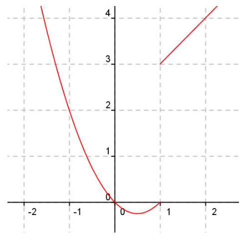
24.  [Decrescente: $-1 \leq x \leq 1$, Crescente: $x < -1 \vee x > 1$]

Livello 2

25.  [Decrescente: $x \leq -1 \vee 0 \leq x \leq 1$, Crescente: $-1 < x < 0 \vee x > 1$]

26.  [Decr.: $x \leq -2 \vee -2 < x < 0$; Cr.: $x \geq 0$]

27.  [Decrescente: $x \leq -1$ e $x > -1$, ma non monotona per ogni x]

28.  [Non Cr.]  [Cr.: $x \geq ½$, Decr.: $x < ½$]

Lavoriamo insieme

Come facciamo a stabilire se la funzione $f(x) = x^3$ è crescente nel suo dominio? Dobbiamo dimostrare che $x_1 > x_2 \Rightarrow x_1^3 > x_2^3$. Ma ciò è ovvio perché innalzando a una potenza dispari non variamo il segno, pertanto se moltiplichiamo fra loro numeri più piccoli otteniamo più piccoli.
Ciò non vale invece per $f(x) = x^2$, infatti non è detto che $x_1 > x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2$, dato che innalzando a una potenza pari si ottengono sempre numeri positivi. Pertanto l'implicazione è vera se le ascisse sono positive, per esempio $3 > 2 \Rightarrow 9 > 4$; non sempre è vero invece se una almeno delle ascisse è negativa.
Per esempio da $2 > -3$ segue la scritta falsa $4 > 9$.

Verificare se le seguenti funzioni sono monotòne nel loro dominio

Livello 2

29. $f(x) = 4x + 1$ [Cr.] $f(x) = 2 - 3x$ [Decr.] $f(x) = 1/x,\ x > 0$ [Decr.] $f(x) = 1/x,\ x < 0$ [Decr.]

30. $f(x) = \sqrt{x}$ [Cr.] $f(x) = \sqrt[3]{-x}$ [Decr.] $f(x) = |4x + 1|$ [No mon.] $f(x) = |2x| - |3x|$ [No mon.]

31. $f(x) = 2^{x+1}$ [Cr.] $f(x) = 3^{2-x}$ [Decr.] $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$ [No mon.] $f(x) = \lceil x \rceil + \lfloor x \rfloor$ [Cr.]

Livello 3

32. $f(x) = \begin{cases} x+1 & x<1 \\ 3x+2 & x \geq 1 \end{cases}$ [Cr.] $f(x) = \begin{cases} 3-x & x<2 \\ 2-3x & x>3 \end{cases}$ [Decr.] $f(x) = \begin{cases} -3x+1 & x<0 \\ x-2 & x \geq 0 \end{cases}$ [No mon.]

33. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x<0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$ [No mon.] $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x<0 \\ x+2 & x \geq 0 \end{cases}$ [Cr.] $f(x) = \begin{cases} \ln(x) & x<1 \\ 2-3x & x \geq 1 \end{cases} \pi$ [No mon.]

34. $f(x) = \begin{cases} x & x<1 \\ \ln(x)+1 & x \geq 1 \end{cases}$ [Crescente] $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & x<2 \\ 3^{-x} & x \geq 2 \end{cases}$ [Non monotona]

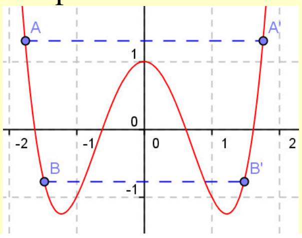
35. $f(x) = \begin{cases} 2^x & x<0 \\ 2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 3^x & x>1 \end{cases}$ [Non Decr.] $f(x) = \begin{cases} 3^{-x} & x<0 \\ -2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2^{-x} & x>1 \end{cases}$ [No mon.]

Particolari simmetrie delle funzioni

Alcune funzioni hanno delle proprietà che rendono più semplice anche la loro rappresentazione grafica.

Esempio 27

La funzione $y = x^4 - 3x^2 + 1$, contenendo solo potenze pari della variabile indipendente, ovviamente non può essere iniettiva, poiché assegnando a tale variabile valori opposti, come per esempio 1 e –1, si ottengono sempre le stesse ordinate. Ciò significa che se tracciamo la funzione per $x > 0$ sappiamo anche tracciarla per $x < 0$, basta effettuare la simmetria rispetto all'asse delle ordinate. In figura vediamo la funzione tracciata con un software. Abbiamo anche tracciato due punti e i loro simmetrici rispetto all'asse delle ascisse.



Diamo un nome a funzioni come quella mostrata nell'esempio.

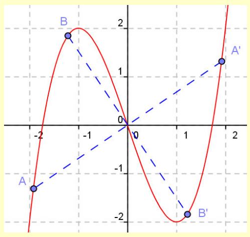
Definizione 18

Una funzione per la quale si ha $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in dom(f)$, si chiama **funzione pari**.

Una funzione pari è una funzione simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, si preferisce chiamare in tal modo poiché tutte le funzioni algebriche la cui espressione contiene solo potenze pari della x, godono di tale proprietà. Consideriamo adesso un altro tipo di simmetria.

Esempio 28

La funzione $y = x^3 - 3x$, contenendo solo potenze dispari della variabile indipendente, verifica una proprietà simile alle funzioni pari, infatti se assegniamo alla x due valori opposti, stavolta otterremo ordinate opposte. Ciò significa che se tracciamo la funzione per $x > 0$ sappiamo anche tracciarla per $x < 0$, basta effettuare la simmetria rispetto all'origine. In figura vediamo la funzione tracciata con un software. Abbiamo anche tracciato due punti e i loro simmetrici rispetto all'origine.



Diamo un nome anche alle precedenti funzioni.

Definizione 19

Una funzione per la quale si ha $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in dom(f)$, si chiama **funzione dispari**.

Una funzione pari è una funzione simmetrica rispetto all'origine, anche in questo caso usiamo l'aggettivo dispari, poiché tutte le funzioni algebriche la cui espressione contiene solo potenze dispari della x, godono di tale proprietà. Si stia attenti che le funzioni dispari non devono contenere il termine noto, poiché esso altri non è che il coefficiente di x^0 e 0 non è un numero dispari.
Ovviamente la simmetria pari o dispari ha senso solo per domini essi stessi simmetrici.

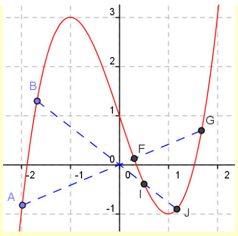
Esempio 29

Una funzione per cui si ha $dom(f) = [-2; 3]$ ovviamente non può essere né pari e né dispari, dato che esiste $f(x)$ in $(2; 3]$, ma non esiste $f(x)$ in $[-3; -2)$, pertanto non ha senso calcolare $f(-x)$ per $2 < x \leq 3$.

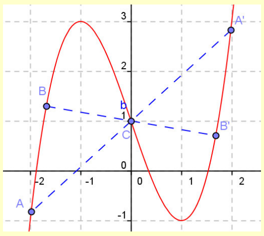
Consideriamo un altro tipo di simmetria.

Esempio 30

In figura abbiamo la funzione $y = x^3 - 3x + 1$ e notiamo che non ha più una simmetria rispetto all'origine.



In effetti non è difficile notare che la funzione precedente ha una simmetria rispetto al



punto (1; 0).

Tenuto conto dell'esempio precedente vogliamo capire come si può stabilire l'eventuale simmetria di una funzione rispetto a un punto. Noi sappiamo che le leggi della simmetria rispetto a un centro $C \equiv (a; b)$ sono $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$, quindi vuol dire che la simmetrica della funzione $y = f(x)$ rispetto a C, ha equazione $2b - y = f(2a - x) \Rightarrow y = 2b - f(2a - x)$. Pertanto possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 3

La funzione $y = f(x)$ è simmetrica rispetto a $C \equiv (a; b)$ se e solo se: $f(x) + f(2a - x) = 2b$.

Ovviamente la simmetria precedente ha senso solo se $dom(f) = \mathbb{R}$, oppure a è centro di simmetria di $dom(f)$, anche se $a \notin dom(f)$.

Esempio 31

- Una funzione per la quale si ha: $dom(f) = [1; 3)$ non può avere alcuna simmetria centrale, poiché $\exists f(1)$ e $\nexists f(3)$.
- Una funzione per la quale si ha: $dom(f) = [1; 3]$ può avere simmetria centrale solo rispetto a $C \equiv (2; f(2))$.
- Una funzione per la quale si ha: $dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ può avere simmetria centrale solo rispetto a un punto dell'asse y, anche se non è definita per $x = 0$.
- Adesso verifichiamo il precedente teorema sulla funzione dell'esempio 3, che abbiamo visto essere simmetrica rispetto a $C \equiv (0; 1)$. E in effetti si ha: $x^3 - 3x + 1 + [(-x)^3 - 3(-x) + 1] = 2$. Se non avessimo saputo che la funzione era simmetrica rispetto a C, come avremmo potuto stabilirlo? Applicando la legge a un generico punto $C \equiv (a; b)$. $x^3 - 3x + 1 + [(2a - x)^3 - 3(2a - x) + 1] = 2b \Rightarrow x^3 - 3x + 1 + 8a^3 - x^3 - 12a^2x + 6ax^2 - 6a + 3x + 1 = 2b \Rightarrow -12a^2x + 6ax^2 + 8a^3 - 6a + 2 = 2b$. Poiché a sinistra abbiamo un polinomio e a destra un numero, vuol dire che i coefficienti del polinomio di grado superiore a 0, devono essere tutti nulli, cioè deve essere $a = 0$, quindi rimane solamente $2 = 2b$, da cui $b = 1$. Abbiamo così determinato il centro della simmetria.

Il precedente teorema ci suggerisce di trovare anche la proprietà che verificano le funzioni simmetriche rispetto a rette parallele all'asse delle ordinate.

Teorema 4

La funzione $y = f(x)$ è simmetrica rispetto alla retta $x = a$, se e solo se: $f(x) = f(2a - x)$.

Dimostrazione

Le leggi della simmetria rispetto alla retta $x = a$ sono $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$, quindi vuol dire che la simmetrica della funzione $y = f(x)$ rispetto alla retta $y = a$, ha equazione $y = f(2a - x)$.

Anche in questo caso la simmetria precedente ha senso solo se $dom(f) = \mathbb{R}$, oppure a è centro di simmetria di $dom(f)$, anche se $a \notin dom(f)$.

Esempio 32

- Una funzione per la quale si ha: $dom(f) = [-5; 7]$ può avere simmetria di asse parallelo all'asse y, solo rispetto alla retta $x = 1$.
- La funzione $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, pur non essendo definita per $x = 1$, è simmetrica rispetto a $x = 1$, infatti si ha: $f(2-x) = \frac{1}{(2-x-1)^2} = \frac{1}{(-x+1)^2} = f(x)$
- Vediamo se la funzione $f(x) = x^2 - 4x + 4$. Ha simmetrie rispetto a rette di equazione $x = a$. $f(2a - x) = (2a - x)^2 - 4 \cdot (2a - x) + 4 = 4a^2 - 4ax + x^2 - 8a + 4x + 4 = x^2 - 4 \cdot (a - 1) \cdot x + 4a^2 - 8a + 4$; deve perciò aversi $f(x) = f(2a - x) \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 - 4 \cdot (a - 1) \cdot x + 4a^2 - 8a + 4$. Uguagliando i coefficienti delle incognite di uguale grado si ha: $\begin{cases} 1 = a - 1 \\ 4a^2 - 8a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 0 \vee a = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 2$, quindi la data funzione è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = 2$.

Un'altra interessante simmetria si ha rispetto alla prima o alla seconda bisettrice ed ha ovviamente senso solo per funzioni invertibili e definite in intervalli simmetrici.

Teorema 5

La funzione invertibile $y = f(x)$ è simmetrica rispetto alla retta $x = y$, se e solo se: $f(x) = f^{-1}(x)$, $\forall\, x \in dom(f)$.

Dimostrazione

Le leggi della simmetria rispetto alla retta $x = y$ sono $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$, quindi vuol dire che la simmetrica della funzione $y = f(x)$ rispetto alla retta $x = y$, ha equazione $x = f(y) \Rightarrow y = f^{-1}(x)$.

Teorema 6

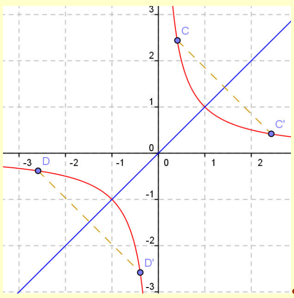
La funzione invertibile $y = f(x)$ è simmetrica rispetto alla retta $x = -y$, se e solo se: $f(x) = -f^{-1}(x)$, $\forall\, x \in dom(f)$.

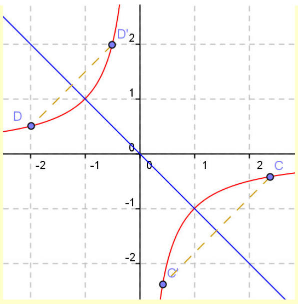
Dimostrazione

Le leggi della simmetria rispetto alla retta $x = y$ sono $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$, quindi vuol dire che la simmetrica della funzione $y = f(x)$ rispetto a $x = y$, ha equazione $-x = f(-y) \Rightarrow -y = f^{-1}(-x) \Rightarrow y = -f^{-1}(-x)$.

Esempio 33

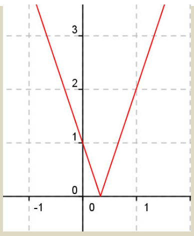
La funzione $y = 1/x$ è ovviamente invertibile in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ed è inversa di se stessa, quindi è simmetrica rispetto alla prima bisettrice, come mostrato in figura.



Ma è simmetrica anche rispetto alla seconda bisettrice, poiché si ha: : $f(x) + f^{-1}(x) = 1/x - 1/x = 0$, si veda sempre la figura. 

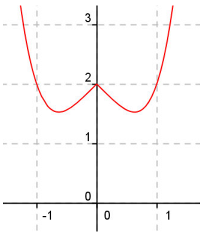
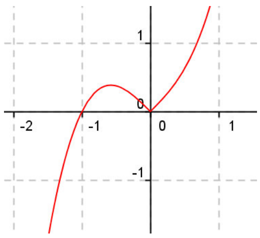
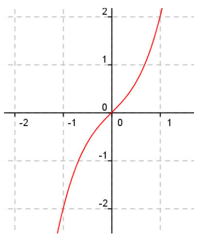
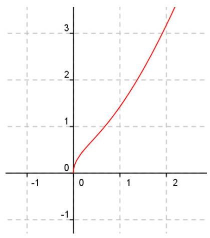
Verifiche

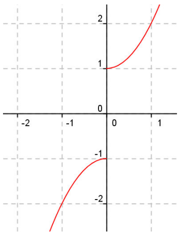
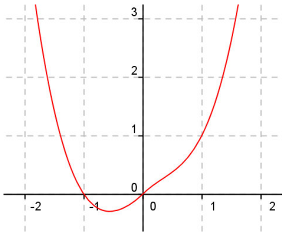
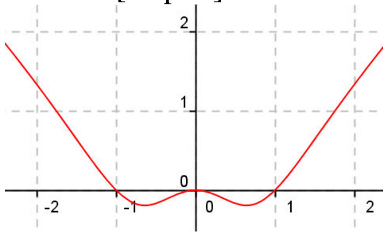
Lavoriamo insieme

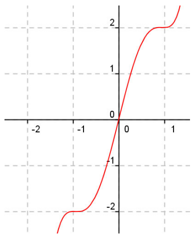
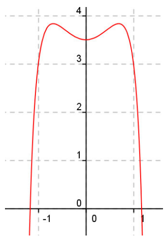
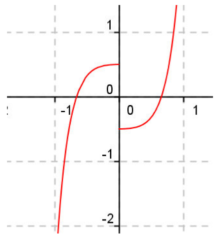
Il seguente grafico  non rappresenta né una funzione pari, né una dispari, poiché non si notano simmetrie né rispetto all'asse *y*, né rispetto all'origine.

Tenuto conto dei grafici, determinare se essi rappresentano funzioni pari o dispari, la mancanza di risposta indica che le funzione non è né pari e né dispari

***Livello* 1**

1.  [pari]   [dispari] 

2.  [dispari]   [pari]

3.  [dispari]  [pari]  [dispari]

Lavoriamo insieme

Vogliamo stabilire se la funzione $f\left(x\right)=\dfrac{x^4-3x^2}{\left|x+1\right|}$ è pari o dispari.

Calcoliamo $f\left(-x\right)=\dfrac{\left(-x\right)^4-3\left(-x\right)^2}{\left|\left(-x\right)+1\right|}=\dfrac{x^4-3x^2}{\left|-x+1\right|}\neq\pm f\left(x\right)$, quindi la funzione non è né pari e né dispari.

Determinare se le seguenti funzioni sono pari o dispari

Livello 1

4. $f(x) = 3x^2 + |x + 2|$ [ ] $f(x)=\sqrt{2x^4-x^2+1}$ [pari] $f(x) = |3x^2 - 1| + |x^2 - 1|$ [ ]

5. $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x}$ [dispari] $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x^4-3}$ [pari] $f(x)=\dfrac{x^3+x}{2}$ [dispari]

6. $f(x) = sin(2x + 1)$ [ ] $f(x) = ln(x^2 + 1)$ [pari] $f(x) = |cos(3|x - 2)|$ [ ]

Livello 2

7. $f(x)=e^{x^2-x+1}$ [ ] $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x^4-x^2-2}$ [pari] $f(x)=\dfrac{|x^3+1|-|x+1|}{x}$ [ ]

8. $f(x) = sin(x^2)$ [pari] $f(x) = sin^{-1}(x^3)$ [dispari] $f(x) = sin^{-1}(x^2)$ [pari]

Lavoriamo insieme

Vogliamo stabilire se esistono h e k per i quali la funzione $f(x)=(5k-2)\cdot\dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{x}+(3h-1)\cdot x^4-x^3$ risulta dispari. Deve aversi

$$f(x)+f(-x)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (5k-2)\cdot\frac{\sqrt[5]{x^2}}{x}+(3h-1)\cdot x^4-x^3+(5k-2)\cdot\frac{\sqrt[5]{(-x)^2}}{-x}+(3h-1)\cdot(-x)^4-(-x)^3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{(5k-2)\cdot\frac{\sqrt[5]{x^2}}{x}}+(3h-1)\cdot x^4-\cancel{x^3}-\cancel{(5k-2)\cdot\frac{\sqrt[5]{x^2}}{x}}+(3h-1)\cdot x^4+\cancel{x^3}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot(3h-1)\cdot x^4=0\Rightarrow 3h-1=0\Rightarrow h=\frac{1}{3}$$

Quindi la funzione è dispari per qualsiasi k e per $h=\dfrac{1}{3}$. La funzione in questo caso è

$$f(x)=(5k-2)\cdot\frac{\sqrt[5]{x^2}}{x}-x^3$$

Determinare, se esistono, i valori reali da assegnare ai parametri affinché le date funzioni abbiano la simmetria richiesta.

Livello 2

9. $f(x) = 3ax^3 - 2x + a - 1$, dispari [$a = 1$] $f(x) = (2a + 1)x^3 - 2x^2 + 3$, pari [$a = -½$]

10. $f(x) = (a - 1)x^4 + x^3 - x + 2$, dispari [∅] $f(x) = (a - 1)x^4 + x^3 - x + 2$, pari [∅]

11. $f(x) = 2x^5 - |2a + 1| \cdot x^2 + 1$, pari [∅] $f(x) = |4a - 1|x^3 - x^2 + |x| - 1$, pari [$a = ¼$]

12. $f(x)=\dfrac{e^{ax}+1}{e^{2x}-1}$, pari [∅] $f(x)=\dfrac{e^{ax}+1}{e^{x^2}-1}$, pari [$a = 0$]

Livello 3

13. $f(x) = (a^2 - 1) \cdot x^6 - x^3 + x - b + 2$, dispari [$a = \pm 1, b = 2$]

14. $f(x) = (2a + b) \cdot x^3 - x^2 + (a - b) \cdot x + 1$, pari [$a = b = 0$]

15. $f(x)=3x^4-(2h-1)\cdot x^3+(k-2)\cdot\dfrac{\sqrt[5]{x^3}}{x}$, dispari [∅]

16. $f(x)=3x^4-(2h-1)\cdot x^3+(k-2)\cdot\dfrac{\sqrt[5]{x^3}}{x}$, pari [$h = ½, \forall k\in\mathbb{R}$]

17. $f(x)=\dfrac{(k-2)\cdot x}{x^2+1}+2h-cos\left[(h+k)x\right]$, pari [$k = 2, \forall h\in\mathbb{R}$]

18. $f(x)=\dfrac{(a-b)x^4+(2a-b)\cdot x^3-a}{(a+b)\cdot x-2b+1}$, dispari [∅] $f(x)=\dfrac{(a-b)x^4+(2a-b)\cdot x^3-a}{(a+b)\cdot x-2b+1}$, pari [$b = 2a$]

19. Spiegare perché una funzione definita in [–2; 3] non può essere né pari, né dispari. [Perché per esempio $f(3)$ esiste e $f(-3)$ no]
20. Spiegare perché una funzione il cui codominio è $[0; +\infty)$ oppure $(-\infty; 0]$ non può essere dispari. [Perché sia $f(x)$ che $f(-x)$, se esistono, sono sempre dello stesso segno]
21. Una funzione non definita solo per $x = 0$ può essere pari o dispari? Giustificare la risposta. [Sì]
22. Una funzione non definita solo per $x = 1$ può essere pari o dispari? Giustificare la risposta. [No]
23. Una funzione non definita solo per $x = \pm 1$ può essere pari o dispari? Giustificare la risposta. [Sì]

Livello 3

24. Dimostrare che la somma algebrica di due funzioni pari è una funzione pari.
25. Dimostrare che la somma algebrica di due funzioni dispari è una funzione dispari.
26. Se una funzione è dispari, il suo valore assoluto che tipo di funzione è? [Pari]
27. Affinché una funzione sia pari, la condizione che il suo dominio sia formato solo da numeri positivi, è necessaria o sufficiente? [Nessuna delle due]
28. Una funzione il cui codominio è formato solo da numeri positivi può essere dispari? [No]
29. Dimostrare che il prodotto di due funzioni pari è una funzione pari.
30. Dimostrare che il prodotto di due funzioni dispari è una funzione pari.
31. Dimostrare che il prodotto di una funzione pari e una funzione dispari è una funzione dispari.
32. La potenza ennesima di una funzione pari che tipo di funzione è? E quella di una funzione dispari? [Pari; pari per n pari e dispari per n dispari]
33. Fornire un esempio che dimostri che la seguente affermazione non è corretta: *Una funzione si dice pari se la sua espressione analitica è formata solo da monomi di grado pari.*
34. Una funzione razionale contenente monomi di grado pari e grado dispari può essere dispari? Giustificare la risposta. $\left[\text{Sì, p.e.} \frac{x^2+1}{x} \right]$

Lavoriamo insieme

La funzione $f(x) = x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 61$, non è simmetrica né rispetto all'asse delle y, né rispetto all'origine. Non è simmetrica nemmeno rispetto a una delle bisettrici, perché ovviamente non è invertibile.
Vediamo se è simmetrica rispetto un generico centro $C \equiv (a; b)$. Risolviamo $f(x) + f(2a - x) = 2b$, nelle incognite a e b.

$$x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 61 + (2a - x)^4 - 12 \cdot (2a - x)^3 + 52 \cdot (2a - x)^2 - 96 \cdot (2a - x) + 61 = 2b$$

Non effettuiamo tutti i calcoli, perché ci rendiamo conto immediatamente che si ottiene un polinomio di quarto grado, il cui coefficiente di grado 4 non dipende dai parametri, è $2x^4$, pertanto non può mai annullarsi. Quindi concludiamo che non vi sono simmetrie rispetto a nessun punto.
Vediamo invece se vi sono simmetrie rispetto a una retta parallela all'asse delle y. Stavolta deve essere
$f(x) = f(2a - x) \Rightarrow x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 61 = (2a - x)^4 - 12 \cdot (2a - x)^3 + 52 \cdot (2a - x)^2 - 96 \cdot (2a - x) + 61$
non riportiamo tutti i calcoli, ma solo la semplificazione finale

$$8 \cdot (a - 3) \cdot x^3 + 24 \cdot a \cdot (3 - a) \cdot x^2 + 16 \cdot (2a^3 - 9a^2 + 13a - 12) \cdot x - 16a^4 + 96a^3 - 208a^2 + 192a$$

in effetti anche questa volta non è necessario effettuare i calcoli, basta determinare il coefficiente del termine di terzo grado, vedere quando si annulla (in questo caso per $a = 3$) e poi verificare se tale valore annulla tutta l'espressione. In questo caso accade, pertanto possiamo dire che la data funzione è simmetrica rispetto alla retta $x = 3$.

Stabilire se le seguenti funzioni sono simmetriche rispetto a un centro generico o a una generica retta parallela all'asse y o a una delle due bisettrici dei quadranti. Giustificare la risposta. Nelle risposte il centro o l'equazione dell'asse di simmetria

Livello 2

35. $f(x) = x^3 + 7x^2 + 15x + 10$ [(–3;1)] $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 - 2x + 1}$ [$x = 1$] $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 8}{x - 2}$ [(2; –1)]
36. $f(x) = \frac{7x^2 - 28x + 31}{2x^2 - 8x + 9}$ [$x = 2$] $f(x) = ln(4x^2 + 24x + 37) - 2$ [$x = -3$] $f(x) = \frac{4x^2 + 9x + 7}{2x^2 + 4x + 3}$ [(–1; 2)]

37. $f(x) = 1/(2x)$ [(0 ; 0), $x = \pm y$] $f(x)=\dfrac{1}{x^2-8x+17}$ [$x = 4$] $f(x)=e^{x^2+4x+3}$ [$x = -2$]

Composizione di due o più funzioni

Concludiamo il discorso sulle funzioni considerando una particolare operazione definita su di esse.

Problema

Se abbiamo due funzioni *f* e *g*, possiamo ottenere da esse un'unica funzione che abbia il dominio di *f* e il codominio di *g*?

Consideriamo un problema simile. Supponiamo di volere arrivare da Bari a Canberra, in Australia. Poiché non vi è un volo diretto Bari – Canberra, dobbiamo effettuare almeno uno scalo. Quando sarà possibile? Quando vi sarà una località collegata direttamente sia a Bari che a Canberra.
Riportando il discorso alle funzioni, vediamo cosa accade.

Esempio 34

Supponiamo di avere le funzioni $f(x) = 2x - 1$, $g(x)=\sqrt{x}$. Facilmente si vede che

$$dom(f) = cod(f) = \mathbb{R},\ dom(g) = cod(g) = \mathbb{R}^+_0$$

consideriamo $2 \in dom(f)$, si ha $f(2) = 3$. Poiché $3 \in dom(g)$, possiamo calcolare $g(3)=\sqrt{3}$, pertanto possiamo dire che partendo da $2 \in dom(f)$, siamo arrivati a $\sqrt{3} \in cod(g)$. Potremmo scrivere più brevemente $g\left[f(2)\right]=\sqrt{3}$. Possiamo allora dire che abbiamo costruito la funzione che cercavamo, che avesse cioè il dominio di *f* e il codominio di *g*? No, perché quanto trovato non vale per ogni $x \in dom(f)$; infatti se fossimo partiti da $0 \in dom(f)$, avremmo avuto $f(0) = -1 \notin dom(g)$.

Tenuto conto dell'esempio precedente possiamo chiarire meglio il nostro problema.

Definizione 20

Date due funzioni reali di una variabile reale *f* e *g*, se accade che $cod(f) \subseteq dom(g)$, allora esiste una funzione, che chiamiamo **composizione** di *f* e *g* nell'ordine, e che indichiamo con $f \circ g$, il cui dominio coincide con quello di *f* e il cui codominio coincide con quello di *g*.

Esempio 35

Quindi date $f(x) = 2x - 1$, $g(x)=\sqrt{x}$, non possiamo effettuare $f \circ g$ perché $cod(f) \not\subset dom(g)$, invece possiamo effettuare $g \circ f$ perché $cod(g) = \mathbb{R}^+_0 \subset \mathbb{R} = dom(f)$. Per trovare la legge che definisce tale funzione composta basta applicare le leggi a un generico elemento *x*: $x \xrightarrow{g} \sqrt{x} \xrightarrow{f} 2\sqrt{x}-1$. Pertanto $g \circ f : \mathbb{R}^+_0 \to \mathbb{R}, g\left[f(x)\right]=2\cdot\sqrt{x}-1$.

Per quanto visto negli esempi possiamo affermare la composizione fra funzioni non è un'operazione commutativa.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo stabilire se possiamo comporre le funzioni $f\left(x\right)=\frac{4x-1}{x^2-1}, g\left(x\right)=\sqrt{2x-3}$, e in caso affermativo vogliamo determinare le leggi delle relative composizioni.

Abbiamo *dom*(*f*) = ℝ \ {±1}, *dom*(*g*) = [3/2; + ∞). Calcoliamo il codominio delle due funzioni.

$$y=\frac{4x-1}{x^2-1}\Rightarrow\left(x^2-1\right)\cdot y=4x-1\Rightarrow yx^2-4x-y+1=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+y^2-y}}{y}$$

Quindi deve essere $\begin{cases} y^2-y+4\ge 0 \\ y\ne 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\forall y\in\mathbb{R} \\ y\ne 0\end{cases}\Rightarrow y\ne 0$, la prima disequazione ha quel risultato perché il discriminante è negativo (1 – 16). Quindi *cod*(*f*) = ℝ \ {0}. Passiamo a quello di *g*; facilmente si ha: *cod*(*g*) = [0; +∞).

Possiamo allora dire che non possiamo comporre né *f* con *g* né *g* con *f*.

Se però effettuiamo delle restrizioni ciò può farsi. Cominciamo con *f*(*g*(*x*)), dobbiamo fare in modo che sia *cod*(*g*) ⊆ *dom*(*f*), cioè dobbiamo escludere il numero 1 da *cod*(*g*), per fare ciò ovviamente dobbiamo modificare *dom*(*g*). Deve essere $\sqrt{2x-3}\ne 1\Rightarrow 2x-3\ne 1\Rightarrow x\ne 2$, quindi considerando le funzioni *f* : ℝ \ {±1} → ℝ \ {0} e *g*: [3/2; 2) ∪ (2; + ∞) → [0; 1) +∞) ∪ (1; + ∞), possiamo effettuare la composizione:

$$f\left[g\left(x\right)\right]=f\left(\sqrt{2x-3}\right)=\sqrt{2\cdot\frac{4x-1}{x^2-1}-3}=\sqrt{\frac{8x-2-3x^2+3}{x^2-1}}=\sqrt{\frac{-3x^2+8x+1}{x^2-1}}.$$

Analogamente faremo per la composizione nell'ordine inverso.

Dopo aver determinato dominio e codominio delle seguenti coppie di funzioni, stabilire per quali valori di *x* è possibile effettuare le composizioni *f* °*g*, *g*° *f*, quindi determinare le due composizioni.

Livello 1

1. $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = 1/x$ $\left[f\left[g\left(x\right)\right]=\frac{3}{x}-2, g\left[f\left(x\right)\right]=\frac{1}{3x-2}\right]$
2. $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = 3x^3 - 1$ $[f[g(x)] = (3x^3 - 1)^2 - 2, g[f(x)] = 3 \cdot (x^2 - 2)^3 - 1]$
3. $f\left(x\right)=\sqrt{4x+1}, g\left(x\right)=x^2-x$ $\left[f\left[g\left(x\right)\right]=\sqrt{4x^2-4x+1}, g\left[f\left(x\right)\right]=4x+1-\sqrt{4x+1}\right]$
4. $f\left(x\right)=\sqrt{2-x}, g\left(x\right)=\sqrt{9x+1}$ $\left[f\left[g\left(x\right)\right]=\sqrt{2-\sqrt{9x+1}}, g\left[f\left(x\right)\right]=\sqrt{9\cdot\sqrt{2-x}+1}\right]$
5. $f\left(x\right)=\frac{2x-1}{4x^2-9}, g\left(x\right)=\frac{8x-3}{9x^2-1}$ $\left[f\left[g\left(x\right)\right]=\frac{\left(9x^2-1\right)\cdot\left(9x^2-16x+5\right)}{729x^4-418x^2+192x-27}, g\left[f\left(x\right)\right]=\frac{\left(4x^2-9\right)\cdot\left(12x^2-16x-19\right)}{4\cdot\left(4x^4-27x^2+9x+18\right)}\right]$
6. $f(x) = sin(x)$, $g(x) = cos(x)$ $[f[g(x)] = sin[cos(x)], g[f(x)] = cos[sin(x)]]$
7. $f(x) = tan(x)$, $g(x) = 2x - 3$ $[f[g(x)] = tan(2x - 3), g[f(x)] = 2tan(x) - 3]$
8. $f(x) = sin^{-1}(2x)$, $g(x) = 2x - 1$ $[f[g(x)] = sin^{-1}(4x - 2), g[f(x)] = 2sin^{-1}(2x) - 1]$
9. $f\left(x\right)=\ln\left(x^2-1\right), g\left(x\right)=\sqrt{x^2-x}$ $\left[f\left[g\left(x\right)\right]=\ln\left(x^2-x-1\right), g\left[f\left(x\right)\right]=\sqrt{\ln\left(x^2-1\right)-1}\right]$

Livello 2

10. $f(x) = e^{2x-1}$, $g(x) = ln(4x - 1)$ $[f[g(x)] = (4x - 1)^2/e, g[f(x)] = ln(4 \cdot e^{2x} - e) - 1]$
11. $f(x) = sin(4x+1)$, $g(x) = sin^{-1}(3x-2)$ $[f[g(x)]=sin[4sin^{-1}(3x-2)+1], g[f(x)]=sin^{-1}(3sin(4x+1)-2]$

12. $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ 2x & x\ge 0 \end{cases}, g(x)=3x+1$ $\left[f[g(x)]=\begin{cases} 3x+1 & x<0 \\ 6x+2 & x\ge 0 \end{cases}, g[f(x)]=\begin{cases} 3x+1 & x<0 \\ 6x+1 & x\ge 0 \end{cases}\right]$

13. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<0 \\ -x^2+1 & x\ge 0 \end{cases}, g(x)=\sqrt{x}$ $\left[f[g(x)]=-x+1, x\ge 0, g[f(x)]=\begin{cases} \sqrt{x^2+1} & x<0 \\ \sqrt{-x^2+1} & 0\le x\le 1 \end{cases}\right]$

14. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x<0 \\ \sqrt{x} & x\ge 0 \end{cases}, g(x)=ln(x)$ $\left[f[g(x)]=\begin{cases} \frac{1}{ln(x)} & 0<x<1 \\ \sqrt{ln(x)} & x\ge 1 \end{cases}, g[f(x)]=ln\left(\sqrt{x}\right), x>0\right]$

15. $f(x)=\begin{cases} sin(x) & x<1 \\ cos(x) & x\ge 1 \end{cases}, g(x)=sin^{-1}(x)$

$\left[f[g(x)]=\begin{cases} x & x<1 \\ \sqrt{1-x^2} & x\ge 1 \end{cases}, g[f(x)]=\begin{cases} x & x<1 \\ sin^{-1}(cos(x)) & x\ge 1 \end{cases}\right]$

Livello 3

16. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x<0 \\ x & x\ge 0 \end{cases}, g(x)=\begin{cases} x & x\le 0 \\ \frac{1}{x} & x>0 \end{cases}$ [$f[g(x)] = f(x)$, $g[f(x)] = g(x)$]

17. $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x<2 \\ 4-3x & x\ge 2 \end{cases}, g(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 1 \\ 3x & x>1 \end{cases}$

$\left[f[g(x)]=\begin{cases} 4-3x^2 & x\le -\sqrt{2} \\ 2x^2-1 & -\sqrt{2}<x\le 1 \\ 4-9x & x>1 \end{cases}, g[f(x)]=\begin{cases} (2x-1)^2 & x\le 1 \\ 6x-3 & 1<x<2 \\ (4-3x)^2 & x\ge 2 \end{cases}\right]$

18. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2} & x<0 \\ e^x & x\ge 0 \end{cases}, g(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<2 \\ 1-x & x\ge 2 \end{cases}$

$\left[f[g(x)]=\begin{cases} e^{x^2+1} & x<2 \\ \frac{1}{(1-x)^2} & x\ge 2 \end{cases}, g[f(x)]=\begin{cases} \frac{1}{x^4}+1 & x<-\sqrt{2} \\ 1-\frac{1}{x^2} & -\sqrt{2}\le x<0 \\ e^{2x}+1 & 0\le x<\ln(2) \\ 1-e^x & x\ge \ln(2) \end{cases}\right]$

19. Se una funzione è invertibile, possiamo dire che essa può essere sempre composta con la propria inversa? E in caso di risposta affermativa, che tipo di funzione è la composta?

[Sì, la funzione $f(x) = x$]

20. Esistono funzioni per le quali si ha $f[g(x)] = f(x)$, $g[f(x)] = g(x)$? Fornire un esempio.

[Sì, quella dell'esercizio 16]

Lavoriamo insieme

Data la funzione $f(x) = x^2 + 1$, per essa si ha $dom(f) = \mathbb{R}$, $cod(f) = [1; +\infty)$, quindi possiamo effettuare la composizione per se stessa. Vogliamo calcolare $f(f(f(1)))$, che possiamo scrivere più semplicemente come $f^3(1)$. Abbiamo $f^3(1) = f(f(1^2 + 1)) = f(f(2)) = f(2^2 + 1) = f(5) = 5^2 + 1 = 26$.

Calcolare quanto richiesto

Livello 1

21. $f(x) = x + 1, f^2(-2) = ?$ [0] $f(x) = 2x - 1, f^3(1) = ?$ [1] $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, f^3(0) = ?$ [–1]

22. $f(x) = (x + 1)^2, f^4(-1) = ?$ [25] $f(x) = \sqrt{x^2+1}, f^2(-2) = ?$ $\left[\sqrt{6}\right]$

23. $f(x) = x^2 - x, f^3(½) = ?$ [– 55/256] $f(x) = x + |x|, f^2(-1) = ?$ [0] $f(x) = sin(x), f^3(\pi) = ?$ [0]

Livello 2

24. $f(x) = x^2, f^3(x) = ?$ [x^8] $f(x) = x + |x|, f^n(-1) = ?$ [0] $f(x) = sin(x), f^n(\pi) = ?$ [0]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Possiamo dire che $\lceil x \rceil^2 = \lceil x^2 \rceil$? In caso di risposta negativa fornire un esempio.
$\left[\left\lceil \sqrt{2} \right\rceil^2 = 1^2 = 1, \left\lceil \left(\sqrt{2}\right)^2 \right\rceil = 2\right]$

2. Determinare la legge della funzione $\lceil k \cdot x \rceil$, $k \in \mathbb{N}$.
$$\left[\begin{cases} k \cdot n + 1 & n < x \le n + \frac{1}{k} \\ k \cdot n + 2 & n + \frac{1}{k} < x \le n + \frac{2}{k} \\ & \dots \\ k \cdot (n+1) & n + \frac{k-1}{k} < x < n + 1 \end{cases}\right]$$

3. Determinare la legge della funzione $\lfloor k \cdot x \rfloor$, $k \in \mathbb{N}$.
$$\left[\begin{cases} k \cdot n & n \le x < n + \frac{1}{k} \\ k \cdot n + 1 & n + \frac{1}{k} \le x < n + \frac{2}{k} \\ & \dots \\ k \cdot n + k - 1 & n + \frac{k-1}{k} \le x < n + 1 \end{cases}\right]$$

4. Dato $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, dimostrare che $f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

5. Dimostrare che ogni funzione $f : [-a; a] \to \mathbb{R}$, con $a > 0$, può scriversi come somma di una funzione pari e una funzione dispari.

6. Determinare tutte le radici reali della funzione f, che verifica la proprietà: $f(x^{1/9}) = x^2 - 3x - 4$.
[$x = 4^{-1/9} \vee x = -1$]

7. Sia una funzione f che verifica $f(1/x) - 3 \cdot f(x) = x$, $x \ne 0$. Determinare $f(2)$. [–13/16]

8. Con il simbolo $\{x\}$ denotiamo la parte frazionaria di x. Per esempio $\{3,4\} = 0,4$ e $\{4\} = 0$. Se $f(x) = \{3/2x\}$. Quante soluzioni ha l'equazione $f(f(f(f(x)))) = 0$, per $0 \le x < 1$? [8]

9. Se $f(x) = ax + b$ e $f^{-1}(x) = bx + a$, con a e b numeri reali, quanto vale $a + b$? [–2]

10. Sapendo che $f(x) = x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$ calcolare $f(0) + f(-1) + f(-2) + f(-3)$. [10/9]

11. Qual è il massimo numero di punti d'intersezione dei grafici di due diverse funzioni polinomiali di quarto grado $y = p(x)$ e $y = q(x)$, ciascuna di coefficiente direttore 1? [3]

12. Tenuto conto che $f(2x) = \frac{2}{2+x}$, $\forall x > 0$, determinare $2 \cdot f(x)$. $\left[\frac{8}{4+x}\right]$

13. Data $f(x) = ax^2 - \sqrt{2}$, $a \in \mathbb{Z}$, risolvere l'equazione in a: $f\left(f\left(\sqrt{2}\right)\right) = -\sqrt{2}$. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

14. Se $f(x) = ax^7 + bx^3 + cx - 5$, e $f(-7) = 7$, calcolare $f(7)$. [–17]

15. Se $f(x) = ax^4 + bx^2 + x + 5$ e $f(-3) = 2$, allora $f(3)$ è A) -5 B) -2 C) 1 D) 3 E) 8 [E]

16. Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è definita dalla legge: $f(n) = \begin{cases} n+3 & se\ n\ è\ dispari \\ n/2 & se\ n\ è\ pari \end{cases}$. Supponiamo k dispari e $f(f(f(k))) = 27$. Quanto vale la somma delle cifre di k? A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15 [B]

17. Tenuto conto che $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, determinare $f[sec^2(\theta)]$, $0 < \theta < \pi/2$. [$sin^2(\theta)$]

18. Sapendo che $f(x) + 2 \cdot f(1/x) = 3x$, risolvere $f(x) = f(-x)$. Suggerimento: sostituire nella prima uguaglianza $1/x$ a x, quindi eliminare $f(1/x)$. $\left[x = \pm\sqrt{2}\right]$

19. Sia f una funzione tale che $f(x/3) = x^2 + x + 1$. Determinare la somma di tutti gli z per i quali: $f(3z) = 7$. [$-1/9$]

20. $p(x)$ è un generico polinomio, determinare tutti i polinomi che verificano: $p(x^2) = [p(x)]^2 = p[p(x)]$. Suggerimento: due polinomi sono identici se hanno lo stesso grado e gli stessi coefficienti dei termini di uguale grado. [$p(x) = x^2$]

21. Se $f(x) = \sqrt[n]{a - x^n}$ e $x \ge 0$, determinare $f(f(x))$. [x]

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi
I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito

http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

1. (Liceo scientifico 2001/2002) In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione: $y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}$. Tale luogo è costituito da: A) un punto; B) due punti; C) infiniti punti; D) nessun punto. Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un esauriente spiegazione della risposta. [B), i punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$]

2. (Liceo scientifico 2002/2003) Il dominio della funzione $f(x) = ln\left[\sqrt{x+1} - (x-1)\right]$ è l'insieme degli x reali tali che: A) $-1 < x \le 3$; B) $-1 \le x < 3$; C) $0 < x \le 3$; D) $0 \le x < 3$. Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata. [B]

3. (Liceo scientifico PNI 2007/2008) Qual è l'equazione della curva simmetrica rispetto all'origine di $y = -e^{2x}$? Quale quella della curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante? [$y = e^{-2x}$; $y = ½\ ln(-x)$]

4. (Liceo scientifico 2008/2009) Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le funzioni (o applicazioni) di A in B, ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?
[Suriettive sì, biiettive no, iniettive dipende se si vuole che il dominio sia tutto A no, diversamente sì]

5. (Liceo scientifico 2010/2011) Il profitto di una azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i l'anno di osservazione e con y_i il corrispondente profitto

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,490	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile una funzione g definita su $\mathbb{R}^+$ se per ciascun x_i oggetto dell'osservazione si ha $|g(x_i) - y_i| \le 10^{-1}$. Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione $f(x) = (ax + b) \cdot e^{-x/3} + 3$ e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro. [Sì]

6. (Liceo scientifico 2012/2013) Si calcoli il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}$. [$[-1; 2]$]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
CMC = Canadian Mathematics Challenge
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
NC = North Carolina Mathematical Contest
SC = South Carolina Mathematical Contest

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato agli HSMC del 2002 La funzione g verifica le seguenti proprietà:

$$i)\ g(0) = 2;\ ii) g(1) = 3;\ iii)\ g(x + y) + g(x - y) = g(x) \cdot g(y)\ x, y \in \mathbb{Z}.$$

Trovare $g(5)$

La proprietà iii) si può anche scrivere $g(x + y) = g(x) \cdot g(y) - g(x - y)$. Questa relazione è di tipo ricorsivo, permette cioè di trovare un valore della funzione mediante suoi valori già calcolati.

Così $g(2) = g(1 + 1) = g(1) \cdot g(1) - g(1 - 1) \Rightarrow g(2) = 3 \cdot 3 - 2 = 7$. Analogamente:

$$g(3) = g(2 + 1) = g(2) \cdot g(1) - g(2 - 1) \Rightarrow g(3) = 7 \cdot 3 - 3 = 18.$$

$$g(4) = g(3 + 1) = g(3) \cdot g(1) - g(3 - 1) \Rightarrow g(4) = 18 \cdot 3 - 7 = 47.$$

E infine $g(5) = g(4 + 1) = g(4) \cdot g(1) - g(4 - 1) \Rightarrow g(5) = 47 \cdot 3 - 18 = 123$.

1. (AHSME 1995) Sia f una funzione lineare con le proprietà seguenti: $f(1) \le f(2)$, $f(3) \le f(4)$, e $f(5) = 5$. Quale delle seguenti è vera? A) $f(0) < 0$ B) $f(0) = 0$ C) $f(1) < f(0) < f(-1)$ D) $f(0) = 5$ E) $f(0) > 5$ [D]
2. (AHSME 1997) Consideriamo le funzioni f che verificano $f(x + 4) + f(x - 4) = f(x)$ per tutti i numeri reali x. Tali funzioni sono periodiche e hanno un minimo periodo comune p. Quanto vale p?
A) 8 B) 12 C) 16 D) 24 E) 32 [D]
3. (AHSME 1998) Sia $f(x)$ una funzione che verifica le seguenti proprietà:
a) comunque siano i numeri reali x e y, $f(x + y) = x + f(y)$; b) $f(0) = 2$. Calcola $f(1998)$. [2000]
4. (HSMC 1999) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{2}{\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor x \rfloor - 56}$.
[$(-\infty; -8) \cup [-7; 7) \cup [8; +\infty)$]
5. (HSMC 1999) Data la funzione $f(x) = \dfrac{c \cdot x}{2x + 3}$, determinare i valori di c per cui: $f(f(x)) = x$, $x \ne -3/2$.
[$c = -3$]
6. (HSMC 2000) Sia f una funzione tale che $f(3) = 1$ e $f(3x) = x + f(3x - 3)$, per ogni x. Calcolare $f(300)$.
[5050]
7. (HSMC 2004) Sia f una funzione polinomiale tale che si abbia: $f(x^2 + 1) = x^4 + 5x^2 + 3$ per ogni x reale. Calcolare $f(x^2 - 1)$. [$x^4 + x^2 - 3$]

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato agli HSMC del 2002

Un numero r si chiama punto fisso per una funzione f se $f(r) = r$. Sapendo che $f(x) = ax^2 + bx + c$ ha un solo punto fisso, determinare b in termine di a.

$f(r) = r$ implica $r^2 + ar + b = r \Rightarrow r^2 + (a + 1) \cdot r + b = 0$ dato che vi è una sola soluzione deve essere nullo il discriminante dell'equazione: $(a - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot b = 0 \Rightarrow b = ¼ \cdot (a - 1)^2$.

8. (HSMC 2005) Sia $f(t) = \dfrac{t + 2}{t - 2}$, calcolare $f^{-1}(c^{-1} - 1)$. [$2/(1 - 2c)$]
9. (HSMC 2002) Siano le funzioni f e g tali che si abbia $f(x) = 2x - 6$ e $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ per ogni x, determinare l'ascissa dell'intersezione delle curve $y = f(x)$ e $y = g(x)$. [6]
10. (HSMC 2006) Scrivere la funzione $f(x) = 1 - x^3 - x^4 - 2x^5$ come somma di una funzione pari e una dispari. [$f(x) = (1 - x^4) + (- x^3 - 2x^5)$]
11. (HSMC 2007) Sia f una funzione che verifica l'uguaglianza $f(x \cdot y) = \dfrac{f(x)}{y}$, per tutti i numeri reali positivi x e y. Se $f(300) = 2$, qual è il valore di $f(800)$? [¾]

Questions in English

Working together

Consider the following question assigned at HSMC in 2003. Suppose f satisfies $3 \cdot f(1/x) - f(x) = x$. Find $f(3)$
Substituting $x = 3$ and then $x = 1/3$ into the expression: $3 \cdot f(1/3) - f(3) = 3 \wedge 3 \cdot f(3) - f(1/3) = 1/3$.
Then $-f(3) + 3 \cdot f(1/3) = 3 \Rightarrow 9 \cdot f(3) - 3 \cdot f(1/3) = 1$ and we conclude that $8 \cdot f(3) = 4$, or $f(3) = ½$.

12. (AHSME 2001) Let f be a function satisfying $f(xy) = f(x)/y$ for all positive real numbers x and y. If $f(500) = 3$, what is the value of $f(600)$? [5/2]
13. (HSMC 2001) Let $F(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$. Form a new function $G(x)$ by replacing x in $F(x)$ with the expression $\dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}$. Express $G(x)$ in terms of $F(x)$. [$G(x) = [F(x)]^3$]
14. (NC 2001) Which of the following functions is neither odd nor even?
A) $x^3 - 2x$ B) $x^3 - x\,|x|$ C) $x^5 - x^3 + 3x$ D) $x^4 - 2x^2 + x + 1$ E) $3x^2 - x + 6$ [D]
15. (CMC 2001) Calculate the value of the sum $\lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor + \ldots + \lfloor \sqrt{50} \rfloor$. [217]
16. (HSMC 2001) If $f(x) = 3x + 4$, find a function $g(x)$ such that $f(g(x)) = 4x - 1$. [$1/3 \cdot (4x - 5)$]
17. (HSMC 2002) Given functions $f(x) = 2x - 6$ and $g = f^{-1}$, solve $f(x) = g(x)$. [$x = 6$]

Working together

This question was assigned at HSMC in 2006. Let f_1 be the function defined by $f_1(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$. For $n = 1, 2, 3 \ldots$ define $f_{n+1} = f_1(f_n(x))$. It can be shown that $f_{35} = f_5$. Find $f_{29}(x)$.
f_1 is an invertible function. $f_{35} = f_5$ implies that $f_{35} = i$, the identity function. Since $f_{30} = f_1(f_{29}) = i$, then f_{29} is the inverse of f_1. One computes this inverse and obtains

$$f_{29}(x) = f_1^{-1}(x) \Rightarrow y = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow y \cdot (x+1) = 2x - 1 \Rightarrow x \cdot (y-2) = -1 - y \Rightarrow x = \frac{y+1}{2-y} \Rightarrow f_{29}(x) = \frac{x+1}{2-x}$$

18. (HSMC 2004) Consider the function $f(x)$ such that $f(mn) = f(m + n)$ for all real numbers m and n. If $f(2) = 4$, find f(64). [4]
19. (NC 2004) A dress that is size x in France is size $s(x)$ in the United States, where $s(x) = x - 32$. A dress that is size x in the United States is size $y(x)$ in Italy, where $y(x) = 2(x + 12)$. Which function $h(x)$ will convert French dress sizes to Italian dress sizes? [$2x - 40$]
20. (SC 2008) Suppose that $f(x) = x^x$ and $f(x) = x^{2x}$. Which of the functions below is equal to f(g(x))?
A) x^{3x} B) $x^{x^{2x}}$ C) $x^{2x^{2x}}$ D) $x^{2x^{3x}}$ E) $x^{2x^{2x+1}}$ [E]
21. (HSMC 2008) Let $f(x)$ be a function such that $f(x) + 3f(-x) = \cos(x)$ for every real number x. What is the value of $f(\pi)$? [$-¼$]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia militare) Stabilire il dominio di definizione della funzione $\dfrac{log(x-2)}{\sqrt{1-x}}$
A) Nessun x B) $-2 < x < 1$ C) $x > 2$ D) Qualunque x
2. (Accademia militare) Il dominio della funzione $f(x)=\dfrac{ln(x+1)}{x-2}$ è uguale a:
A) $(-1; +\infty)$ B) $(-1; 2) \cup (2; +\infty)$ C) $(0; +\infty)$ D) $(1; +\infty)$
3. (Odontoiatria 1998) Data la funzione $y = a + bx$, se x si raddoppia, di quanto aumenta y?
A) b; B) $2b$; C) 2a; D) bx; D) x.
4. (Odontoiatria 2000) La curva di equazione $y=-\dfrac{\sqrt{7}+1}{|x|}$ ha il grafico contenuto nel:
A) I e III quadrante B) I e II quadrante C) II e III quadrante
D) III e IV quadrante E) I e IV quadrante
5. (Odontoiatria 2001) Data una funzione $f(x)$ tale che $f(x+1)=\dfrac{2\cdot f(x)+2}{2}$ e $f(1) = 2$, quanto vale $f(2)$? A) 3 B) 0 C) ½ D) 2 E) 1
6. (Odontoiatria 2002) Quale fra gli insiemi seguenti rappresenta il dominio della funzione $y=\dfrac{\sqrt{1-e^x}}{\ln x}$?
A) insieme dei numeri reali B) insieme dei numeri razionali C) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$ D) $(-\infty; 0)$ E) $\varnothing$
7. (Medicina 2002) Data una funzione $y = f(x)$ è sempre vero che
A) la funzione reciproca ha lo stesso dominio della funzione $f(x)$ B) la funzione inversa ha lo stesso dominio della funzione $f(x)$ C) la funzione inversa è data da $y=\dfrac{1}{f(x)}$ D) la funzione inversa è data da $y=-f(x)$ E) la funzione reciproca è data da $y=\dfrac{1}{f(x)}$
8. (Veterinaria 2002) L'espressione matematica $b = f(a)$ è la traduzione in simboli della frase:
A) il valore di a è in funzione di quello di b B) il valore di b è uguale a quello di a C) il valore di b è ottenuto moltiplicando f per a D) il valore di a è ottenuto moltiplicando b per l'inverso di f E) il valore di b è in funzione di quello di a
9. (Veterinaria 2003) La funzione $y = a^{-x}$ con $a > 0$:
A) è sempre positiva B) può essere sia positiva che negativa C) è sempre negativa
D) interseca l'asse delle ascisse E) non interseca l'asse delle ordinate
10. (Veterinaria 2004) La funzione inversa di $f(x)=\dfrac{3}{2-y}$ è
A) $x=\dfrac{y}{2y-3}$ B) $x=\dfrac{3}{2-y}$ C) $x=\dfrac{3-2y}{y}$ D) $x=\dfrac{-2y+3}{-y}$ E) $x=\dfrac{3}{y-2}$
11. (Odontoiatria 2004) Quale fra le seguenti funzioni ha il grafico simmetrico rispetto all'origine degli assi? A) $y=x^5\cdot\sqrt{3}-\dfrac{1}{3x}$ B) $y=\dfrac{2}{5}x^7-x^5\cdot\sqrt{2}+\dfrac{1}{6}$ C) $y=x^4-7x^2+1$
D) $y=\sqrt{x^2+|x|+4}$ E) $y=\sqrt{x^2+|x+4|}$
12. (Medicina 2004) Data la funzione $f(x)=\sqrt{|x|+3x-1}$, $f(2x)$ vale:
A) $\sqrt{2|x|+6x-2}$ B) $2\cdot\sqrt{|x|+3x-1}$ C) $\sqrt{2|x|+6x-1}$ D) $\sqrt{|2x|+3x-1}$ E) $2\cdot\sqrt{2|x|+6x-1}$
13. (Odontoiatria 2005) Essendo x e y due variabili reali, la funzione $y=\sqrt{|x|-1}$
A) è definita solo per $x \ge 1$ B) non è definita $-1 \le x \le 1$ C) è definita solo per $x \le 1$
D) è sempre definita e positiva E) è positiva in ogni punto del suo dominio

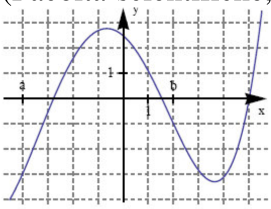
14. (Veterinaria 2005) Una fabbrica di bulloni sostiene una spesa fissa mensile media di € 120 000, 00 (il mese commerciale è inteso di 30 giorni) e un costo di produzione di € 3,15 per ogni bullone prodotto. Indicata con y la spesa giornaliera complessiva e con x il numero di bulloni prodotti in un giorno, individuare la relazione tra le variabili x e y
A) $y = 120000{,}00 + 3{,}15x$ B) $y = 4000{,}00 + 3{,}15/x$ C) $y = 3{,}15x – 120000{,}00$
D) $y = 4000{,}00 + 3{,}15x$ E) $y = 3{,}15/x – 4000{,}00$

15. (Odontoiatria 2005) Quale delle seguenti equazioni rappresenta una funzione lineare $y = f(x)$, tale che $f(–2) = 3, f(3) = –2$? A) $y = – x + 1$ B) $y = x + 5$ C) $y = x – 5$ D) $y = – 2x – 1$ E) $y = –2 x + 4$

16. (Medicina 2005) Quale delle seguenti equazioni rappresenta una funzione $y = f(x)$ tale che $f(2) = –1$ e $f(–1) = 5$?
A) $y = –x^2 + 2x – 1$ B) $y = –2x^2 + x + 8$ C) $y = 2x^2 – x – 7$ D) $y = x^2 – 3x + 1$ E) $y = 3x^2 – 2x$

17. (Odontoiatria 2006) La funzione $y = \dfrac{x+2}{\log(x-1)}$ è definita per
A) $x > 1 \wedge x \neq 2$ B) $1 < x \leq 2$ C) $x \geq 1 \wedge x \neq 2$ D) $x \leq 1$ E) $x > 1$

18. (Odontoiatria 2007) Essendo x e y due variabili reali, la funzione: $y = ln(x – 1)$
A) non è definita per $–1 \leq x \leq 1$ B) è definita solo per $x \geq 1$ C) è definita solo per $x \leq 1$
D) è sempre definita e positiva E) è positiva in ogni punto del suo dominio

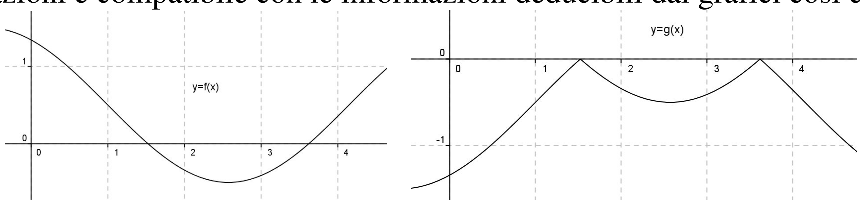
19. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) In figura è rappresentato il grafico di una funzione f.


Quanto vale il rapporto $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$? A) –1/3 B) 1 C) 1/3 D) – 2/3

20. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) Sia f la funzione definita da $f(x) = x^3 + 8$. Per quale x si ha che $f(x)$ è il doppio del valore della funzione in $x = 0$? A) 16 B) 0 C) 2 D) –2

21. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) Due grandezze F ed R sono legate dalla relazione $F = 2/R^2$. Se F triplica, allora R diventa A) 2/3 del valore iniziale B) $1/\sqrt{3}$ del valore iniziale C) 1/3 del valore iniziale D) 1/9 del valore iniziale

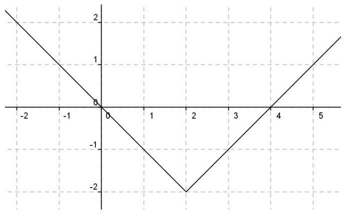
22. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) Una ditta di elettrodomestici ha venduto in un anno 2000 forni a microonde di un certo modello, al prezzo di 100 euro l'uno. È stato stimato che, se nell'anno successivo il prezzo di vendita di quel modello aumenterà di x euro, allora il numero di forni venduti in un anno diminuirà di $30x$. Quale delle seguenti funzioni $I(x)$ descrive l'incasso annuo della ditta al variare dell'aumento x?
A) $I(x) = 100 \cdot (2000 – 30x)$ B) $I(x) = (2000 + 30x) \cdot (100 + x)$
C) $I(x) = (100 + x) \cdot (2000 – 30x)$ D) $I(x) = (2000 – 30x) \cdot 100x$

23. (Architettura 2009) Nella figura sono rappresentati i grafici delle funzioni $y = f(x)$, $y = g(x)$. Quale delle seguenti relazioni è compatibile con le informazioni deducibili dai grafici così come disegnati.


A) $g(x) = |–f(x)|$ B) $g(x) = –|f(x)|$ C) $g(x) = f(|x|)|$ D) $g(x) = – f(|x|)$ E) $g(x) = f(|– x|)$

24. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza) Indica quale delle seguenti funzioni ha la proprietà "per ogni coppia di numeri (x_1, x_2) del dominio, se $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$".
A) $f(x) = |x|$ B) $f(x) = cos(x)$ C) $f(x) = log(x)$ D) $f(x) = 1/x$

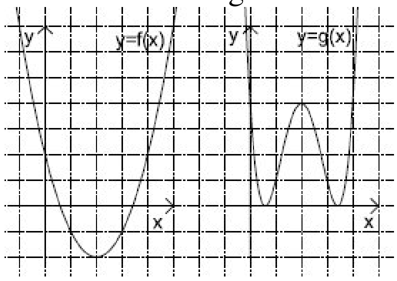
25. (Ingegneria 2009) Se $f(x) = x^2 – x^3$, allora $f(x – 2)$ vale
A) $x^2 – x^3 + 2$ B) $(3 – x)(x – 2)^2$ C) $x^2 – x^3 – 2$ D) $x^2 – 2 – x^3 + 2$ E) Nessuna delle altre



26. (Test Bocconi) Quale fra le seguenti funzioni ha il grafico seguente?

A) $f(x) = |x+2|+2$ B) $f(x) = |x-2|+2$ C) $f(x) = |x+2|-2$ D) $f(x) = |x-2|-2$ E) $f(x) = |x-2|$

27. (Facoltà scientifiche CISIA 2010) In figura sono rappresentati, usando la stessa scala, i grafici di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, che sono legate da una delle seguenti relazioni. Quale?



A) $g(x) = -f(x)$ B) $g(x) = [f(x)]^2$ C) $g(x) = \sqrt{f(x)}$ D) $g(x) = |f(x)|$ E) $g(x) = 1/f(x)$

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_3_1.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
A	B	D	D	A	E	E
8	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
E	A	B	A	C	B	D
15	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**
A	D	A	A	C	C	B
22	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	
C	B	C	B	D	B	

9. Funzioni reali di una variabile reale

9.2 Continuità delle funzioni

Prerequisiti
- Sistema di riferimento cartesiano ortogonale
- Rappresentazione grafica di semplici funzioni
- Concetto di dominio e codominio di una funzione
- Concetto di infinito
- Gli insiemi numerici fondamentali e le loro proprietà

Obiettivi
- Comprendere il concetto di limite
- Comprendere il concetto di funzione continua
- Sapere determinare se un insieme numerico è limitato o illimitato
- Sapere applicare il principio di sostituzione degli infiniti nel calcolo dei limiti
- Sapere determinare se una funzione è continua
- Sapere distinguere i diversi tipi di discontinuità

Contenuti
- Topologia della retta
- I limiti delle funzioni reali di una variabile reale
- Continuità di una funzione
- Operazioni aritmetiche con i limiti e forme indeterminate
- Teoremi sulle funzioni continue
- I limiti notevoli

Parole chiave
Convergenza – Discontinuità – Divergenza – Oscillazione – Punto di accumulazione
Punto di frontiera – Punto isolato

Richiamiamo le conoscenze...

Teorema A (del resto o di Ruffini)

Il resto della divisione $\dfrac{p(x)}{x-a}$, con $p(x)$ polinomio nell'unica variabile x, è $p(a)$.

Corollario A

Condizione necessaria e sufficiente affinché il polinomio in una sola variabile $p(x)$ sia divisibile per il binomio $(x - a)$ è che si abbia $p(a) = 0$.

Per dividere un polinomio per un binomio di primo grado si utilizza la cosiddetta regola di Ruffini.
Vogliamo effettuare la divisione $(5t^3 - 4t^2 + t - 1) : (t - 2)$. La regola di Ruffini consiste nel costruire lo schema seguente $\begin{array}{c|ccc|c} & 5 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & & 10 & 12 & 26 \\ \hline & 5 & 6 & 13 & 25 \end{array}$ in cui nella prima riga ci sono i coefficienti del polinomio dividendo, fuori dallo schema c'è il numero che annulla il polinomio divisore (2), nella seconda riga ci sono i prodotti del precedente numero per i numeri dell'ultima riga; in questa, il primo numero (5) è uguale al primo coefficiente del dividendo, gli altri sono ottenuti dalla somma fra gli elementi della prima e quelli della seconda riga. L'ultimo numero dell'ultima riga è il resto della divisione (25), gli altri sono i coefficienti del polinomio quoziente che è di un grado in meno del dividendo, cioè $5t^2 + 6t + 13$.

Topologia della retta

Il problema

La funzione $f(x) = 1/x$ non è definita per $x = 0$, ma è definita per qualsiasi altro valore, non importa quanto "vicino" a zero. Cosa succede nelle "vicinanze" dello zero?

Poiché il nostro principale obiettivo è la rappresentazione grafica delle funzioni, dopo avere stabilito dove esse esistono, con la determinazione dell'I.d.e., dobbiamo cominciare a imparare come possiamo tracciarle. Un'interessante problema è perciò quello di stabilire cosa succede quando una funzione non esiste, soprattutto quando una funzione, come quella del problema, non è definita in un singolo punto. Nell'insieme dei numeri reali possiamo effettuare l'indagine richiesta, poiché possiamo avvicinarci ad un dato valore in modo appunto "continuo", senza salti. Il problema però è che in generale l'insieme di definizione di una funzione non è sempre tutto l'insieme $\mathbb{R}$, ma un suo sottoinsieme che, come abbiamo visto nell'unità precedente, non sempre è un insieme continuo. In effetti però non è necessario che un insieme sia continuo per studiare il comportamento nelle "vicinanze" di un suo punto. Ricordiamo che stiamo considerando insiemi numerici, quindi parleremo di numeri di un insieme, piuttosto che di elementi.

Esempio 1

L'insieme $A = (-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$ non è continuo, dato che, per esempio l'intervallo $(1; 6)$ relativamente alla sua parte $[2; 5]$, non contiene elementi di A. Eppure possiamo avvicinarci ugualmente al numero 2 o al numero 5, anche se non appartengono ad A, perché ogni intervallo fatto di numeri minori di 2, contiene solo elementi di A. Lo stesso accade per ogni intervallo fatto di numeri maggiori di 5. Ciò invece non è possibile per l'insieme formato da tutti i numeri minori o uguali a 2 unito al solo numero 3. Nel caso del numero 3, non possiamo avvicinarci a 3 passando solo per numeri appartenenti ad A.

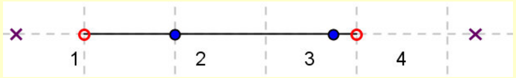
In vista del precedente esempio poniamo le seguenti definizioni.

Definizione 1

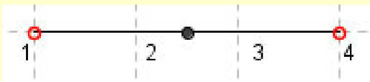
Ogni intervallo che contiene un generico numero a si chiama **intorno di *a***. In particolare se l'intervallo, non importa se aperto o chiuso, ha estremi $a - r$ e $a + r$, parliamo di **intorno circolare di raggio *r***.

Esempio 2

L’intervallo (1; 4) è un intorno di qualsiasi numero maggiore di 1 e minore di 4. Per esempio è un intorno di 2 e anche di 3,75. Non è un intorno di 1 né di 4, di 0,25 o 5,31.



In particolare è un intorno circolare di 2,5 di raggio 1,5. Infatti $|4-2,5| = |1-2,5| = 1,5$.



Notazione 1

Un intorno circolare di x di raggio r si indica con il simbolo $I_r(x) = (x - r; x + r)$.

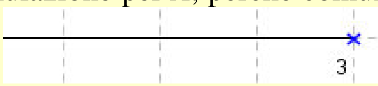
Definizione 2

Un numero in ogni intorno del quale vi sono numeri di un insieme A, si dice **punto di accumulazione di A**.

Come si vede, non è necessario che un punto appartenga a un insieme per essere di accumulazione per lo stesso insieme.

Esempio 3

Dato l’insieme A dei numeri minori di 3. Tutti i suoi elementi sono ovviamente di accumulazione per A, ma anche 3, che non appartiene ad A, è di accumulazione per A, perché comunque consideriamo un intorno che contiene 3, esso contiene numeri minori di 3.

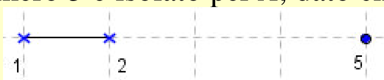


Definizione 3

Un numero $a \in A$, che ha almeno un intorno che, a parte a, è tutto formato da numeri non appartenenti all’insieme A, si chiama **punto isolato di A**.

Esempio 4

Dato l’insieme $A = (1; 2) \cup \{5\}$, il numero 5 è isolato per A, dato che, per esempio, l’intorno (4; 7) contiene solo il numero 5.



Quindi il procedimento di “avvicinamento continuo” può effettuarsi solo per i punti di accumulazione. Vedremo meglio nel successivo paragrafo. Chiudiamo invece questo paragrafo con un paio di altri concetti.

Definizione 4

Diciamo che un insieme numerico è
- **limitato superiormente,** se esiste almeno un numero reale maggiore di tutti i numeri dell’insieme
- **limitato inferiormente,** se esiste almeno un numero reale minore di tutti gli elementi dell’insieme.

Un insieme limitato inferiormente e superiormente si chiama **insieme limitato**.

Ovviamente tutti gli insiemi numerici finiti sono limitati.

Esempio 5

L’insieme $A = \left\{ \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ è formato dalle frazioni in cui il numeratore è più grande di una unità del denominatore. Essendo tutte frazioni positive, l’insieme è limitato inferiormente dallo zero. Ma è anche limitato superiormente, poiché ogni frazione di A si può scrivere $1 + 1/n$, e $1/n \le 1 + 1 = 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. A è limitato.

Definizione 5

- Dato A limitato superiormente, ogni numero N: $N \geq a$, $\forall a \in A$, si chiama **maggiorante** di A.
- Dato A limitato inferiormente, ogni numero N: $N \leq a$, $\forall a \in A$, si chiama **minorante** di A.

Esempio 6

Tutti i numeri negativi e lo zero sono minoranti di $A = \left\{ \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$. Tutti i numeri maggiori o uguali di 2 sono suoi maggioranti.

Fra i maggioranti e i minoranti di un insieme ve ne sono due che hanno un ruolo importante.

Teorema 1

- L'insieme dei maggioranti di un insieme limitato superiormente ha un numero minore di tutti gli altri.
- L'insieme dei minoranti di un insieme limitato inferiormente ha un numero maggiore di tutti gli altri.

Dimostrazione Per esercizio

In vista del precedente risultato possiamo porre una nuova definizione.

Definizione 6

- Il minimo dei maggioranti di un insieme A limitato superiormente, si chiama **estremo superiore di A**. Se tale numero appartiene ad A si dice **massimo di A**.
- Il simbolo $+\infty$ si dice **estremo superiore** di ogni insieme non limitato superiormente.
- Il massimo dei minoranti di un insieme A limitato inferiormente, si chiama **estremo inferiore** di A. Se tale numero appartiene ad A si dice **minimo di A.**
- Il simbolo $-\infty$, si dice **estremo inferiore** di ogni insieme non limitato inferiormente.

Notazione 2

- L'estremo superiore di un insieme X si indica con $\sup_X$. Il massimo con $\max_X$.
- L'estremo inferiore di un insieme X si indica con $\inf_X$. Il minimo con $\min_X$.

Se l'insieme X si capisce dal contesto, possiamo eliminarlo dalla notazione scrivendo sup, max, inf, min.

Esempio 7

L'insieme $X = \{x^2: x \in \mathbb{R}\}$ è illimitato superiormente, quindi $\sup_X = +\infty$. È però limitato inferiormente, dato che tutti i suoi elementi sono non negativi. Non è difficile capire che il suo estremo inferiore è 0, poiché tutti i suoi minoranti sono numeri negativi o 0, che è quindi il massimo di questi minoranti. E poiché 0 è un elemento di X è anche il minimo.

Come si fa a determinare l'estremo superiore o l'estremo inferiore di un insieme limitato? Non è difficile comprendere che valgono le seguenti proprietà.

Teorema 2

L'estremo superiore di un insieme X limitato superiormente verifica le seguenti proprietà
a) $x \leq \sup$, $\forall x \in X$; b) comunque si considera un numero positivo ε, $\sup - \varepsilon$ non è un maggiorante di X.

Dimostrazione

La proprietà a) viene fuori dalla stessa definizione, dato che sup è un maggiorante di X. La proprietà b) dipende dal fatto che sup è il minimo dei maggioranti, pertanto se gli togliamo una qualsiasi quantità, non importa quanto piccola, il numero ottenuto è più piccolo di sup e perciò il numero differenza delle due quantità non è più un maggiorante di X.

Vale anche un analogo risultato per l'estremo inferiore.

Teorema 3

L'estremo inferiore di un insieme X limitato inferiormente verifica le seguenti proprietà

a) $x \geq \inf, \forall x \in X$; b) comunque si considera un numero positivo ε, inf + ε non è un minorante di X.

Dimostrazione

Per esercizio, sulla falsariga del teorema sul sup.

Esempio 8

Dato $X = \left\{\frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$, il suo inf è 1, perché $1 \leq \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ e 1 + ε non è più un minorante. Infatti se consideriamo per esempio ε = 0,00001, che è un numero certamente molto piccolo avremo che nell'insieme X ci saranno infiniti numeri più piccoli di 1 + ε = 1,00001. Sono tutti quelli per cui si ha: $1 + \frac{1}{n} < 1{,}00001 \Rightarrow \frac{1}{n} < 0{,}00001 = 10^{-5} \Rightarrow n > 10^5$. Quindi tutte le volte che consideriamo elementi di X ottenuti assegnando al parametro n, valori interi maggiori di 10^5 otteniamo numeri più piccoli di 1 + ε.

Stabilire che il sup è 2 è molto più facile perché $2 \in X$, si ottiene assegnando 1 a n e ovviamente tutti gli altri elementi di X sono più piccoli di 2. Quindi 2 è anche massimo di X.

Valgono anche dei risultati nei casi in cui inf e sup non sono numeri reali.

Teorema 4

- Se un insieme X non è limitato superiormente, allora comunque consideriamo un numero positivo k, esistono infiniti elementi di X maggiori di k.
- Se un insieme X non è limitato inferiormente, allora comunque consideriamo un numero positivo k, esistono infiniti elementi di X minori di $-k$.

Verifiche

Livello 1

Stabilire quali dei seguenti insiemi sono intorni dei punti accanto indicati

1. (1; 2) di 0,5 [Sì] (1; 2) di 2 [Sì] (1; 2) di 0 [No] 1; 2) di $\sqrt{2}$ [Sì]
2. (–1; 1,4) di $\sqrt{2}$ [No] $\left[0; \sqrt{2}\right]$ di $\frac{1}{\sqrt{2}}$ [Sì] (3; 3,14) di π [No] (0; 1) di 1/3 [Sì]
3. (0; 1) di $\frac{1}{\pi}$ [Sì] (2; 3) di $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ [No] $\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}; \sqrt{1+\sqrt{3}}\right)$ di 1 [No] (1; 1,5) di $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ [No]

Scrivere gli intorni dei punti di raggio r indicati

4. $I_1(2)$ [(1; 3)] $I_2(-1)$ [(–3; 1)] $I_{1/2}(0)$ [(–½; ½)] $I_{1/3}(2/5)$ [(1/15; 11/15)]
5. $I_\pi(\pi)$ [(0; 2π)] $I_{2/5}(1/3)$ [(–1/15; 11/15)] $I_{1/3}(-2/5)$ [(–11/15; –1/5)] $I_{1/4}(2/3)$ [(5/12; 11/12)]
6. $I_{\sqrt{2}}(1)$ $\left[\left(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right)\right]$ $I_1\left(\sqrt{2}\right)$ $\left[\left(\sqrt{2}-1; 1+\sqrt{2}\right)\right]$ $I_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}\right)$ $\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}; \sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]$

Determinare centro e raggio dei seguenti intorni

7. (2; 5) $[I_{7/3}(3)]$ (–5; –2) $[I_{7/2}(3)]$ (1; 4) $[I_{5/2}(3)]$ (–3; –1) $[I_2(2)]$
8. (½; 3) $[I_{7/4}(5/2)]$ (–½; 3) $[I_{5/4}(7/2)]$ (¼; 3/2) $[I_{7/8}(5/4)]$ (–3/2; –¼) $[I_{7/8}(5/4)]$
9. $\left(0; \sqrt{2}\right)$ $\left[I_{\sqrt{2}/2}\left(\sqrt{2}\right)\right]$ $\left(1-\sqrt{2}; 1\right)$ $\left[I_{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\left(\sqrt{2}\right)\right]$ $\left(-\sqrt{2}; \sqrt{3}\right)$ $\left[I_{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Determinare gli estremi dell'insieme $X=\left\{\frac{n+2}{n-2}:n\in\mathbb{N},n\geq 3\right\}$. Possiamo scrivere

$$\frac{n+2}{n-2}=\frac{n-2+4}{n-2}=\frac{n-2}{n-2}+\frac{4}{n-2}=1+\frac{4}{n-2}$$

Il che vuol dire che tutti gli elementi di *X* sono maggiori di 1. Inoltre all'aumentare di *n* aumenta il denominatore, quindi diminuisce la frazione. Perciò per il primo valore che si assegna a *n*, cioè 3, otteniamo il massimo dell'insieme: $\frac{4\cdot 3+2}{4\cdot 3-2}=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$. 1 è invece l'estremo inferiore, che non è minimo perché non appartiene a *X*. Infatti, per quanto detto ogni elemento di *X* è maggiore di 1, mentre se consideriamo 1 + ε, con ε>0, ci sono elementi di *X* minori di 1 + ε. Infatti:

$$\frac{n+2}{n-2}<1+\varepsilon\Rightarrow 1+\frac{4}{n-2}<1+\varepsilon\Rightarrow\frac{4}{n-2}<\varepsilon\Rightarrow\frac{n-2}{4}>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow n>2+\frac{4}{\varepsilon}$$

Così per esempio se $\varepsilon=10^{-5}$, tutti gli elementi di *X* che si ottengono assegnando a *n* valori maggiori di $2+\frac{4}{10^{-5}}=2+400000=400002$ sono più piccoli di $1+10^{-5}=1,00001$. Calcoliamone qualcuno.

$$\frac{400003+2}{400003-2}=\frac{400005}{400001}\approx 1,000009<1,00001$$

Determinare estremo superiore ed estremo inferiore degli insiemi seguenti

Livello 2

10. $\left\{\frac{2n+3}{5n};n\in\mathbb{N}\right\}$ [inf = 0; max = 1] $\left\{\frac{n-1}{n};n\in\mathbb{N}\right\}$ [min = 0; sup = 1]

11. $\left\{n+\frac{1}{n};n\in\mathbb{N}\right\}$ [min = 2; sup = +∞] $\left\{\frac{1-n^2}{n};n\in\mathbb{N}\right\}$ [inf = –∞; max = 0]

12. $\left\{\frac{3n^2-1}{2n^2};n\in\mathbb{N}\right\}$ [min = 1; sup = 3/2] $\left\{\frac{3n^2+1}{2n^2};n\in\mathbb{N}\right\}$ [inf = 3/2; max = 2]

Livello 3

13. $\left\{(-1)^n\cdot\frac{2n+3}{5n};n\in\mathbb{N}\right\}$ [min = –1; max = 7/5] $\left\{(-1)^n\cdot\frac{n-1}{n};n\in\mathbb{N}\right\}$ [inf = –1; sup = 1]

14. $\left\{(-1)^n\cdot\frac{3n^2+1}{4n-1};n\in\mathbb{N}\right\}$ [inf = –∞; sup = +∞] $\left\{\frac{n^2+n-1}{n^2-n+1};n\in\mathbb{Z}\right\}$ [min = –1; max = 5/3]

I limiti delle funzioni reali di una variabile reale

La Natura rifugge dall'infinito, poiché esso è senza fine o imperfetto e la Natura va sempre alla ricerca di un termine.
Aristotele, Generazione degli animali

Il problema

Data una funzione non definita in un suo punto di accumulazione *P*, come si comporta la stessa funzione in un intorno di *P*?

Cominciamo a considerare un esempio.

Esempio 9

Sia la funzione $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, il cui insieme di esistenza è $x \neq 1$. $x = 1$ è di accumulazione per il dominio, poiché la funzione non è definita solo per $x = 1$, quindi comunque consideriamo un suo intorno, in esso troviamo infiniti valori del dominio. Possiamo perciò avvicinarci a 1 con qualsiasi approssimazione. Cominciamo a osservare che possiamo avvicinarci a 1 sia per valori minori che per valori maggiori di 1.

In vista di quanto stabilito nell'esempio precedente poniamo una nuova definizione.

Definizione 7

- Dato un numero *a*, l'intervallo $(b; a)$, in cui *b* è un numero reale minore di *a* o il simbolo $-\infty$, si chiama **intorno sinistro di *a***.
- Dato un numero *a*, l'intervallo $(a; b)$, in cui *b* è un numero reale maggiore di *a* o il simbolo $+\infty$, si chiama **intorno destro di *a***.

Notazione 3

- Un intorno sinistro di *a*, di raggio *r*, si indica con $I_r^-(x_0) = (x_0 - r; x_0)$.
- Un intorno destro di *a*, di raggio *r*, si indica con $I_r^+(x_0) = (x_0; x_0 + r)$.

Adesso possiamo procedere con il processo di "avvicinamento" al punto di accumulazione.

Esempio 10

Calcoliamo alcuni valori della funzione $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, per valori presi a caso in un intorno sinistro di 1 di raggio arbitrario, ma "abbastanza" piccolo.

x	0,9	0,95	0,99	0,997	0,9991	0,9999	0,99999
$f(x)$	–19	–39	–199	≈ –666	≈ –2221	≈ –19999	≈ –199999

I valori ottenuti ci suggeriscono che all'avvicinarci al valore 1 da sinistra, la funzione tende a diventare sempre più piccola, senza un apparente limitazione.
Vediamo cosa accade invece avvicinandoci dalla destra di 1.

x	1,1	1,03	1,004	1,001	1,0002	1,00001	1,000001
$f(x)$	21	67	501	2001	10001	200001	2000001

Quindi stavolta la funzione tende a diventare sempre più grande senza alcuna apparente limitazione.

Tenendo conto dei risultati dell'esempio precedente cosa possiamo dire sulla funzione $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$? Certamente che la funzione è illimitata e che quindi il suo inf è $-\infty$, mentre il suo sup è $+\infty$. In effetti possiamo dire di più, cioè possiamo stabilire cosa accade quando ci avviciniamo a tali estremi. Possiamo allora porre le seguenti definizioni.

Definizione 8

Data una funzione $y = f(x)$ e un punto di accumulazione x_0 del suo dominio

- se l'inf di $f(x)$, per x appartenente a un qualsiasi intorno (completo, sinistro, destro) di x_0 è $-\infty$, diciamo che la funzione $f(x)$ **diverge negativamente per x che tende (a x_0, a x_0 dalla sinistra, a x_0 dalla destra)**.
- se il sup di $f(x)$, per x appartenente a un qualsiasi intorno (completo, sinistro, destro) di x_0 è $+\infty$, diciamo che la funzione $f(x)$ **diverge positivamente per x che tende (a x_0, a x_0 dalla sinistra, a x_0 dalla destra)**.

Notazione 4

- Per dire che $f(x)$ diverge negativamente per x che tende (a x_0, a x_0 dalla sinistra, a x_0 dalla destra) scriviamo $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ e leggiamo *limite per x che tende (a x_0, a x_0 da sinistra, a x_0 da destra) di f(x) è meno infinito*.
- Per dire che $f(x)$ diverge positivamente per x che tende (a x_0, a x_0 dalla sinistra, a x_0 dalla destra) scriviamo $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ e leggiamo *limite per x che tende (a x_0, a x_0 da sinistra, a x_0 da destra) di f(x) è più infinito*.

Ovviamente non si deve pensare che se tendiamo da sinistra il limite è meno infinito e da destra più infinito.

Esempio 11

Se avessimo considerato la funzione $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}$, avremmo ovviamente ottenuto sempre valori positivi in qualsiasi intorno, destro o sinistro, di 1, pertanto avremmo scritto $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x-1)^2} = +\infty$.

Allo stesso modo avremmo: $\lim_{x\to 1} \frac{-x}{(x-1)^2} = -\infty$.

In effetti le verifiche effettuate non ci assicurano che il limite di una certa funzione è più o meno infinito.

Esempio 12

La funzione $f(x) = \frac{10^5 x^2 - 99999x - 1}{x-1}$, non è definita per $x = 1$. Se effettuiamo il processo di avvicinamento a 1, otterremo, per esempio: $f(0,9) = 90001$, e $f(0,999) = 99901$. Quindi anche in questo caso potremmo congetturare che $\lim_{x\to 1^-} \frac{10^5 x^2 - 99999x - 1}{x-1} = +\infty$. In realtà ciò non è vero, perché anche se abbiamo ottenuto ordinate "molto grandi", non è detto che otterremo qualsiasi valore grande "a piacere". In effetti non si otterranno mai valori superiori a 100001, come si vedrà meglio in seguito.

Dobbiamo quindi trovare un metodo "migliore" per stabilire se il limite di una funzione è o no infinito.

Teorema 5

Una funzione $f(x)$ ammette limite più infinito per x che tende (a x_0, a x_0 dalla sinistra, a x_0 dalla destra) di accumulazione per il dominio di f, se, comunque fissiamo un numero positivo k, si ha $f(x) > k$, per tutti gli x appartenenti a un intorno (completo, sinistro, destro) di x_0.

Dimostrazione

Consideriamo solo il caso $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, gli altri due casi (con intorno sinistro o destro) si dimostrano allo stesso modo. Abbiamo detto che ciò significa che comunque consideriamo un intorno di x_0, il suo sup è $+\infty$. Ma il teorema 4 dice che comunque consideriamo un numero positivo k, allora vi sono infiniti elementi dell'intorno maggiori di k. E siccome ciò accade per ogni k e per ogni raggio dell'intorno, vuol dire che esiste un intorno in cui **tutti** gli elementi sono maggiori di k.

Adesso possiamo stabilire veramente se entrambe le funzioni viste negli esempi tendono o no a più infinito.

Esempio 13

- È vero che $\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$? Fissiamo un generico numero positivo k e vediamo per quali x si ha:

$$f(x)>k\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}>k\Rightarrow\frac{x+1-kx+k}{x-1}>0\Rightarrow\frac{(1-k)\cdot x+1+k}{x-1}>0\Rightarrow(1-k)\cdot x+1+k>0$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo eliminato il denominatore perché stiamo indagando gli intorni destri di 1, per i quali quindi $x > 1$ e perciò $x - 1 > 0$. Possiamo anche pensare che $1 - k < 0$, dato che stiamo supponendo che k sia un numero positivo "abbastanza" grande. Quindi avremo:

$$(k-1)\cdot x-1-k<0\Rightarrow x<\frac{1+k}{k-1}=\frac{k-1+2}{k-1}=\frac{k-1}{k-1}+\frac{2}{k-1}=1+\frac{2}{k-1}$$

Abbiamo scritto la soluzione in modo da essere facilmente confrontabile con il numero 1. Dato che $x > 1$, la funzione è maggiore del k fissato per $1<x<1+\frac{2}{k-1}$, che è un intorno destro di 1 di raggio $\frac{2}{k-1}$. Quindi possiamo dire che effettivamente $\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$. Anzi possiamo dire di più. possiamo dire per esempio che per $k = 1000$, tutti gli elementi dell'intorno destro di 1 di raggio $\frac{2}{1000-1}=\frac{2}{999}\approx 0{,}002$ fanno assumere a $f(x)$ valori maggiori di 1000. Ciò non è assicurato per altri valori. Per esempio $f(1{,}1) = 21 < 1000$.

- Adesso vediamo se è vero che $\lim_{x\to 1^-}\frac{10^5x^2-99999x-1}{x-1}=+\infty$. Intanto osserviamo che :

$$\frac{10^5x^2-99999x-1}{x-1}=\frac{(x-1)\cdot(10000x+1)}{x-1}=10000x+1$$

Quindi basta considerare la semplice disequazione $10000\,x + 1 > k$ (*) la cui soluzione è $x>\frac{k-1}{10000}$ e tenuto conto che siamo in un intorno sinistro di 1, avremo $f(x) > k$ per $\frac{k-1}{10000}<x<1$, che è un intorno di 1 solo se $\frac{k-1}{10000}<1\Rightarrow k-1<10000\Rightarrow k<9999$. Quindi la (*) non è vera per qualsiasi valore di k. Quindi è falso che $\lim_{x\to 1^-}\frac{10^5x^2-99999x-1}{x-1}=+\infty$.

In modo analogo possiamo stabilire un modo per determinare se il limite di una funzione è meno infinito.

Teorema 6

Una funzione $f(x)$ ammette limite meno infinito per x che tende (a x_0, a x_0 dalla sinistra, a x_0 dalla destra) di accumulazione per il dominio di f, se, comunque fissiamo un numero positivo k, si ha $f(x) < -k$, per tutti gli x di un intorno (completo, sinistro, destro) di x_0.

Dimostrazione Per esercizio, sulla falsariga di quella del teorema 5.

Ovviamente non è detto che una funzione tenda sempre a più o a meno infinito, come abbiamo già visto nel caso del $\lim_{x\to 1^-}\frac{10^5x^2-99999x-1}{x-1}$, che ancora non sappiamo quanto valga; però abbiamo visto che $\frac{10^5x^2-99999x-1}{x-1}=10000x+1$, se x è diverso da 1. Le due funzioni non sono uguali perché $f(x)=\frac{10^5x^2-99999x-1}{x-1}$ ha dominio $x \neq 1$, mentre $g(x) = 10000x + 1$ ha dominio tutti i numeri reali. Diciamo che le funzioni sono "quasi uguali". Ma allora non è difficile pensare che se $f(x) = g(x)$, $\forall\ x \neq 1$, allora $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x)$. E ovviamente $\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) = 10001$. Per il momento ci accontentiamo di parlare "per intuizione", in seguito saremo più rigorosi. Il nostro attuale interesse è quello di precisare cosa significa che una funzione, al tendere di x a un punto di accumulazione del suo dominio, tende a un numero piuttosto che a infinito.

Definizione 9

Diciamo che $f(x)$ **converge a ℓ per x che tende (a x_0, a x_0 dalla sinistra, a x_0 dalla destra)** punto di accumulazione del suo dominio, se in ogni intorno di ℓ esistono infiniti valori di $f(x)$ per cui x appartiene a un intorno (completo, sinistro, destro) di x_0.

Esempio 14

La funzione $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 3x + 2}{x-2}$ non è definita per $x = 2$. Effettuiamo il processo di avvicinamento a 2:

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2,1	2,01	2,001	2,0001
$f(x)$	4,51	≈ 4,95	≈ 4,995	≈4,9995	5,51	≈5,05	≈5,005	≈5,0005

In effetti abbiamo la sensazione di stare avvicinandoci a un numero, che, solo perché siamo abituati a pensare in termini di numeri interi, "potrebbe essere" 5, ma in effetti potrebbe anche essere 4,99999999 o un altro valore simile.

Il precedente ci ha fornito un esempio di funzione che *potrebbe* convergere, anche se non ci da la sicurezza del numero verso il quale converge. Abbiamo quindi bisogno di un risultato che ci permetta di verificare se la nostra sensazione è corretta.

Teorema 7

Una funzione $f(x)$ ammette limite un numero reale ℓ per x che tende a x_0 di accumulazione per il dominio di f, se, comunque fissiamo un numero $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\delta > 0$, tale che quando si ha $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ si ha anche $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$.

Dimostrazione

Non abbiamo fatto altro che "tradurre" la definizione di funzione convergente in termini di disequazioni.

Esempio 15

Adesso possiamo stabilire se è vero che $\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - x^2 - 3x + 2}{x-2} = 5$. Dobbiamo risolvere la disequazione $5 - \varepsilon < \frac{x^3 - x^2 - 3x + 2}{x-2} < 5 + \varepsilon$ e le sue soluzioni devono appartenere a un intorno di 2, cioè devono essere del tipo $2 - \delta < x < 2 + \delta$. Cominciamo a vedere se riusciamo a semplificare la frazione. Si vede che $x^3 - x^2 - 3x + 2 = (x-2)\cdot(x^2 + x - 1)$, quindi $5 - \varepsilon < \frac{(x-2)\cdot(x^2+x-1)}{x-2} < 5 + \varepsilon$. Possiamo semplificare poiché stiamo supponendo che sia $x \neq 2$, ottenendo $5 - \varepsilon < x^2 + x - 1 < 5 + \varepsilon$. Abbiamo quindi le due disequazioni: $x^2 + x - 6 - \varepsilon < 0$; $x^2 + x - 6 + \varepsilon > 0$; le cui soluzioni sono:

$$\left(\frac{-1-\sqrt{25-4\varepsilon}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{25-4\varepsilon}}{2}\right) \wedge \left(x < \frac{-1-\sqrt{25+4\varepsilon}}{2} \vee x > \frac{-1+\sqrt{25+4\varepsilon}}{2}\right)$$

Ora $\sqrt{25-4\varepsilon} < 5, \sqrt{25+4\varepsilon} > 5$, quindi $\frac{-1+\sqrt{25-4\varepsilon}}{2} < \frac{-1+5}{2} = 2 \wedge \frac{-1+\sqrt{25+4\varepsilon}}{2} > \frac{-1+5}{2} = 2$. Perciò $\frac{-1+\sqrt{25-4\varepsilon}}{2} \approx 2 - \alpha \wedge \frac{-1+\sqrt{25+4\varepsilon}}{2} \approx 2 + \beta$, in cui α e β sono due opportuni numeri reali; abbiamo allora: $2 - \alpha < x < 2 + \beta$. Se perciò prendiamo $\delta = \min(\alpha, \beta)$, abbiamo finito, dato che si avrà: $2 - \delta < x < 2 + \delta$.

Abbiamo visto perciò funzioni che divergono e funzioni che convergono, ma, come visto per le successioni, potrebbe succedere anche un altro fatto.

Esempio 16

Consideriamo $f(x) = sin(1/x)$, che non è definita per $x = 0$. Vediamo cosa accade in un intorno di 0.

x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$	$-0,00001$
$sin(1/x)$	$\approx 0,544$	$\approx 0,506$	$\approx -0,826$	$\approx 0,306$	$\approx 0,350$

Abbiamo ottenuto numeri quasi *a caso*, pertanto non ci sentiamo di dire che vi è convergenza, del resto la funzione è limitata sia superiormente che inferiormente, quindi il limite non può essere infinito.

Poniamo allora l'ultima definizione per il comportamento di una funzione nell'intorno di un suo punto di accumulazione.

Definizione 10

Diciamo che $f(x)$ è **oscillante per x che tende (a x_0, a x_0 dalla sinistra, a x_0 dalla destra)** punto di accumulazione del suo dominio, se non è né convergente, né divergente.

Abbiamo considerato il comportamento nell'intorno di un punto di oscillazione, ma, per le funzioni il cui dominio contiene intervalli illimitati del tipo $(a; +\infty)$ o $(-\infty; a)$, possiamo anche considerare cosa accade all'aumentare (o al diminuire) indiscriminato dell'ascissa.

Esempio 17

La funzione $\frac{3x+1}{2x-1}$ ha dominio $x \neq ½$, ha perciò senso indagare come si comporta la funzione per valori molto "grandi" o molto "piccoli" di x. Possiamo cioè costruire una tabella del tipo seguente

x	100	5000	12478	124578	3587945
$\frac{3x+1}{2x-1}$	$\approx 1,512$	$\approx 1,500$	$\approx 1,500$	$\approx 1,500$	$\approx 1,500$

Intuitivamente possiamo dire che la funzione, all'aumentare indiscriminato della sua ascissa, converge verso un valore prossimo a 1,5.

Definizione 11

Se il dominio di $f(x)$ contiene un intervallo del tipo $(a; +\infty)$ [o $(-\infty; a)$], diciamo che $f(x)$ **converge a ℓ per x che tende a più infinito [a meno infinito]**, se, comunque fissiamo un numero positivo k, allora in ogni intorno di ℓ esistono infiniti valori di $f(x)$ per $x > k$ $(x < -k)$.

Notazione 5

Se $f(x)$ converge a ℓ per x che tende a più (meno) infinito scriviamo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \right)$.

Teorema 8

Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \right)$ se, comunque fissiamo un numero positivo ε, esiste un numero positivo k, tale che quando si ha $x > k$ $(x < -k)$ si ha anche $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$.

Dimostrazione Segue dalla *traduzione* della definizione 11.

Esempio 18

Vediamo se effettivamente si ha: $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{2x-1}=\frac{3}{2}$. Risolviamo la disequazione $\frac{3}{2}-\varepsilon<\frac{3x+1}{2x-1}<\frac{3}{2}+\varepsilon$. Abbiamo: $\frac{3-2\varepsilon}{2}<\frac{3x+1}{2x-1}<\frac{3+2\varepsilon}{2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{3x+1}{2x-1}<\frac{3+2\varepsilon}{2}\\ \frac{3x+1}{2x-1}>\frac{3-2\varepsilon}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x+2<6x+4\varepsilon x-3-2\varepsilon\\ 6x+2>6x-4\varepsilon x-3+2\varepsilon\end{cases}$. Abbiamo eliminato il denominatore $2x-1$ perché stiamo studiando il comportamento per x che tende a più infinito, quindi il fattore è certamente positivo. Continuiamo: $\begin{cases}4\varepsilon x>5+2\varepsilon\\ 4\varepsilon x>-5+2\varepsilon\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>\frac{5+2\varepsilon}{4\varepsilon}\\ x>\frac{-5+2\varepsilon}{4\varepsilon}\end{cases}\Rightarrow x>\frac{5+2\varepsilon}{4\varepsilon}$. Essendo ε un numero positivo "abbastanza" piccolo avremo: $\frac{-5+2\varepsilon}{4\varepsilon}<0$, ecco spiegata la soluzione del sistema. Possiamo ancora scrivere $x>\frac{5}{4\varepsilon}+\frac{1}{2}$ che è il numero k cercato. Per esempio considerato l'intorno di raggio $\varepsilon=10^{-5}$ avremo $x>\frac{5}{4\cdot 10^{-5}}+\frac{1}{2}=125000,5$.

In modo analogo possiamo definire la divergenza di una funzione per x che tende all'infinito.

Definizione 12

Se il dominio di $f(x)$ contiene un intervallo del tipo $(a; +\infty)$ [o $(-\infty; a)$]], diciamo che $f(x)$ **diverge a più (meno) infinito per *x* che tende a più (meno) infinito**, se, comunque fissiamo un numero positivo k esiste un numero positivo h per cui si ha $f(x) > k$ ($f(x) <-k$) per $x > h$ ($x < -k$).

Notazione 6

Per indicare che $f(x)$ diverge per x che tende a più (meno) infinito scriviamo $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty\left(\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty\right)$

Esempio 19

Per stabilire che $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{2-x}=-\infty$, dobbiamo risolvere la disequazione $\frac{x^2+1}{2-x}<-k$. Essendo x che tende a più infinito possiamo dire che $2-x<0$ e perciò scriviamo: $\frac{x^2+1}{x-2}>k\Rightarrow x^2+1>kx-2k\Rightarrow x^2-kx+2k+1>0$

Consideriamo solo la soluzione positiva: $x>\frac{k+\sqrt{k^2-8k-4}}{2}$, essendo k "molto grande", anche $h=\frac{k+\sqrt{k^2-8k-4}}{2}$ lo è. Per esempio se $k=10^{10}\Rightarrow h=\frac{10^{10}+\sqrt{10^{20}-8\cdot 10^{10}-4}}{2}\approx 10^{10}$.

Chiudiamo il paragrafo con un risultato apparentemente intuitivo, ma di fondamentale importanza.

Teorema 9 (di unicità del limite)

Se una funzione ha limite per x che tende a un punto di accumulazione o a uno dei simboli più o meno infinito, tale limite è unico.

Dimostrazione

Lo proveremo solo nel caso $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$, lasciando gli altri casi per esercizio. Ovviamente, per la stessa definizione, non potrà accadere $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\vee\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$. Supponiamo invece, per assurdo, che accada $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = m \in \mathbb{R}$, ovviamente con $m \neq \ell$. Ora dire che $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ equivale a dire che, comunque fissiamo un numero positivo ε, esiste un numero positivo *k* per cui: $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon, \forall x > k$. Analogamente $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = m \in \mathbb{R}$ vuol dire che, scelto lo stesso ε esiste un numero positivo *h* per cui si ha: $m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon, \forall x > h$. Se *h* = *k* quindi valgono entrambe per ogni *x* > *k*, se ciò non accade varranno per il più grande fra *h* e *k*. Per non perdere di generalità indichiamo con *M* il più grande fra i detti numeri. Avremo allora: $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon, m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon, \forall x > M$. Ma allora se sottraiamo termine a termine troviamo: $\ell - \varepsilon - (m - \varepsilon) < \ell + \varepsilon - (m + \varepsilon) \Rightarrow \ell - m < \ell - m$, che è assurdo perché non esistono numeri minori di se stessi.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo congetturare il valore del $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$. Costruiamo la seguente tabella:

x	0,9	0,98	0,991	1,,2	1,03	1,005
$\frac{x^3-1}{x^2-1}$	≈1,426	≈1,485	≈1,493	≈1,654	≈1,522	≈1,504

Possiamo quindi congetturare che per *x* che tende a 1, $\frac{x^3-1}{x^2-1}$ converge.

Congetturare, giustificando la risposta, se i seguenti limiti rappresentano convergenza, divergenza o oscillazione.

Livello 1

1. $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^3-6x^2+15x-14}{x^2-4}$ [Convergente] $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2-9}$ [Convergente]
2. $\lim\limits_{x\to5^+} \frac{x^2-2}{3\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{5})}$ [Divergente] $\lim\limits_{x\to5} \frac{x^3-5x^2+3x-15}{x^2-25}$ [Convergente]
3. $\lim\limits_{x\to-5} \frac{x^3-5x^2+3x-15}{x^2-25}$ [Divergente] $\lim\limits_{x\to2} \cos\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ [Oscillante]
4. $\lim\limits_{x\to4^+} \frac{x^2-1}{5\cdot(\sqrt{x}-2)}$ [Divergente] $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{x^2-1}{5\cdot(\sqrt{x}-1)}$ [Convergente]
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x-1}{x^2-4}$ [Convergente] $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-3x^2+1}{x-2}$ [Divergente]
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7x^2+x-1}{3x^2}$ [Convergente] $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-x^2+1}{3x+1}$ [Divergente]

Livello 2

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x-1}-\sqrt{7x+2}\right)$ [Divergente] $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{13x-2}-\sqrt{13x+8}\right)$ [Convergente]
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x+1}$ [Convergente] $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\sin(x)$ [Oscillante]
9. $\lim\limits_{x\to2^+} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ [Divergente] $\lim\limits_{x\to2^-} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ [Convergente]

10. $\lim_{x\to -1}\frac{e^{x+1}-1}{(x+1)^2}$ [Divergente] $\lim_{x\to -1}\frac{e^{x+1}-1}{x+1}$ [Convergente]

Livello 3

11. $\lim_{x\to 0} f(x),\ f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$ [Oscillante] $\lim_{x\to 3}\lfloor x\rfloor$ [Oscillante]

12. $\lim_{x\to 1,5}\lfloor x\rfloor$ [Convergente] $\lim_{x\to 2}\left(\lceil x\rceil-\lfloor x\rfloor\right)$ [Convergente]

13. $\lim_{x\to 0} f(x),\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x>0\\ -\frac{1}{x} & x<0\end{cases}$ [Convergente] $\lim_{x\to -\infty}\lceil x\rceil$ [Divergente]

Livello 2

14. Sapendo che $\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+3}{x+1}=+\infty$, determinare l'intorno destro di –1 in cui si ha $f(x) > 1014$.

$\left[-1<x<507-2\cdot\sqrt{64515}\approx -0{,}99\right]$

15. Sapendo che $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$, determinare l'intorno di 2 in cui si ha $3{,}99999 < f(x) < 4{,}00001$.

$[1{,}99999 < x < 2{,}00001]$

16. Sapendo che $\lim_{x\to -2^+}\frac{2x^2+1}{x+2}=+\infty$, determinare l'intorno destro di –2 in cui si ha $f(x) > 3547$.

$\left[-2<x<\frac{3547-3\cdot\sqrt{1404217}}{4}\approx -1{,}99\right]$

17. Sapendo che $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$, determinare l'intorno di 1 in cui si ha $1{,}9999 < f(x) < 2{,}0001$

$[0{,}9999 < x < 1{,}0001]$

18. Sapendo che $\lim_{x\to 2^-}\frac{x+5}{x-2}=-\infty$, determinare l'intorno sinistro di 2 in cui si ha $f(x) < -540$.

$\left[1{,}987\approx\frac{1075}{541}<x<2\right]$

19. Sapendo che $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$, determinare il minimo k per cui si ha $0{,}999<f(x)< 1{,}001,\ \forall x>k$.

$\left[x>\sqrt{1999}\right]$

20. Sapendo che $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{3x+2}=+\infty$, determinare il minimo k per cui si ha $f(x) > 72548,\ \forall x>k$.

$\left[x>108822+2\cdot\sqrt{2960593195}\right]$

21. Sapendo che $\lim_{x\to +\infty}\frac{1-x^2}{x+3}=-\infty$, determinare il minimo k per cui si ha $f(x) < -25478,\ \forall x>k$

$\left[x>12739+2\cdot\sqrt{40589639}\right]$

Spiegare perché i seguenti limiti non hanno significato

Livello 3

22. $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2-x}\right)$ $\lim_{x\to 1^+}\frac{x-2}{\sqrt{1-x}}$ $\lim_{x\to 2} sin^{-1}(x)$ $\lim_{x\to -3^+}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x+3}}$ $\lim_{x\to -\infty}(2x+1)^3$

23. $\lim_{x\to \frac{1}{2}} sec^{-1}(x)$ $\lim_{x\to 4} ln\left[sin(x)\right]$ $\lim_{x\to 2} cos^{-1}\left[log_2\left(x^2\right)\right]$ $\lim_{x\to 2} log_{1-x}(x)$

Lavoriamo insieme

Verificare che $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{3}{2}$. Dobbiamo risolvere la disequazione $\frac{3}{2}-\varepsilon<\frac{x^3-1}{x^2-1}<\frac{3}{2}+\varepsilon, \varepsilon>0$. Essendo $x \neq 1$, possiamo semplificare la frazione:

$$\frac{3}{2}-\varepsilon<\frac{\cancel{(x-1)}\cdot\left(x^2+x+1\right)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)}<\frac{3}{2}+\varepsilon \Rightarrow \frac{3}{2}-\varepsilon<\frac{x^2+x+1}{x+1}<\frac{3}{2}+\varepsilon \Rightarrow \begin{cases}2x^2+2x+2>(3-2\varepsilon)\cdot(x+1)\\ 2x^2+2x+2<(3+2\varepsilon)\cdot(x+1)\end{cases}$$

Non ci sono problemi a eliminare il denominatore perché certamente positivo in un intorno di 1.

$$\begin{cases}2x^2+(2\varepsilon-1)\cdot x+2\varepsilon-1>0\\ 2x^2-(2\varepsilon+1)\cdot x-2\varepsilon-1<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x<\frac{1-2\varepsilon-\sqrt{4\varepsilon^2-20\varepsilon+9}}{4} \vee x>\frac{1-2\varepsilon+\sqrt{4\varepsilon^2-20\varepsilon+9}}{4}\\ \frac{1+2\varepsilon-\sqrt{4\varepsilon^2+20\varepsilon+9}}{4}<x<\frac{1+2\varepsilon+\sqrt{4\varepsilon^2+20\varepsilon+9}}{4}\end{cases}$$

Abbiamo: $\sqrt{4\varepsilon^2-20\varepsilon+9}>\sqrt{4\varepsilon^2-12\varepsilon+9}=3-2\varepsilon; \sqrt{4\varepsilon^2+20\varepsilon+9}>\sqrt{4\varepsilon^2+12\varepsilon+9}=2\varepsilon+3$, quindi possiamo dire che si ha:

$$\begin{array}{l}x>\frac{1-2\varepsilon+\sqrt{4\varepsilon^2-20\varepsilon+9}}{4}>\frac{1-2\varepsilon+3-2\varepsilon}{4}=1-\varepsilon;\\ x<\frac{1+2\varepsilon+\sqrt{4\varepsilon^2+20\varepsilon+9}}{4}<\frac{1+2\varepsilon+2\varepsilon+3}{4}=1+\varepsilon\end{array}.$$

Cioè x appartiene a un intorno di 1, che è quello che volevamo provare.

Verificare la validità delle seguenti uguaglianze

Livello 1

24. $\lim_{x\to 1}\left(x^2-x+1\right)=1$ $\quad$ $\lim_{x\to 0} ln(2x+1)=0$ $\quad$ $\lim_{x\to 0} sin(x)=0$ $\quad$ $\lim_{x\to \frac{1}{2}}(3x+1)=\frac{5}{2}$ $\quad$ $\lim_{x\to -2}\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{3}$

25. $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{3x+1}=2$ $\quad$ $\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{2x}=0$ $\quad$ $\lim_{x\to 0} e^{x+1}=e$ $\quad$ $\lim_{x\to 2}(x+1)^3=27$ $\quad$ $\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$

26. $\lim_{x\to +\infty}\left(x^2-1\right)=+\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to 3^+} ln(x-3)=-\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0$ $\quad$ $\lim_{x\to \infty} sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$ $\quad$ $\lim_{x\to -\infty}\frac{1-x}{2}=+\infty$

Livello 2

27. $\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-1}{x+1}=-2$ $\quad$ $\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x^2-1}=-\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}=-1$ $\quad$ $\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-4}{x^2-9}=-\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=12$

28. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2}=1$ $\quad$ $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x+1}{3x-1}=\frac{2}{3}$ $\quad$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{sin(x)+1}{sin(x)}=+\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to -\infty}\frac{3x}{x^2-2}=-\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+1}{e^x-1}=+\infty$

29. $\lim_{x\to 1^-}\frac{ln(x)+1}{ln(x)}=-\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{2\cdot\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$ $\quad$ $\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}=e+1$ $\quad$ $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x+3}=+\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to \pi^+}\frac{1-cos(x)}{1+cos(x)}=-\infty$

Verificare la falsità delle seguenti uguaglianze

Livello 1

30. $\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}=1$ $\quad$ $\lim_{x\to 0}\frac{3x+1}{2x-1}=3$ $\quad$ $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{1+2x}=47$ $\quad$ $\lim_{x\to 0}\frac{2x-1}{3x+2}=\frac{3}{2}$ $\quad$ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=1$

31. $\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{1+2x}=+\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}=2$ $\quad$ $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x+x^2}{2x-1}=1$ $\quad$ $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x+2}=4$

Continuità di una funzione

Il calcolo richiede la continuità, e la continuità richiede l'infinitamente piccolo; ma nessuno è in grado di dire cosa potrebbe essere l'infinitamente piccolo.
Bertrand Russell (1872–1970)

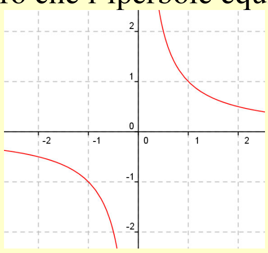
Il problema

Spesso nel linguaggio di ogni giorno usiamo il vocabolo continuo, per esempio parlando di un *procedimento continuo*, di una *applicazione continua* e via dicendo, intendendo con tale termine il fatto che non vi sono interruzioni nelle procedure. Abbiamo già parlato degli insiemi continui in matematica, vogliamo precisare ancor meglio ciò che vuol dire *continuo* per le funzioni.

Abbiamo già visto che il processo di limite è consentito solo per i punti di accumulazione, poiché il processo di avvicinamento non può avvenire per "salti", ma deve essere un processo continuo, intendendo con questo termine proprio quello che abbiamo già stabilito per gli insiemi, il fatto cioè che non vi siano "buchi". Quindi ovviamente una funzione per essere continua in un intervallo deve essere definita in tutti i punti dell'intervallo.

Esempio 20

La funzione $y = 1/x$ non può essere continua in alcun intervallo che contiene $x = 0$, poiché in quel valore non è definita. Infatti se andiamo a rappresentarla (e lo sappiamo fare perché non è altro che l'iperbole equilatera $xy = 1$), ha un grafico che in ogni intervallo che contiene $x = 0$ è "spezzato".

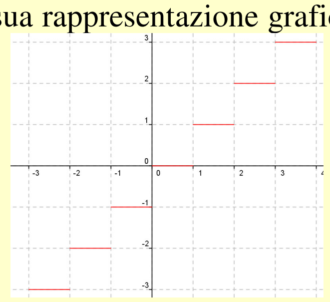


È invece continua in ogni intervallo che non contiene $x = 0$.

Vi sono però funzioni che pur essendo definite per dati valori di x, per gli stessi valori non sono continue (considerando ancora in modo intuitivo questo termine).

Esempio 21

La funzione *floor* o pavimento: $f(x) = \lfloor x \rfloor$, che abbiamo già trattato non è continua per alcun valore intero di x, come si vede dalla sua rappresentazione grafica, eppure per ognuno di questi valori è definita, Per esempio si ha: $f(1) = 1$.



Quindi una funzione può non essere continua in un punto anche se in tale punto è definita e lo stesso punto è di accumulazione. La continuità deve presupporre appunto un procedimento di avvicinamento a un dato valore che avvenga in modo per così dire graduale, senza salti. Possiamo allora porre la seguente definizione.

Definizione 13

Data una funzione $y = f(x)$ definita in x_0, diciamo che essa è **continua in** x_0 se vale la seguente uguaglianza: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Una funzione continua in ogni punto di un insieme si dice **continua nell'insieme**.

Notazione 8

Per indicare che la funzione $y = f(x)$ è continua nell'insieme X scriveremo $f \in C^0(X)$ o diremo anche che f è di classe C zero in X.

La scritta $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ implica in realtà 3 fatti contemporanei.

1. Deve esistere $f(x_0)$;
2. deve esistere $\lim_{x \to x_0} f(x)$;
3. i valori numerici dei punti 1 e 2 devono essere uguali.

Esempio 22

- Per la funzione $f(x) = 1/x$ non ha senso parlare di continuità in $x = 0$, poiché non esiste $f(0)$.
- La funzione $f(x) = \lfloor x \rfloor$ non è continua in ogni $x_0 \in \mathbb{Z}$ perché non esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$, dato che $\lim_{x \to x_0^-} \lfloor x_0 \rfloor = x_0 - 1, \lim_{x \to x_0^+} \lfloor x_0 \rfloor = x_0, x_0 \in \mathbb{Z}$.
- La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ non è continua in $x = 2$, nonostante che esista $f(2) = 1$ ed esista $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot (x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4$. Ma questo limite è diverso da $f(2)$.

Proprio tenuto conto di quanto visto nell'esempio precedente possiamo distinguere fra di loro le discontinuità in tre classi.

Definizione 14

Data una funzione $y = f(x)$, diciamo che essa presenta in x_0 una **discontinuità**

- **di prima specie** se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$. In questo caso la quantità $\left| \lim_{x \to x_0^-} f(x) - \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right| = |\ell_1 - \ell_2| \neq 0$ si chiama **salto di discontinuità**.
- **di seconda specie** se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty \vee \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \vee \nexists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \vee \nexists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.
- **di terza specie o eliminabile** se $\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \right) \wedge \left(f(x_0) \neq \ell \vee \nexists f(x_0) \right)$, o se la funzione è definita solo in un intorno sinistro di x_0 e si ha: $\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \right) \wedge \left(f(x_0) \neq \ell \vee \nexists f(x_0) \right)$ solo in un introno destro di x_0 e si ha: $\left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \right) \wedge \left(f(x_0) \neq \ell \vee \nexists f(x_0) \right)$.

Nella precedente definizione non è necessario assumere che x_0 sia un punto del dominio di $f(x)$, poiché, come già visto per $f(x) = 1/x$, la presenza di $x = 0$, rappresenta in ogni caso una discontinuità della funzione nel suo complesso.

Esempio 23

- La funzione $f(x) = 1/x$ ha una discontinuità di II specie in $x = 0$, poiché $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$.
- La funzione $f(x) = \lfloor x \rfloor$ in ogni $x_0 \in \mathbb{Z}$ ha una discontinuità di prima specie perché $\lim_{x \to x_0^-} \lfloor x_0 \rfloor = x_0 - 1, \lim_{x \to x_0^+} \lfloor x_0 \rfloor = x_0, x_0 \in \mathbb{Z}$, il salto di discontinuità è sempre $x_0 - (x_0 - 1) = 1$.

- La funzione $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x\neq 2 \\ 1 & x=2 \end{cases}$ ha in $x = 2$, una discontinuità di III specie perché $4=\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)=1$.
- La funzione $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ è definita in (0; + ∞), e si ha $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$, quindi in $x = 0$, si ha una discontinuità di II specie.
- La funzione $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$ è definita in (0; + ∞), e si ha $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$, quindi in $x = 0$, si ha una discontinuità di III specie.

Stiamo attenti a comprendere cosa vuol dire che una discontinuità di III specie è eliminabile. La discontinuità c'è e rimane, la funzione data è discontinua nel punto. Però possiamo costruire facilmente, a partire da essa, una funzione continua semplicemente ridefinendola nel punto in cui vi è la discontinuità.

Esempio 24

La funzione $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x\neq 2 \\ 1 & x=2 \end{cases}$ è discontinua in $x = 2$, e $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x\neq 2 \\ 4 & x=2 \end{cases}$ è continua in $x = 2$.
Ovviamente la funzione g **non è** la funzione f, ma una funzione che coincide con f per ogni $x \neq 2$.

Vediamo adesso qualche importante risultato che riguarda le funzioni continue.

Teorema 10

Sono funzioni continue: i polinomi in tutto $\mathbb{R}$; $f(x) = a^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$; $f(x) = log_a(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$; le funzioni goniometriche elementari in tutti i punti del loro dominio.
Dimostrazione
Discendono dai ben noti limiti, per esempio dato che $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, ne viene che anche

$$\lim_{x\to x_0}\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\right)=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_nx_0^n.$$

Analoghe dimostrazioni per gli altri casi.

Valgono anche i seguenti ovvi risultati.

Teorema 11

Se $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ sono funzioni continue in x_0, allora è continua anche la funzione **combinazione lineare** $F(x) = a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x) + \ldots + a_n \cdot f_n(x)$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$.
Dimostrazione per esercizio

Teorema 12

Se $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ sono continue in x_0, allora anche $F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$ lo è.
Dimostrazione per esercizio

Teorema 13

Se $f_1(x), f_2(x)$ sono continue in x_0 e $f_2(x_0) \neq 0$, allora anche $F(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ lo è.
Dimostrazione per esercizio

Sappiamo che $f(x) = x^2$ è dappertutto continua, così come $g(x) = sin(x)$. Cosa possiamo dire della funzione composta $f[g(x)] = sin^2(x)$ oppure della funzione $g[f(x)] = sin(x^2)$, sono anch'esse continue?
Vale il seguente risultato.

Teorema 14

Se $g(x)$ è continua in x_0, esiste $f[g(x)]$ in un intorno completo di $g(x_0)$ e $f(x)$ è continua in $g(x_0)$, allora anche $f[g(x)]$ è continua in x_0.

Dimostrazione

Per ipotesi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$ e $\lim\limits_{x\to g(x_0)} f(x) = f\left[g(x_0)\right]$, ma allora anche $\lim\limits_{x\to x_0} f\left[g(x)\right] = f\left[g(x_0)\right]$.

Il risultato precedente è importantissimo per il calcolo dei limiti.

Esempio 25

- Infatti, dato che sappiamo che $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+x-1\right)=5$, poiché $sin(x^2 + x - 1)$ è definita in un intorno di 5 e $sin(x)$ è continua per $x = 5$, allora possiamo dire che $sin(x^2 + x - 1)$ è anch'essa continua e quindi che $\lim\limits_{x\to 2} sin\left(x^2+x-1\right) = sin(5)$.
- Invece $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+x-1\right)=5$, poiché $\sqrt{sin(x)}$ non è definita in un intorno di 5, dato che $sin(5) < 0$, non possiamo dire che $\sqrt{sin\left(x^2+x-1\right)}$ sia continua per $x = 2$.

Un analogo risultato al Teorema 14 vale per le funzioni invertibili.

Teorema 15

Se $f(x)$ è invertibile e continua in x_0, allora anche $f^{-1}(x)$ è continua in $f^{-1}(x_0)$.

Dimostrazione omessa

Esempio 26

Sappiamo che la funzione $f(x) = sin(x) : [-\pi/2; \pi/2] \to [-1; 1]$ è invertibile ed è anche continua $\forall\, x \in [-\pi/2; \pi/2]$, allora, per il teorema 15, $f^{-1}(x) = sin^{-1}(x) : [-1; 1] \to [-\pi/2; \pi/2]$ è continua $\forall\, x \in [-1; 1]$.

Verifiche

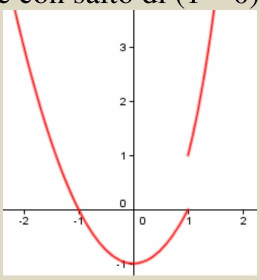
Lavoriamo insieme

Vogliamo stabilire se la funzione $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & se\, x<1 \\ x^3+x-1 & se\ x\ge 1\end{cases}$ è continua e laddove non lo è vogliamo stabilire il tipo di discontinuità. L'unico problema ovviamente può essere in $x = 1$, poiché le due funzioni che, unite, formano la nostra funzione sono continue dappertutto. Abbiamo:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(x^2-1\right)=0; \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(x^3+x-1\right)=1$$

Pertanto in $x = 1$ abbiamo una discontinuità di prima specie con salto di $(1 - 0) = 1$.

Ecco il grafico ottenuto con Geogebra:



Determinare e classificare gli eventuali punti di discontinuità delle seguenti funzioni

Livello 1

1. $f(x)=\dfrac{x\cdot\sqrt{x}}{6-x^2}$ [$x=\sqrt{6}$, II specie] $g(x)=\dfrac{4x}{2-x^2}$ [$x=\pm\sqrt{2}$, II specie]
2. $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{1-2x^2}}$ [$x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, II specie] $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ [$x=1$, III specie]
3. $f(x)=\dfrac{7\cdot\sqrt{x}}{1+x}$ [Continua per $x\ge 0$] $g(x)=\dfrac{x}{sin(x)}$ [$x=k\pi$, II specie]
4. $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-4}$ [$x=2$, III specie] $g(x)=\dfrac{tan(x)}{3+x^4}$ [$x=\pi/2+k\pi$, II specie]
5. $f(x)=sin\left(\sqrt{x}\right)$ [Continua per $x\ge 0$] $g(x)=cos\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ [$x=1$, II specie]

Livello 2

6. $f(x)=\dfrac{1-|x-1|}{x}$ [$x=0$, III specie] $g(x)=\dfrac{|x-2|}{x^2-4}$ [$x=2$, I specie; $x=-2$, II]
7. $f(x)=\dfrac{x-3}{|x-3|}$ [$x=0$, I specie] $g(x)=\dfrac{x+1-|2x-1|}{x-2}$ [$x=2$, III specie]
8. $f(x)=\begin{cases}-x^2-x^3+3 & se\ x<0\\ 2x^3+x^4-5 & se\ x\ge 0\end{cases}$ [$x=0$, I S.] $f(x)=\begin{cases}2x^2-4x+1 & se\ x<-1\\ x^3+2x^2+x & se\ x\ge -1\end{cases}$ [$x=-1$, I S.]
9. $f(x)=\begin{cases}2x+3 & se\, x<0\\ x^2+3x+3 & se\ x\ge 0\end{cases}$ [Continua $\forall x\in\mathbb{R}$] $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & se\, x<0\\ x & se\ x\ge 0\end{cases}$ [Continua $\forall x\in\mathbb{R}$]

Livello 3

10. $f(x)=\dfrac{1+|x-3|}{1-|x-3|}$ [$x=2, 4$, II S.] $g(x)=\dfrac{1-|x-1|}{|x+1|-1}$ [$x=-2$, II S.; $x=0$, III S.]
11. $f(x)=\dfrac{|x+3|+1}{|x-1|-|x+2|}$ [$x=-1/2$, II S.] $f(x)=\dfrac{|x+3|+1}{|x-1|+|x+2|}$ [Continua $\forall x\in\mathbb{R}$]
12. $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<1\\ x & 1\le x<2\\ x^2-2 & x>2\end{cases}$ [$x=1$, I S; $x=2$, III S] $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x\le 1\\ \dfrac{x}{x-1} & 1<x\le 2\\ \dfrac{x-1}{x} & x>2\end{cases}$ [$x=0;1$, II S; $x=2$, I S]

Lavoriamo insieme

La funzione $f(x)=\begin{cases}k\cdot x^2-2x+1 & se\, x<2\\ x^2+(k-1)\cdot x-1 & se\ x\ge 2\end{cases}$ è continua sicuramente per ogni $x<2$ e per ogni $x>2$, poiché indipendentemente dai valori che assume il parametro reale k, abbiamo a che fare con dei polinomi. Non è detto però che sia continua per $x=2$, almeno non per ogni valore di k. Infatti abbiamo

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(k\cdot x^2-2x+1\right)=4k-4+1=4k-3;$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(x^2+(k-1)\cdot x-1\right)=4+2\cdot(k-1)-1=2k+1.$$

Quindi la continuità in $x=2$ ci sarà soltanto se $4k-3=2k+1 \Rightarrow k=2$.

Livello 1

Determinare il valore dei parametri in modo che le funzioni siano continue nel loro dominio

13. $f(x)=\begin{cases} k\cdot x+3 & se\, x<0 \\ x^2+x+1 & se\ x\geq 0\end{cases}$ [∅] $f(x)=\begin{cases} x+k & se\, x<1 \\ x^2+2x+1 & se\ x\geq 1\end{cases}$ [k = 3]

14. $f(x)=\begin{cases} x^2+k\cdot x+1 & se\, x<2 \\ x^2+x-1 & se\ x\geq 2\end{cases}$ [k = 0] $f(x)=\begin{cases} k\cdot sin(x) & se\, x<0 \\ x^2+x & se\ x\geq 0\end{cases}$ [$\forall k\in\mathbb{R}$]

15. $f(x)=\begin{cases} 2kx^3-3x+k & se\ x<1 \\ 3kx^2+2x-3k & se\ x\geq 1\end{cases}$ [k = 5/3] $f(x)=\begin{cases} 1/x & se\ x>1 \\ kx^2+x & se\ x\leq 1\end{cases}$ [k = 0]

Livello 2

16. $f(x)=\begin{cases} x^2-kx-2 & se\ x<0 \\ x^3+k^2x^2+3kx-1 & se\ x\geq 0\end{cases}$ [∅] $f(x)=\begin{cases} (k+1)\cdot x^2-x-3 & se\ x<1 \\ (k^2-2)x^2+x-2 & se\ x\geq 1\end{cases}$ [$k = 0 \vee 1$]

17. $f(x)=\begin{cases} x^2+(3k+1)\cdot x+1 & se\ x<2 \\ (2k^2+1)\cdot x^2+2x-k & se\ x\geq 2\end{cases}$ $\left[k=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{8}\right]$

Livello 3

18. $f(x)=\begin{cases} a\cdot x^2+(3b+1)\cdot x & se\ x<2 \\ (2a+1)\cdot x^2+x-b & se\ x\geq 2\end{cases}$ $\left[a=\dfrac{7b-4}{4}\right]$ $f(x)=\begin{cases} a\cdot x^2+b\cdot x+1 & se\ x<1 \\ b\cdot x^2+2x-a & se\ x\geq 1\end{cases}$ [a = 2/3, $\forall b\in\mathbb{R}$]

19. $f(x)=\begin{cases} a\cdot x^2+b\cdot x & se\ x<-1 \\ x^2+a\cdot x-b & se\ x\geq -1\end{cases}$ [a = ½, $\forall b\in\mathbb{R}$] $f(x)=\begin{cases} kx+2 & x\leq -2 \\ \dfrac{kx-h}{x+1} & -2<x<0 \\ \sqrt{x+h}+\sqrt{kx} & x\geq 0\end{cases}$ [h = 0, k = ½]

20. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{k}{x+k} & x\leq 0 \\ sin^{-1}(x) & 0<x<1 \\ ln(kx) & x\geq 1\end{cases}$ [per la continuità in x = 1, $k = e^{\pi/2}$; discontinua in x = 0, sempre]

21. Dare l'esempio di una funzione continua soltanto per $x > 3$, $x \neq 5$. Giustificare la risposta.
22. Dare l'esempio di una funzione continua soltanto per $x \geq 3$, $x \neq 4$ Giustificare la risposta.

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim\limits_{x\to 0^+} tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Noi sappiamo che $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, d'altro canto si ha anche $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} tan(x)=+\infty$, poiché la funzione $tan^{-1}(x)$ è continua in un intorno destro di zero, si ha: $\lim\limits_{x\to+\infty} tan^{-1}(x)=\dfrac{\pi}{2}$ e quindi alla fine avremo: $\lim\limits_{x\to 0^+} tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

Calcolare i seguenti limiti

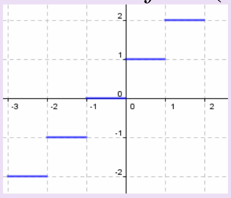
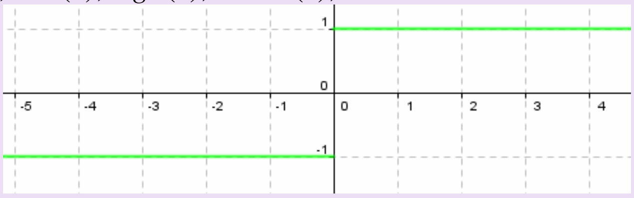
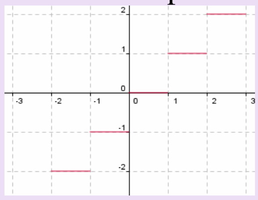
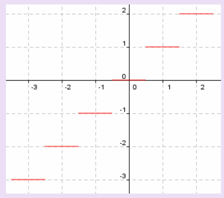
Livello 2

23. $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ [$-\infty$] $\lim\limits_{x\to-\infty} tan\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\right]$ [$+\infty$] $\lim\limits_{x\to+\infty} tan^{-1}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-x}\right]$ [$\pi/2$]

24. $\lim\limits_{x\to+\infty} tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ [0] $\lim\limits_{x\to 0^-} tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ [$-\pi/2$] $\lim\limits_{x\to 2} cos^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ [$\pi/3$]

L'angolo di Geogebra

Con Geogebra possiamo rappresentare facilmente funzioni con discontinuità. Sono per esempio predefinite le funzioni *floor*(x), *ceil*(x), *sign*(x), *round*(x), che hanno tutte di discontinuità di I specie

Invece per rappresentare funzioni che hanno definizioni "a condizione", si usa il comando **Se[<Condizione>, <Allora>, <Altrimenti>]**. Per esempio scrivendo **Se [x < 2, sin(x), cos(x)]** si otterrà il

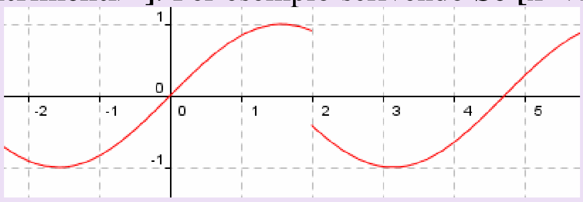


grafico seguente

Giochiamo alla matematica

Il problema della continuità è alla base di diversi paradossi. Ne forniamo un esempio che è quello cosiddetto del *povero ricco*. Cominciamo a porre alcuni fatti.

1. Una persona che possiede una moneta è da considerarsi povero;
2. Dando una sola moneta a una persona povera questa rimane povera.

Sulla base dei precedenti due fatti, sui quali tutti siamo d'accordo, poiché rientrano nel cosiddetto "buon senso", dimostreremo che un povero rimane povero indipendentemente dal numero di monete che possiederà. Infatti, se un povero possedesse n monete, possedendo (n + 1) monete rimane povero. Poiché n può essere qualsiasi numero naturale vuol dire che non esistono ricchi e che, soprattutto, non è possibile arricchire. Ovviamente il fatto paradossale dipende proprio dalla mancanza di continuità che ha l'insieme dei numeri naturali, a cui appartiene il numero con cui contiamo le monete.
Il problema viene esposto anche in altre forme, per esempio in quella del *girino-rana*. Supponiamo di tenere sotto osservazione fotografica un girino, fotografandolo ogni x secondi. Nella prima foto avremo sicuramente un girino e nell'ultima, alla fine dell'evoluzione, avremo certamente una rana. Quindi vuol dire che vi deve essere una foto in cui il girino è diventato rana. Qual è? Come è possibile che il passaggio avvenga in un istante? Tutti questi problemi sono tipici proprio dei fatti reali che sono misurabili solo utilizzando insiemi discreti. Lo stesso problema può associarsi anche ai confini. Dove inizia l'Italia e finisce la Francia? E così via. La conclusione è che ragionando su insiemi discreti con i concetti della continuità, a essi non applicabile, vengono fuori questi paradossi. Negli insiemi discreti bisogna fare delle convenzioni. Così come una persona diviene maggiorenne in un secondo, nel passaggio dalle 23:59:59 alle 00:00:00, così possiamo porre per convenzione che una persona è povera se possiede 100 monete e ricca se ne possiede 101. E così via.

Operazioni aritmetiche con i limiti e forme indeterminate

Il problema

Se conosciamo il limite di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, entrambe per x che tende a uno stesso valore, finito o infinito, sappiamo determinare i limiti delle operazioni i cui operandi sono le date funzioni?

Per semplificare molti risultati conviene usare una particolare terminologia e simbologia.

Definizione 15

Diciamo **retta reale estesa** l'insieme formato dall'insieme $\mathbb{R}$ e dai simboli $\{-\infty; +\infty\}$.

Notazione 7

La retta reale estesa si indica con $\overline{\mathbb{R}}$.

Talvolta possiamo rispondere al quesito posto dal problema in modo intuitivo.

Esempio 27

Supponiamo che sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = 2, \lim_{x \to x_0} g(x) = 3$, questo significa che all'avvicinarsi di x a x_0, $f(x)$ si avvicina a 2 e $g(x)$ a 3, quindi è lecito pensare che si abbia

$$\lim_{x \to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = 2+3=5; \lim_{x \to x_0}\left[f(x)-g(x)\right] = 2-3=-1; \lim_{x \to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = 2\cdot = 6; \lim_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{3}$$

Consideriamo il caso della somma. Quello che sappiamo equivale a dire:

$$2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon,\ \forall x\colon x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1;\ 3 - \varepsilon < g(x) < 3 + \varepsilon,\ \forall x\colon x_0 - \delta_2 < x < x_0 + \delta_2$$

Ma allora se consideriamo $\delta = \min(\delta_1; \delta_2)$, saranno vere entrambe le disuguaglianze, cioè

$$2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon,\ \ 3 - \varepsilon < g(x) < 3 + \varepsilon,\ \forall x\colon x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

Quindi ovviamente avremo $5 - 2\varepsilon < f(x) + g(x) < 5 + 2\varepsilon$, $\forall x\colon x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, cioè, come era ovvio aspettarsi: $\lim_{x \to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = 2+3=5$.

Possiamo perciò enunciare il seguente risultato.

Teorema 16

Nell'ipotesi $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si ha:

- $\lim_{x \to x_0}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \ell \pm m$
- $\lim_{x \to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \ell \cdot m$
- se anche $m \neq 0$, $\lim_{x \to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\ell}{m}$.

Dimostrazione

Per esercizio, sulla falsariga dell'esempio.

Nel Teorema precedente, relativamente alla divisione abbiamo dovuto aggiungere l'ulteriore ipotesi che il limite della funzione al denominatore sia diverso da zero, ciò ovviamente perché il simbolo $\ell/0$ non ha alcun senso nell'insieme dei numeri reali. Cosa succederà allora in questo caso?

Esempio 28

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 2, \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, cosa possiamo dire di $\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$? Cosa accade se il denominatore tende a zero? Facciamo qualche esempio, la frazione $\frac{2}{10^{-50}} = 2\cdot 10^{50}$ è un numero enormemente grande, quindi l'intuizione ci suggerisce che $\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, in cui il segno dipenderà dal segno che avrà la $g(x)$ nel tendere a zero.

Possiamo quindi enunciare il seguente risultato.

Teorema 17

Nell'ipotesi $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \neq 0, \lim_{x \to x_0} g(x) = 0, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si ha: $\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \infty$.

Dimostrazione per esercizio

Abbiamo lasciato irrisolto il caso dell'espressione 0/0. Per questa non possiamo fornire una risposta perché essa dipende dalle funzioni considerate, come vedremo nel seguente esempio.

Esempio 29

Ovviamente abbiamo $\lim_{x \to 0} x = 0, \lim_{x \to 0} x^2 = 0$, quindi sia $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2}$ che $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x}$ sono del tipo 0/0, eppure i loro risultati sono del tutto diversi perché $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$, mentre $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$. Non solo ma anche $\lim_{x \to 0} \frac{a \cdot x}{b \cdot x}, a, b \neq 0$ è del tipo 0/0 e $\lim_{x \to 0} \frac{a \cdot x}{b \cdot x} = \frac{a}{b}$. Quindi in pratica 0/0 può avere infiniti risultati possibili, tutti diversi tra loro.

La forma 0/0 la chiameremo **forma indeterminata** proprio perché il suo risultato, a differenza di altre forme già viste (come 3/2 o 1/0, …) non ha sempre lo stesso risultato.

Consideriamo adesso qualche altro caso.

Esempio 30

Supponiamo che sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = 2, \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, cosa possiamo dire stavolta dei limiti delle operazioni aritmetiche delle due funzioni? Anche in questo caso l'intuito ci suggerisce che la somma e il prodotto divergano positivamente e la differenza diverga negativamente, sul rapporto non ci pronunciamo. Consideriamo sempre la somma. quello che sappiamo equivale a:

$$2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon, \forall x: x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1; g(x) > k > 0, \forall x: x_0 - \delta_2 < x < x_0 + \delta_2$$

Se consideriamo $\delta = \min(\delta_1; \delta_2)$, saranno vere entrambe le disuguaglianze, e perciò

$$f(x) + g(x) > k + 2 + \varepsilon, \forall x: x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

e vista l'arbitrarietà di k e di ε, avremo che: $\lim_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x) \right] = +\infty$.

Abbiamo perciò il seguente risultato

Teorema 18

Nell'ipotesi $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty \in \mathbb{R}, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si ha:

- $\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \mp\infty$
- $\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \begin{cases} \pm\infty & se\ \ell > 0 \\ \mp\infty & se\ \ell < 0 \end{cases}$
- $\lim_{x \to x_0} \left[\frac{g(x)}{f(x)} \right] = \begin{cases} \pm\infty & se\ \ell > 0 \\ \mp\infty & se\ \ell < 0 \end{cases}$.

Dimostrazione per esercizio, sulla falsariga dell'esempio.

Altri due casi rimangono fuori dai precedenti perché legato alle scritte prive di senso ℓ/∞ e $0 \cdot \infty$. Non è difficile capire che accadrà un caso simile a quello già visto per $\ell/0$. Consideriamo per il momento il primo caso.

Teorema 19

Nell'ipotesi $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si ha: $\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = 0$.

Dimostrazione per esercizio

Non possiamo dire niente invece del caso in cui entrambe le funzioni tendono a infinito.

Esempio 31

Ovviamente abbiamo $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty, \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, eppure $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, mentre $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{a\cdot x}{b\cdot x} = \frac{a}{b}$. Quindi anche ∞/∞ è una forma indeterminata.

Non è difficile provare il seguente risultato.

Teorema 20

Sono forme indeterminate le seguenti

- $\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right], x_0 \in \overline{\mathbb{R}}, se \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ (∞/∞)
- $\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right], x_0 \in \overline{\mathbb{R}}, se \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ (0/0)
- $\lim_{x\to x_0}\left[f(x) - g(x)\right], x_0 \in \overline{\mathbb{R}}, se \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty, \lim_{x\to x_0} g(x) = \mp\infty$ (∞ – ∞)
- $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right], x_0 \in \overline{\mathbb{R}}, se \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty, \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ (∞ · 0 o 0 · ∞)
- $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}, se \lim_{x\to x_0} f(x) = 1, \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ (1^∞)
- $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}, se \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ (0^0)
- $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}, se \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ (∞^0)

Dimostrazione Basta fare degli esempi sulla falsariga dei precedenti.

In alcuni casi certe indeterminazioni si possono facilmente risolvere con semplici ragionamenti algebrici.

Esempio 32

Vogliamo calcolare $\lim_{x\to1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^4 + x^2 - 2}$. Ovviamente numeratore e denominatore, essendo entrambi definiti per $x = 1$, tenderanno al valore che si ottiene sostituendo 1 alla x. Quindi otteniamo una forma indeterminata 0/0. Ricordiamo però che il teorema di Ruffini dice che se un polinomio si annulla per $x = a$, allora vuol dire che è divisibile per $(x - a)$, quindi possiamo scrivere: $\lim_{x\to1} \frac{(x-1)\cdot(x^2+x-1)}{(x-1)\cdot(x^3+x^2+2x+2)}$, che può semplificarsi in $\lim_{x\to1} \frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x^2+x-1)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x^3+x^2+2x+2)} = \lim_{x\to1} \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2+2x+2}$, che adesso non è più una forma indeterminata poiché il numeratore tende a 1 + 1 – 1 = 1 e il denominatore tende a 1 + 1 + 2 + 2 = 6, quindi: $\lim_{x\to1} \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2+2x+2} = \frac{1}{6}$.

Il precedente esempio può essere usato per tutte le forme indeterminate 0/0 rapporto di due polinomi. Ovviamente potrebbe capitare che la semplificazione dia luogo ancora a una forma 0/0.

Esempio 33

Vogliamo calcolare $\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 8x + 4}$. Si verifica facilmente che è una forma 0/0. Scomponiamo per $x - 2$, quindi semplifichiamo il fattore comune, ottenendo $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}$, che è ancora un forma 0/0. Quindi dobbiamo ulteriormente scomporre ottenendo $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3}{x^2 - x + 1} = \frac{4+3}{4-2+1} = \frac{7}{3}$, che non è più una forma indeterminata.

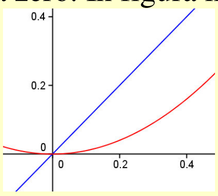
In ogni caso le forme indeterminate precedenti si risolvono sempre dopo al più un numero finito di passaggi perché ogni volta che scomponiamo e semplifichiamo otteniamo dei polinomi di grado inferiore, quindi al massimo dopo n semplificazioni un polinomio di grado n diventa di grado zero, cioè un numero e perciò non ci sarà più indeterminazione.
Per studiare altre forme indeterminate vogliamo porre due nuove definizioni.

Definizione 16

- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, diciamo che $f(x)$ è un **infinitesimo** per x che tende a x_0.
- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, diciamo che $f(x)$ è un **infinito** per x che tende a x_0.

Esempio 34

Sia x che x^2 sono infinitesimi per x che tende a zero. In figura li rappresentiamo graficamente



Vediamo che x^2 sembra arrivare a zero più "rapidamente" rispetto ad x. Del resto se confrontiamo le due funzioni calcolandole negli stessi valori, ad ascisse uguali corrisponderanno ascisse più piccole per x^2 piuttosto che per x. Per esempio per $x = 10^{-50}$ si ha $x^2 = 10^{-100}$, che è un valore "molto più vicino" allo zero che non $x = 10^{-50}$.

Il precedente esempio ci suggerisce di considerare una specie di gerarchia per gli infinitesimi.

Definizione 17

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due infinitesimi per $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, allora se

- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, diciamo che $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine superiore** a $g(x)$;
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, diciamo che $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine inferiore** a $g(x)$;
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0$, diciamo che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infinitesimi dello stesso ordine;**
- $\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, diciamo che $f(x)$ e $g(x)$ **non sono confrontabili**

Esempio 35

Due potenze a esponente positivo di x, sono infinitesimi per x che tende a zero, ma si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^h}{x^k} = \begin{cases} 0 & se\ h > k \\ 1 & se\, h = k \\ \infty & se\ h < k \end{cases}$$

Pertanto in generale x^h, per x che tende a zero e $h > 0$, è un infinitesimo sempre più *grande*, al crescere di h.

Non è difficile capire che avere determinato un modo per confrontare i diversi infinitesimi può facilitare il calcolo di alcuni limiti. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 21 (Principio di sostituzione degli infinitesimi)

Se $f_1(x)$ è infinitesimo di ordine inferiore a $f_2(x)$ allora $\lim_{x \to x_0} \left[f_1(x) + f_2(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f_1(x), x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione

Per ipotesi si ha: $\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 0$, quindi: $\lim_{x \to x_0} \left[f_1(x) + f_2(x) \right] = \lim_{x \to x_0} \left\{ f_1(x) \cdot \left[1 + \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \right] \right\} = \lim_{x \to x_0} f_1(x)$.

Esempio 36

Grazie al teorema precedente possiamo dire che $\lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)^2 - 4 \cdot \sqrt[3]{x-1}}{2 \cdot (x-1)^2 + 3 \cdot \sqrt{x-1}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-4 \cdot \sqrt[3]{x-1}}{3 \cdot \sqrt{x-1}} = -\infty$. Perché $\sqrt[3]{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{3}}$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $\sqrt{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{2}}$, dato che 1/3 < ½.

Analoghe considerazioni possono farsi per gli infiniti.

Definizione 18

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due infiniti per $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, allora se

- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, diciamo che $f(x)$ è un **infinito di ordine superiore** a $g(x)$;
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, diciamo che $f(x)$ è un **infinito di ordine inferiore** a $g(x)$;
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0$, diciamo che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infiniti dello stesso ordine;**
- $\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, diciamo che $f(x)$ e $g(x)$ **non sono confrontabili**

Esempio 37

Due potenze a esponente positivo di x, sono infiniti per x che tende a più infinito, ma si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^h}{x^k} = \begin{cases} 0 & se\ h < k \\ 1 & se\, h = k \\ \infty & se\ h > k \end{cases}$$

Pertanto in generale x^h, per x che tende a zero e $h > 0$, è un infinito sempre più *grande*, al crescere di h.

Anche in questo caso abbiamo un risultato che facilita il calcolo di alcuni limiti.

Teorema 22 (Principio di sostituzione degli infiniti)

Se $f_1(x)$ è infinito di ordine superiore a $f_2(x)$ allora $\lim_{x \to x_0} \left[f_1(x) + f_2(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f_1(x), x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione per esercizio sulla falsariga del Teorema 21.

Esempio 38

Grazie al teorema precedente possiamo dire che $\lim_{x \to +\infty} \frac{45x^2 - x + 13}{x^2 + 3x^3 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{45x^2}{3x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{15}{x} = 0$.

Tenendo conto del precedente esempio abbiamo il seguente immediato risultato.

Teorema 23

Si ha: $\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m} = \begin{cases} \infty & se\ n > m \\ \frac{a_n}{b_m} = \frac{a_n}{b_n} & se\ n = m; n, m \in \mathbb{R} \\ 0 & se\ n < m \end{cases}$.

Dimostrazione per esercizio

Il Principio di sostituzione degli infiniti è utile per risolvere alcune forme indeterminate ($\infty - \infty$).

Esempio 39

Vogliamo calcolare $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2x - 1} \right)$. Ovviamente il primo addendo è un infinito di ordine superiore al secondo pertanto $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2x - 1} \right) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$.

Concludiamo con alcuni utili limiti.

Teorema 24

Si ha: $\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \end{cases}$; $\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$;

$\lim_{x \to 0^+} log_a(x) = \begin{cases} -\infty & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$; $\lim_{x \to +\infty} log_a(x) = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ -\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$.

Dimostrazione omessa

Esempio 40

Possiamo dire che $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^x = 0$ mentre $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^x = +\infty$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim\limits_{x\to 0^+} tan^{-1}(x)$. Ovviamente si ha: $\lim\limits_{x\to 0^+} tan^{-1}(x) = tan^{-1}(0) = 0$.

Calcolare i seguenti limiti

Livello 1

1. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{x-1}$ [+∞] $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2}{x-1}$ [–∞] $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-1}{(x-1)^2}$ [–∞] $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ [+∞]
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ [0] $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x)$ [–∞] $\lim\limits_{x\to 1} sin^{-1}(x)$ [π/2] $\lim\limits_{x\to -1} sin^{-1}(x)$ [–π/2]
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} csc^{-1}(x)$ [+∞] $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} tan(x)$ [+∞] $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} tan(x)$ [–∞] $\lim\limits_{x\to 0} cot(x^2)$ [+∞]
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} ln(x)$ [+∞] $\lim\limits_{x\to -\infty} 2^{-x}$ [+∞] $\lim\limits_{x\to +\infty} 2^{-x}$ [0] $\lim\limits_{x\to +\infty} ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ [–∞] $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ [+∞] $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-x}$ [+∞]

Livello 2

5. $\lim\limits_{x\to 1^+} log_x(2)$ [+∞] $\lim\limits_{x\to 1^-} log_x(2)$ [–∞] $\lim\limits_{x\to 0^+} log_x(3)$ [0]
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} cot^{-1}(x)$ [0] $\lim\limits_{x\to -\infty} cot^{-1}(x)$ [π] $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}/2} sin^{-1}(x)$ [π/4]

Stabilire quali dei seguenti limiti esistono, giustificando la risposta

Livello 3

7. $\lim\limits_{x\to \infty} sin(x)$ [No] $\lim\limits_{x\to +\infty} ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ [Sì] $\lim\limits_{x\to 2} sin(x)$ [Sì]
8. $\lim\limits_{x\to 0^+} cot\left(\dfrac{1}{x}\right)$ [No] $\lim\limits_{x\to +\infty} cot\left(\dfrac{1}{x}\right)$ [Sì] $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x}}$ [Sì]
9. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{-x^2-x-1}\right)$ [No] $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{-x^2-x-1}\right)$ [No] $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{-x-1}\right)$ [Sì]

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^5-7x^4+2x^3+18x^2-24x+9}{21x^5-51x^4+32x^3+8x^2-13x+3}$. Sostituiamo 1 a *x*, ottenendo sia al numeratore che al denominatore 0. Abbiamo quindi che (*x* – 1) è il fattore che provoca l'indeterminazione, dobbiamo perciò "esplicitarlo", scomponendo i due polinomi.

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & 2 & -7 & 2 & 18 & -24 & 9 \\ 1 & & 2 & -5 & -3 & 15 & -9 \\ \hline & 2 & -5 & -3 & 15 & -9 & 0 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c|ccccc|c} & 21 & -51 & 32 & 8 & -13 & 3 \\ 1 & & 21 & -30 & 2 & 10 & -3 \\ \hline & 21 & -30 & 2 & 10 & -3 & 0 \end{array}$$

Pertanto il limite diventa: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}\cdot\left(2x^4-5x^3-3x^2+15x-9\right)}{\cancel{(x-1)}\cdot\left(21x^4-30x^3+2x^2+10x-3\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^4-5x^3-3x^2+15x-9}{21x^4-30x^3+2x^2+10x-3}$

che è ancora una forma indeterminata 0/0, quindi vuol dire che il fattore (*x* – 1) è contenuto più di una volta. Continuando a scomporre otterremo: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}\cdot\left(2x^3-3x^2-6x+9\right)}{\cancel{(x-1)}\cdot\left(21x^3-9x^2-7x+3\right)}$. A questo punto 1 non è più uno zero di almeno uno dei due polinomi, in realtà di entrambi, quindi l'indeterminazione non è più presente e possiamo concludere: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3-3x^2-6x+9}{21x^3-9x^2-7x+3} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$.

Calcolare i seguenti limiti (non tutti sono forme indeterminate)

Livello 1

10. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ [2] $\quad\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$ [½] $\quad\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$ [+∞] $\quad\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x-1}$ [0] $\quad\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2-1}$ [– ½]

11. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-1}{x^2+2x+1}$ [+∞] $\quad\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2+4}$ [0] $\quad\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4}$ [0] $\quad\lim_{x\to 3}\frac{x^3-4x^2+9}{x^2+x-12}$ [3/7]

12. $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x}{x^4+x}$ [–1] $\quad\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{4x^2-2x}$ [2] $\quad\lim_{x\to \pi}\frac{x^2-\pi^2}{x-\pi}$ [2π] $\quad\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2-4}{x+2}\right)^{\frac{x^3+8}{x^2-4}}$ [–1/64]

13. $\lim_{x\to \frac{1}{3}}\left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right)^{\frac{3x-1}{9x^2+3x-2}}$ $\left[\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right]$ $\quad\lim_{x\to -\frac{2}{3}^-}\left(\frac{9x^2-4}{12x^2-x-6}\right)^{\frac{2x-1}{3x+2}}$ [0] $\quad\lim_{x\to -\frac{2}{3}^+}\left(\frac{9x^2-4}{12x^2-x-6}\right)^{\frac{2x-1}{3x+2}}$ [+∞]

14. $\lim_{x\to 4^+}\left(\frac{x^3-3x^2-5x+4}{x^3-5x^2+3x+4}\right)^{\frac{x+2}{x^2-16}}$ [+∞] $\quad\lim_{x\to 4^-}\left(\frac{x^3-3x^2-5x+4}{x^3-5x^2+3x+4}\right)^{\frac{x+2}{x^2-16}}$ [0]

15. $\lim_{x\to 5^+}\left(\frac{x^3-4x^2-6x+5}{x^3-7x^2-5x+75}\right)^{\frac{x^2-7x+10}{x^2+6x-55}}$ [+∞] $\quad\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-8x^2+21x-18}\right)^{\frac{x^2-8x+15}{x^3+x^2-8x-12}}$ $[2^{4/25}]$

16. $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}\right)^{\frac{x^2+6x+5}{x^2-2x-3}}$ [–3] $\quad\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^3+5x^2+8x+4}\right)^{\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x-10}}$ $[2^{2/7}]$

Livello 2

17. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ [½] $\quad\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{x^3-1}$ [+∞] $\quad\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}$ [0] $\quad\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x+2}-4}{x^2-4}$ [+∞]

18. $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{1-3x}-2}{\sqrt{2x+3}-1}$ [– ¾] $\quad\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{6}}{\sqrt{x-2}-1}$ $\left[\frac{5}{\sqrt{6}}\right]$ $\quad\lim_{x\to \sqrt{2}}\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}$ [0] $\quad\lim_{x\to \sqrt{3}}\frac{2x-\sqrt{12}}{\sqrt{x^2+1}-2}$ $\left[\frac{4}{\sqrt{3}}\right]$

19. $\lim_{x\to \sqrt{5}}\frac{\sqrt{x^2+20}-5}{1-\sqrt{x^2-4}}$ [–1/5] $\quad\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-5x^2+4x-1}{2x^3-3x^2+1}$ [1/3] $\quad\lim_{x\to 2}\frac{3x^3-10x^2+4x+8}{x^3-2x^2+x-2}$ [0]

20. $\lim_{x\to 1^+}\frac{3x^3+10x^2+11x+4}{x^3-x^2+3x-3}$ [+∞] $\quad\lim_{x\to 1}\frac{x^4-7x^3+17x^2-17x+6}{x^4+2x^3-4x^2-2x+3}$ [¼]

21. $\lim_{x\to -1^-}\frac{x^4+6x^3+12x^2+10x+3}{x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3}$ [+∞] $\quad\lim_{x\to -2}\frac{x^5+6x^4+11x^3+2x^2-12x-8}{x^5+6x^4+13x^3+14x^2+12x+8}$ [3/5]

22. $\lim_{x\to -1}\frac{x^5+6x^4+8x^3-2x^2-9x-4}{4x^5+5x^4+10x^3+12x^2-6x-9}$ [0] $\quad\lim_{x\to 3^+}\frac{x^5+25x^4-9x^3-9x^2-54x+54}{4x^5-25x^4+46x^3-34x^2+42x-9}$ [+∞]

23. $\lim_{x\to 2}\frac{4x^5-19x^4+24x^3+7x^2-28x+12}{7x^5-29x^4+39x^3-33x^2+32x-4}$ [3/13] $\quad\lim_{x\to -3^-}\frac{x^4+7x^3+16x^2+15x+9}{x^5+10x^4+37x^3+63x^2+54x+27}$ [–∞]

Determinare il valore del parametro *k* in modo tale che sia vera l'uguaglianza

Livello 2

24. $\lim_{x\to 2}\frac{k\cdot x^3-4x^2+x+6}{x^3-(k+6)\cdot x+6}=-\frac{3}{5}$ [1] $\quad\lim_{x\to 2}\frac{k\cdot x^3-4x^2+x+6}{x^3-(k+6)\cdot x+6}=-4$ [$k\neq 1$]

25. $\lim_{x\to -2}\frac{(2k+1)\cdot x^3+4x^2+x-6}{x^3-7\cdot x+k-6}=-1$ [∅] $\quad\lim_{x\to -2}\frac{(2k+1)\cdot x^3+4x^2+x-6}{x^3-7\cdot x+k-6}=-\frac{3}{5}$ [0]

26. $\lim_{x\to -1}\frac{x^5+(3k-2)\cdot x^4+19x^3+25x^2+16x+4}{x^5+8x^4+25x^3+(7k+3)\cdot x^2+28x+8}=0$ [0] $\quad\lim_{x\to 2}\frac{k\cdot x^3-7x^2+4x+2k}{(k+1)\cdot x^4-19x^3+42\cdot x+4k}=\frac{1}{2}$ [$k\neq 2$]

Livello 3

Studiare i limiti seguenti al variare del parametro reale *k*

27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{k\cdot x^3-x^2+1}{(2k+1)\cdot x^2-1}$ $\left[\begin{cases}\frac{1}{2} & k\neq 0\\ -1 & k=0\end{cases}\right]$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{k\cdot x^4-k}{(3k+2)\cdot x-2}$ [0]

28. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3k\cdot x^2-x+k}{x^3+1}$ $\left[\begin{cases}\infty & k\neq -1/4\\ 1/6 & k=1/4\end{cases}\right]$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(k+1)\cdot x^2-4k-4}{(k+2)\cdot x-k-2}$ $\left[\begin{cases}\dfrac{4k-8}{k+2} & k\neq -2\\ \infty & k=-2\end{cases}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^5-x^4+2x^3+8x^2-2x+9}{21x^5-5x^4+3x^3-x+3}$. Applicando il principio di sostituzione degli infiniti il limite diventa: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\cancel{x^5}}{21\cancel{x^5}}=\dfrac{2}{21}$.

Usando il principio di sostituzione degli infiniti calcolare i seguenti limiti.

Livello 1

29. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4-x^3+7x^2-6}{2x^3-x^4-x^2-x}$ [3] $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4+x^5+2x^2+3}{2x^4-x^5-4x^2-x}$ [–1]

30. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^5-x^4+x^3+18}{-5x^4+3x^3+18x^2-3x+23}$ [–∞] $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^4+x^3-32x^2-49x-4478}{2x-3x^4+x^3+2x^5-1}$ [0]

31. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2}x^4-\sqrt{3}x^3+x^2-x}{1-\sqrt{5}x^4+\pi\cdot x^3-3}$ $\left[-\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right]$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2ex^5-\sqrt{2}x^4+\pi^2x^3+x^2-2}{\pi^5x^4+3x^3-\sqrt{3}x^2+ex^5-1}$ [2]

32. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x^2+1}{3x^2-x}\right)^{\frac{7x-2}{3x+1}}$ $[(5/3)^{7/3}]$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x+1}{7x-3}\right)^{\frac{x^2-x}{3x^2+x-1}}$ $\left[\sqrt[3]{\dfrac{4}{7}}\right]$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x+3}{7x}\right)^{\frac{x-2}{x+3x^2-1}}$ [1]

33. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{11x+1}{5x-1}\right)^{\frac{-9x^2}{2x+1}}$ [0] $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{12x+1}{41x-1}\right)^{\frac{2-3x^2}{2x+5}}$ [+∞] $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{12x+1}{41x-1}\right)^{\frac{2+3x^2}{2x+5}}$ [0]

34. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^3-x^2-5}{3x^3-x^2+x}\right)^{\frac{3x+2}{x-1}}$ [8/27] $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^3-x^4-2x+1}{-2x^4+x^2+x^3}\right)^{\frac{x}{x^2-6}}$ [1]

35. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^3-x^2-x}{7x^2-5}\right)^{\frac{3x^2-x+1}{x^2+3x-5}}$ [+∞] $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^3-x^2+2x}{x^3-x^2+2x-1}\right)^{\frac{-2x^3-x+5}{47x^2-x-1}}$ [0]

36. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^3+x^2+4x}{3x^3-x-2}\right)^{\frac{2x^2+x+4}{-x-2}}$ [0] $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^3+x^2-8}{3x^3+x^2+8x}\right)^{\frac{3x^2+x+2}{3x-10}}$ [+∞]

37. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt[3]{x^4}-7\sqrt[7]{x^4}+2\sqrt[4]{x^3}+18\sqrt[3]{x^2}-2}{21\sqrt[4]{x^5}-51\sqrt[3]{x^4}+32\sqrt[4]{x^3}+13x+3}$ [–2/51] $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[7]{x^5}+2\sqrt[4]{x^7}+8\sqrt[3]{x^2}-4x}{2\sqrt[4]{x^5}-5\sqrt[3]{x^4}+3\sqrt[4]{x^7}+\sqrt[3]{x^2}-13}$ [2/3]

38. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{12\sqrt[3]{x^5}-17\sqrt[7]{x^4}-8\sqrt[3]{x^8}-24}{2\sqrt[4]{x^5}-5\sqrt[3]{x^8}+\sqrt[3]{x^7}-3x}$ [8/5] $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[7]{x^2}+2\sqrt[4]{x^3}+2x+9}{2\sqrt[4]{x^3}-5\sqrt[7]{x^4}+18\sqrt[6]{x^5}-13}$ [+∞]

39. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-7\sqrt[3]{x^{11}}+12\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-1}{2\sqrt[9]{x^7}+5\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^5}-5}$ [–∞] $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5\sqrt[13]{x^4}-\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt[7]{x^2}-2\sqrt[3]{x^2}+8\sqrt[7]{x^8}-3x}$ [0]

Livello 2

40. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ [–1] $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ [1] $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x-1}{x^{5000}+2}$ [+∞] $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2^x}$ [0] $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ln(x)}{x}$ [0] $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{3x+2}{x^2-x}}$ [0]

Determinare il valore del parametro *k* in modo tale che sia vera l'uguaglianza

41. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(2+5k)x^3+x-1}{(5k-2)\cdot x^3+x}=\frac{7}{3}$ [1] $\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{(5k+3)x^5-x^3+x^2}{(2-7k)\cdot x^5-x^4+3}=-\frac{5}{6}$ [28/5]

42. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(8-3k)x^4-2x^2+1}{(5+2k)\cdot x^4-3x^3}=\frac{11}{3}$ [–1] $\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{(4k+1)x^3-x^2+1}{(5k-8)\cdot x^3-2x+3}=\frac{9}{5}$ [77/25]

Livello 3

43. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(2k-1)x^3-3x^2}{(4k+2)\cdot x^2-x+3}=-\frac{3}{4}$ [½] $\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{(3-4k)x^3-x^2+1}{(2k+1)\cdot x^2-2x}=+\infty$ [–½ < *k* < ¾]

44. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(8k+1)x^2-x+1}{(5k+3)\cdot x+3}=-\infty$ [–3/5 < *k* < –1/8] $\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{(4-3k)x^3-1}{(7-2k)\cdot x^4-2x+3}=0$ [*k* ≠ 2/7]

45. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(3-4k)x^3-2x^2}{(7k+3)\cdot x^2+2x-1}=0$ [∅] $\quad\lim_{x\to-\infty}\frac{(11k+1)x^3-x^2+2x-1}{(5k+7)\cdot x^4-2x^5+1}=0$ [∀*k*∈ℝ]

Studiare il valore del limite al variare del parametro *k*

46. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(k+1)\cdot x^3-x^2+x}{x^3-(k+1)\cdot x}$ $\left[\begin{cases}k+1 & k\neq-1\\ 0 & k=1\end{cases}\right]$ $\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{(2k-1)\cdot x^3-x^2+1}{(k+6)\cdot x^3+1}$ $\left[\begin{cases}\frac{2k-1}{k+6} & k\notin\left\{\frac{1}{2},-6\right\}\\ 0 & k=\frac{1}{2}\\ -\infty & k=-6\end{cases}\right]$

47. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(2k+1)\cdot x^4+4x^3}{k\cdot x^3-7\cdot x+k}$ $\left[\begin{cases}+\infty & k<-\frac{1}{2}\vee k>0\\ -\infty & -\frac{1}{2}<k\le 0\\ -8 & k=-\frac{1}{2}\end{cases}\right]$ $\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{(k^2-1)\cdot x^3+x^2+k}{(k+1)\cdot x^3-x}$ $\left[\begin{cases}k-1 & k\neq-1\\ -\infty & k=-1\end{cases}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x-1}-\sqrt{7x+2}\right)$. Abbiamo a che fare con una forma indeterminata +∞ – ∞. Per eliminarla possiamo razionalizzare l'espressione:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{3x-1}-\sqrt{7x+2}\right)\cdot\left(\sqrt{3x-1}+\sqrt{7x+2}\right)}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{7x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1-7x-2}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{7x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x-1}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{7x+2}}$$

Adesso applichiamo il principio di sostituzione degli infiniti, ottenendo: $\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{\sqrt{3x}+\sqrt{7x}}=-\infty$.

In effetti tale principio potevamo applicarlo subito: $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x}-\sqrt{7x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)\cdot x=-\infty$.

Calcolare i seguenti limiti

Livello 1

48. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{13x-2}-\sqrt{13x+8}\right)$ [0] $\quad\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+2x}\right)$ [–1]

49. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2-x-1}-\sqrt{4x^2+5}\right)$ [–∞] $\quad\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-3}-\sqrt{2x^2+x}\right)$ $\left[-\sqrt{2}/4\right]$

50. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-8}-\sqrt{17x+3}\right)$ [–∞] $\quad\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+x-1}\right)$ [– ½]

51. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2-x+1}-\sqrt{x^2+2x-4}\right)$ [$+\infty$] $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{-x^3-x+3}-\sqrt{-2x^3+x^2}\right)$ [$-\infty$]

Livello 2

52. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{4x}}$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{2x+3}}{\sqrt{4x^2-2x+1}-\sqrt{x+2}}$ [½]

53. $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{5x+1}-\sqrt{x^2-2x}}$ [–1] $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{5x^2+2}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{7x^2-5}-\sqrt{3x+1}}$ $\left[\frac{\sqrt{35}}{7}\right]$

54. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2}-\sqrt{5x+3}}{\sqrt{7x^2+2}-\sqrt{x-2}}$ $\left[\frac{\sqrt{14}}{7}\right]$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+5}-\sqrt{2x^2-x}}{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x-1}}$ $\left[\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right]$

55. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3^x-1}{10^{58}\cdot x^5+1}$ [$+\infty$] $\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x-3^x}{4^x+x}$ [0] $\lim_{x\to+\infty}\frac{8^x-1}{3^x-1}$ [$+\infty$]

56. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot 2^x+1}{7\cdot 2^x+x-1}$ [3/7] $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-5^x}{4^x}$ [$-\infty$] $\lim_{x\to+\infty}\frac{5\cdot\pi^x+\sqrt{3^x}}{\pi^{x+1}+x^2}$ [5/π]

Livello 3

57. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{5x+3}-\sqrt{5x-2}}$ [$-\infty$] $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^3-1}-\sqrt{2x^3+3}}{\sqrt{3x^2-3}-\sqrt{3x^2-x+1}}$ [0]

58. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{4x^2-3}}{3\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{9x^2+1}}$ [2/3] $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{5-x}}{5\sqrt{x^2-1}-\sqrt{25x^2+x+3}}$ [0]

Determinare il valore del parametro *k* in modo tale che sia vera l'uguaglianza

Livello 3

59. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-(k-1)\cdot x}-\sqrt{k\cdot x^2-2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ [2]

60. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(4k+1)\cdot x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+(3k-1)\cdot x-2}\right)=1$ [∅]

61. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(4k+1)\cdot x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+(3k-1)\cdot x-2}\right)=2$ [0]

62. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(4k+1)\cdot x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+(3k-1)\cdot x-2}\right)=+\infty$ [$k>0$]

Studiare il valore del limite al variare del parametro *k*

63. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-(k-1)\cdot x}-\sqrt{(k+1)\cdot x^2-1}\right)$ $\left[\begin{cases}+\infty & k>0\\ -\infty & -1<k<0\\ 1/2 & k=0\end{cases}\right]$

64. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(4k-1)\cdot x^2+3}-\sqrt{x^2+(k-1)\cdot x-2}\right)$ $\left[\begin{cases}+\infty & k>1/2\\ -\infty & 1/4\le k<1/2\\ 0 & k=1/2\end{cases}\right]$

65. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(2k+1)\cdot x^2+x}-\sqrt{(2k-1)\cdot x^2-2}\right)$ [$+\infty$ se $k>$ ½; Non ha senso per $k\le$ ½]

66. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{kx^2+x+1}-\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{(k+1)\cdot x^2+x+1}-\sqrt{(k+1)\cdot x^2+1}}$ $\left[\begin{cases}\sqrt{2} & k=1\\ +\infty & k>1\end{cases}\right]$

67. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(k-1)x^2+k\cdot x}-\sqrt{(k-1)\cdot x^2+1}}{\sqrt{(2k-1)\cdot x^2+2}-\sqrt{(2k-1)\cdot x^2+k\cdot x-1}}$ $\left[\begin{cases}-\sqrt{\frac{2k-1}{k-1}} & k>1\\ -\infty & k=1\end{cases}\right]$

Teoremi sulle funzioni continue

Le funzioni continue godono di molte altre proprietà. Per esempio il fatto che la convergenza avvenga in modo "continuo" e non "a salti", implica il seguente risultato.

Teorema 25 (di permanenza del segno)

Se $f(x)$ è continua in x_0 e $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0 (< 0)$ allora esiste $I_r(x_0)$, per cui $f(x) > 0$ (< 0), $\forall\, x \in I_r(x_0)$.

Dimostrazione

Consideriamo il caso che si abbia $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0$, noi sappiamo che ciò significa che per un dato numero positivo ε esiste un intorno $I_r(x_0)$ per il quale si ha: $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$. Ma allora se scegliamo un ε tale che sia $\ell - \varepsilon > 0$, il che può sempre farsi poiché $\ell > 0$, avremo che $f(x) > \ell - \varepsilon$, $\forall\, x \in I_r(x_0)$, che è proprio quello che volevamo dimostrare. Analoga dimostrazione se fosse $\ell < 0$ o se ℓ è uno dei simboli $\pm\infty$.

Esempio 41

Vogliamo provare che il teorema precedente non è invertibile, nel senso che non è detto che se una funzione è positiva (o negativa) in un intorno completo di x_0, allora anche $\lim_{x \to x_0} f(x)$ è positivo (o negativo).

Intanto il limite potrebbe anche non esistere, per esempio non esiste $\lim_{x \to +\infty} sin^2(x)$. Ma anche se il limite esistesse, come per esempio $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$, non è positivo, nonostante sia $x^2 > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Se poi le funzioni continue sono definite su intervalli chiusi valgono anche molte altre importanti proprietà.

Teorema 26

Se $f(x)$ è continua in $[a; b]$, allora essa è limitata in $[a; b]$.

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare che non è possibile che esista $x_0 \in [a; b]$ per il quale si abbia $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$. Infatti per la continuità è $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in [a;b]$.

In effetti vale un risultato anche più importante.

Teorema 27 (di Weierstrass)

Se $f(x)$ è continua in $[a; b]$, allora essa ammette in $[a; b]$ minimo e massimo.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che non esista il minimo, cioè si abbia $f(x) \neq \inf_{x \in [a,b]} f(x) = I, \forall x \in [a;b]$, allora possiamo considerare la funzione $g(x) = \frac{1}{f(x) - I}$ che è ovviamente continua in tutto $[a; b]$, dato che il denominatore non si annulla mai. Questa funzione, per il teorema precedente, deve essere limitata, ma ciò non è vero. Infatti per le proprietà dell'estremo inferiore $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} \in [a,b] : f(\bar{x}) < I + \varepsilon$, ma allora $f(\bar{x}) - I < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{f(\bar{x}) - I} = g(\bar{x}) > \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$, che vuol dire che la funzione g non è limitata superiormente.

Essendo arrivati a una conclusione assurda vuol dire che è falsa l'ipotesi che la f non abbia minimo, quindi c'è l'ha. Analogo procedimento possiamo fare per il massimo.

Esempio 42

Vogliamo mostrare che entrambe le ipotesi di continuità e di definizione su un intervallo chiuso sono indispensabili per la validità del teorema di Weierstrass.

- Per esempio la funzione $f(x) = 1/x$, definita in qualsiasi intervallo chiuso che contiene lo zero, non è continua per $x = 0$ e si ha: $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Quindi la funzione non è limitata in ogni intervallo che contiene lo zero.
- Invece la funzione $f(x) = x$, continua in tutti i reali, se la definiamo in un intervallo non limitato, per esempio in $[1; +\infty)$, in essa ha minimo, per $x = 1$, ma non ha massimo, poiché $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$.
- Ovviamente possiamo anche avere funzioni non continue che invece hanno massimo e minimo, anche in intervalli non limitati. Per esempio la funzione $sin(1/x)$, che non è continua in $x = 0$, ha minimo, che vale ovviamente -1, e massimo, che vale 1, in qualsiasi intervallo, limitato o illimitato, contenente o no, $x = 0$.

I protagonisti

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass nacque a Ostenfelde il 31/10/1815. Per ragioni di lavoro il padre si spostò frequentemente per la Germania, Karl mostrò subito spiccata predisposizione per la matematica, nonostante facesse dei lavoretti per aiutare la famiglia. All'Università però, per volere paterno, si iscrisse a un corso che prevedeva sbocchi lavorativi nell'Amministrazione pubblica. Comunque continuò a studiare matematica in modo autonomo. Finalmente, dopo avere abbandonato gli studi stabiliti dal padre, si iscrisse all'accademia di Münster, dove cominciò a studiare matematica, conseguendo l'abilitazione all'insegnamento nelle scuole secondarie nel 1840. Cominciò a insegnare l'anno successivo. Nonostante pubblicasse abbastanza frequentemente articoli di alta matematica, rimase sconosciuto ai più, fino al 1854, anno in cui pubblicò un importante articolo di matematica superiore su una prestigiosa rivista. Così cominciò a insegnare all'Università. Il teorema che oggi porta il suo nome è contenuto in lavori del 1859/60. Morì a Berlino il 19/02/1897 dopo 3 anni di invalidità quasi totale.

Un altro risultato intuitivo è quello che può essere la traduzione matematica dell'ovvio fatto che se passiamo dalla Francia all'Italia, dobbiamo passare per forza per il loro confine.

Teorema 28 (di esistenza degli zeri)

Se $f(x)$ è continua in $[a; b]$ e assume valori di segno contrario agli estremi, cioè $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste almeno un valore c interno ad $[a; b]$ in cui la funzione si annulla, cioè $f(c) = 0$.
Dimostrazione omessa

Non abbiamo presentato la dimostrazione, ma nell'esempio seguente facciamo vedere come possa ottenersi.

Esempio 43

Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 + x + 1$, in $[-1; 0]$. Si ha: $f(-1) = (-1)^3 + (-1) + 1 < 0$, mentre invece si ha $f(0) = 0^3 + 0 + 1 > 0$. Dato che dobbiamo passare da -1 a 1, dobbiamo ovviamente passare anche per lo zero. Dove potrebbe essere questo zero?
Proviamo a cercarlo nel punto di mezzo del segmento: $f(-½) = (-½)^3 - ½ + 1 = 3/8 > 0$. Non lo abbiamo trovato, ma avendo ottenuto un valore positivo, possiamo restringere la nostra ricerca all'intervallo $[-1; -½]$, perché ancora una volta abbiamo un intervallo in cui si passa da un numero positivo, 3/8, a uno negativo, -1.
Proviamo ancora una volta a vedere cosa accade nel punto medio: $\frac{-1-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{3}{4}$, $f(-¾) = -11/64 < 0$. Ancora una volta non siamo riusciti a trovare lo zero, ma abbiamo di nuovo ridotto l'intervallo di ricerca, che adesso è $[-¾;-½]$. Ovviamente il procedimento potrebbe non terminare mai, ma è facile capire che stiamo effettuando un procedimento di limite, che può farsi grazie alla continuità della funzione, che ci farà arrivare allo zero con il grado di approssimazione voluto. Per il momento possiamo dire che la soluzione x verifica la disuguaglianza: $-¾ = -0,75 < x < -½ = -0,5$. Quindi è un numero negativo la cui cifra intera è 0, mentre la sua prima cifra decimale è 5, 6 o 7. Continuando il procedimento possiamo determinare le successive cifre decimali, almeno in linea teorica, dato che sono infinite.

Il teorema precedente è importante proprio per risolvere equazioni che non sappiamo risolvere con metodi elementari. Ovviamente la risoluzione sarà approssimata. Nelle verifiche riprenderemo e chiariremo la questione.

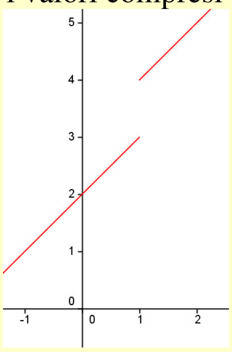
Una generalizzazione del teorema precedente è la seguente.

Teorema 29 (di esistenza dei valori intermedi)
Se $f(x)$ è continua in $[a; b]$, allora la funzione assume ogni valore compreso tra il suo minimo e il suo massimo, cioè comunque consideriamo $z \in \left[\min_{x\in[a,b]}, \max_{x\in[a,b]}\right]$ esiste almeno un c: $a < c < b$ per cui si ha $f(c) = z$.

Dimostrazione
Per il teorema di Weierstrass la funzione ammette minimo, m, e massimo, M, assoluti. quindi vuol dire che esistono $x_1, x_2 \in [a; b]$, per cui si ha: $f(x_1) = m$ e $f(x_2) = M$, supponiamo che sia anche $x_1 < x_2$, il che non inficia la dimostrazione. Adesso consideriamo la funzione $f(x) - z$, in cui $z \in (m; M)$, questa ovviamente è continua in $[a; b]$, quindi anche in $[x_1; x_2]$. E si ha ovviamente $f(x_1) - z < 0$, e $f(x_2) - z > 0$, quindi possiamo applicare a essa il teorema di esistenza degli zeri nell'intervallo $[x_1; x_2]$. Perciò esiste $c \in [x_1; x_2] \subseteq [a; b]$, per cui si ha: $f(c) - z = 0 \Rightarrow f(c) = z$, che è proprio ciò che volevamo provare.

Ancora una volta vogliamo far vedere che le ipotesi del teorema sono tutte indispensabili.

Esempio 44
- Consideriamo di nuovo la funzione $f(x) = 1/x$, per la quale si ha $f(-1) = -1 < 0$ e $f(2) = ½ > 0$, eppure la $1/x \neq 0$ sempre. Il teorema di esistenza degli zeri non può essere applicato perché la funzione non è continua in tutto [–1; ½].
- Analogamente è indispensabile la condizione di continuità. Per esempio la funzione $f(x) = \begin{cases} x+2 & x<1 \\ 3+x & x \geq 1 \end{cases}$, non è continua in $x = 1$, nell'intervallo [0; 2], eppure ha ugualmente minimo, 2, e massimo, 5. Ma non è vero che assume tutti i valori compresi tra 2 e 5, come mostrato nel grafico seguente.



Verifiche

Stabilire a quali delle seguenti funzioni si può applicare il teorema della permanenza del segno nel punto indicato

1.	$f(x) = x^2 + x + 1$, $x_0 = 1$	[Sì]	$f(x) = x^2 + x$, $x_0 = 0$	[No]
2.	$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}, x_0 = 1$	[No]	$f(x) = \sqrt{x+1}, x_0 = -1$	[No]
3.	$f(x) = sin(2x + 1)$, $x_0 = 0$	[Sì]	$f(x) = tan(x - 2)$, $x_0 = 2 + \pi/2$	[No]
4.	$f(x) = ln(x^2 - 2)$, $x_0 = \sqrt{3}$	[No]	$f(x) = e^{1/x}$, $x_0 = 0$	[No]
5.	$f(x) = sin^{-1}(x + 1)$, $x_0 = 1$	[No]	$f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}, x_0 = -2$	[Sì]

Stabilire a quali delle seguenti funzioni si può applicare il teorema di Weierstrass, nell'intervallo indicato. Per quelle per le quali non è possibile, dire se hanno minimo o massimo assoluti

6. $f(x) = x^2 + x + 1, x \in [1; +\infty)$ [No; $x_m = 1$; no Max] $f(x) = \lceil x \rceil, x \in [2; 5]$ [No; $x_m = 2$; $x_M = 5$]

7. $f(x) = x + 2, x \in (1; 3)$ [No; No min, no Max] $f(x) = \frac{1}{x^2+1}, x \in [-2; 2]$ [Sì]

8. $f(x) = sin\left(\frac{3x+1}{x-2}\right), x \in [1; 3]$ [No; $x_m = -1$, $x_M = 5$] $f(x) = \frac{1}{x^2-1}, x \in [2; 3]$ [Sì]

9. $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}, x \in [1; 3]$ [No; No min, no Max] $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}, x \in [3; 5]$ [Sì]

10. $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}, x \in [-3; -1]$ [No, $x_m = -1$; $x_M = -3$] $f(x) = sin^{-1}(2x + 1), x \in [-1; 0]$ [Sì]

Stabilire a quali delle seguenti funzioni si può applicare il teorema di esistenza degli zeri, nell'intervallo indicato. Per quelle per le quali non è possibile, dire se ugualmente si annullano nel dato intervallo

11. $f(x) = x^2 + x, x \in [-1; 1]$ [No; $x_0 = -1$] $f(x) = \lfloor x + 2 \rfloor, x \in [0; 5]$ [No; No]

12. $f(x) = x^3 + 2x - 1, x \in [-2; 2]$ [Sì] $f(x) = e^{2x+1}, x \in [-5000; 7000]$ [No; No]

13. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}, x \in [-k; k], k \neq 0$ [No; No] $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}, x \in [-1; 2]$ [No; No]

14. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, x \in [-3; 3]$ [No; $x_0 = -2$] $f(x) = (x + 1)^{x-1}, x \in [-1; 1]$ [No; No]

15. $f(x) = log_2(x + 1), x \in [-½; 1]$ [Sì] $f(x) = log_{x+1}(2), x \in [-½; 1]$ [No; No]

Lavoriamo insieme

Data l'equazione $7x^3 - 2x^2 + 8x + 5 = 0$, vogliamo determinare una sua soluzione approssimata al primo decimale. Possiamo usare il teorema di esistenza degli zeri, cercando un intervallo in cui la funzione associata all'equazione assume valori di segno contrario.
Si ha: $7 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 5 = -12 < 0$; $7 \cdot 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 + 5 = 5 > 0$, quindi una soluzione appartiene a $[-1; 0]$, cioè la sua parte intera è -0. Adesso dobbiamo trovare la sua prima cifra decimale. Calcoliamone il valore nel punto medio $x = -½$: $7 \cdot (-½)^3 - 2 \cdot (-½)^2 + 8 \cdot (-½) + 5 < 0$
Quindi l'intervallo in cui la funzione assume valori di segno opposto è diventato: $[-½; 0]$. Consideriamo di nuovo il suo punto medio $x = -¼$: $7 \cdot (-¼)^3 - 2 \cdot (-¼)^2 + 8 \cdot (-¼) + 5 > 0$. Perciò adesso cerchiamo nell'intervallo $[-½; -¼]$. Avendo notato che il valore calcolato è "abbastanza" lontano da zero, piuttosto che cercare nel punto medio del segmento potremmo cercare in un valore più vicino all'estremo sinistro, per esempio in $-0,4$. Abbiamo: $7 \cdot (-0,4)^3 - 2 \cdot (-0,4)^2 + 8 \cdot (-0,4) + 5 > 0$ perciò l'intervallo è $[-0,5; -0,4]$. Ma allora abbiamo finito, perché tutti i valori interni al dato intervallo hanno prima cifra decimale 4, quindi l'approssimazione cercata è $-0,4$. Se continuiamo il procedimento possiamo ottenere altre cifre decimali, per esempio le prime tre cifre esatte sono: $-0,474$.

Determinare una soluzione approssimata al primo decimale delle equazioni seguenti

Livello 2

16. $3x^3 - x^2 + x - 4 = 0$ [$x \approx 1,1$] $3x^3 + x^2 + 3x - 4 = 0$ [$x \approx 0,7$]

17. $2x^3 + 4x^2 + 3x - 4 = 0$ [$x \approx 0,6$] $2x^3 - 4x^2 + 3x - 5 = 0$ [$x \approx 1,9$]

18. $4x^3 + x^2 - 3x - 5 = 0$ [$x \approx 1,2$] $5x^3 - 7x^2 - x - 5 = 0$ [$x \approx 1,8$]

19. $x^4 - x^2 - x - 5 = 0$ [$x \approx -1,5 \vee x \approx 1,7$] $x^4 + x^2 - 2x - 1 = 0$ [$x \approx -0,4 \vee x \approx 1,1$]

20. $x^5 + x^3 - 1 = 0$ [$x \approx 0,8$] $x^5 - x^3 - x - 2 = 0$ [$x \approx 1,4$]

Livello 3

21. $x - sin(x - 1) = 0$ [$x \approx -0,9$] $x + ln(x + 2) = 0$ [$x \approx -0,4$]

22. $x + 2 - e^x = 0$ [$x \approx -1,8 \vee x \approx 1,1$] $sin(x) = e^x$ [$x \approx -3,1$]

23. $sin(x) = ln(x)$ [$x \approx 2,2$] $e^x + ln(x) - 4 = 0$ [$x \approx 1,3$]

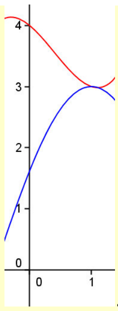
I limiti notevoli

Il problema

Il seguente limite $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}$ è una forma indeterminata del tipo 0/0, eppure non riusciamo a trovare un fattore indeterminante come successo nel caso dei limiti del rapporto di polinomi, poiché la funzione al numeratore non è un polinomio. Come possiamo allora risolvere l'indeterminazione?

Il precedente problema può essere risolto con un semplice ragionamento.

Esempio 45

In figura abbiamo rappresentato due funzioni in un opportuno intorno di 1 

. Entrambe le funzioni sono continue per $x = 1$ e si ha $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = 3$, ma allora se riuscissimo a "inserire" una terza funzione fra le due, in questo intorno, possiamo concludere che anche per essa si avrà $\lim_{x\to 1} h(x) = 3$?

La questione sollevata nell'esempio precedente è risolta dal seguente risultato.

Teorema 30 (del confronto)

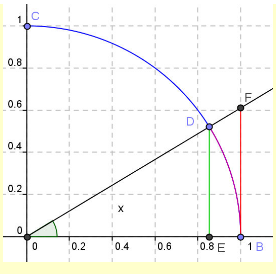
Siano $f(x)$, $h(x)$, $g(x)$ funzioni continue in un intorno di x_0 e, nello stesso intorno, si abbia: $f(x) \le h(x) \le g(x)$, si abbia inoltre $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora si avrà anche $\lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$.

Dimostrazione

Consideriamo il caso che il limite sia finito, in modo analogo si procederà se infinito. Per ipotesi abbiamo che per ogni numero positivo ε esistono due intorni di x_0, $I_{r_1}(x_0), I_{r_2}(x_0)$, per cui si ha: $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon, \forall x \in I_{r_1}(x_0); \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon, \forall x \in I_{r_2}(x_0)$, considerando il più piccolo fra i due intorni e l'intorno in cui è verificata la disuguaglianza fra le tre funzioni, che indichiamo genericamente con $I_r(x_0)$, varranno entrambe le scritte, cioè avremo: $\ell - \varepsilon < f(x) \le g(x) < \ell + \varepsilon, \forall x \in I_r(x_0)$, ma allora è anche $\ell - \varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < \ell + \varepsilon, \forall x \in I_r(x_0) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$. Questa è la tesi cercata.

Vediamo un'applicazione.

Esempio 46

Come mostrato dalla seguente figura 

si ha: $\overline{DE} = sin(x), \widehat{BD} = x, \overline{BF} = tan(x)$ che sono tutte funzioni continue in un intorno destro di 0. D'altro canto si ha anche $\overline{DE} \le \overline{BD} \le \widehat{BD} \le \overline{BF}$, cioè, trascurando il segmento BD, avremo: $sin(x) < x < tan(x)$. Le tre quantità sono positive, quindi dividendo per una qualsiasi di esse la disuguaglianza continua a essere valida. Dividiamo per *sin*(*x*). $1 < \frac{x}{sin(x)} < \frac{1}{cos(x)}$. Poiché anche queste tre funzioni sono continue in un intorno destro di 0, e poiché $\lim_{x\to 0^+} 1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{cos(x)} = 1$, siamo nelle ipotesi del teorema del confronto e possiamo dire allora che si ha anche: $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{sin(x)} = 1$. Osserviamo che il precedente limite è una forma indeterminata 0/0.

Il precedente esempio permette di dimostrare facilmente il seguente risultato.

Teorema 31

Si ha: $\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$.

Dimostrazione

Per quanto visto nell'esempio e poiché $\lim_{x\to 0^+} \frac{sin(x)}{x} = \frac{1}{\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{sin(x)}} = 1$.

Per quanto riguarda il limite sinistro abbiamo: $\lim_{x\to 0^-} \frac{sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{sin(-x)}{-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-sin(x)}{-x} = 1$.

Il precedente limite viene detto *notevole* e può essere generalizzato al seguente risultato.

Teorema 32

$\lim_{x\to z} f(x) = 0, z \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{x\to z} \frac{sin[f(x)]}{f(x)} = 1$.

Dimostrazione

Basta applicare il precedente teorema e il teorema 14 sul limite delle funzioni composte.

Nel precedente teorema l'angolo deve essere misurato in radianti non in gradi sessagesimali. Cosa accade in caso contrario?

Esempio 47

Quanto fa $\lim_{x\to 0} \frac{sin(x°)}{x}$? Trasformiamo l'angolo da gradi sessagesimali a radianti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x°)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{sin\left(x \cdot \frac{180}{\pi}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{sin\left(x \cdot \frac{180}{\pi}\right)}{x \cdot \frac{180}{\pi}} \cdot \frac{\pi}{180} = 1 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180}$$

Osserviamo anche che il limite è calcolato per qualsiasi valore della retta reale, quindi anche per uno dei simboli più o meno infinito.

Esempio 48

Calcolare $\lim_{x\to +\infty} x \cdot sin\left(\frac{3}{x^2}\right)$. Così come è scritto abbiamo a che fare con una forma indeterminata del tipo

$\infty \cdot 0$, ma possiamo scrivere anche: $\lim_{x\to+\infty} \frac{sin\left(\frac{3}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}$ che è adesso del tipo 0/0 e rientra nelle ipotesi del teorema 32: $\lim_{x\to+\infty} \frac{sin\left(\frac{3}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{sin\left(\frac{3}{x^2}\right)}{\frac{3}{x^2}} \cdot \frac{3}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$. Per il calcolo abbiamo usato il limite notevole per il primo fattore.

Dal precedente seguono altri limiti notevoli.

Corollario 1

Si ha:
$$\lim_{x\to z} f(x) = 0, z \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{x\to z} \frac{tan[f(x)]}{f(x)} = 1; \lim_{x\to z} \frac{sin^{-1}[f(x)]}{f(x)} = 1;$$
$$\lim_{x\to z} \frac{tan^{-1}[f(x)]}{f(x)} = 1; \lim_{x\to z} \frac{1-cos[f(x)]}{f(x)} = 0; \lim_{x\to z} \frac{1-cos[f(x)]}{[f(x)]^2} = \frac{1}{2}.$$

Dimostrazione
Si ha facilmente
$$\lim_{x\to z} \frac{tan[f(x)]}{f(x)} = \lim_{x\to z} \frac{sin[f(x)]}{f(x)} \cdot \frac{1}{cos[f(x)]} = 1;$$
$$\lim_{x\to z} \frac{1-cos[f(x)]}{f(x)} = \lim_{x\to z} \frac{1-cos^2[f(x)]}{f(x)} \cdot \frac{1}{1+cos[f(x)]} = \lim_{x\to z} \frac{sin^2[f(x)]}{f(x)} \cdot \frac{1}{1+cos[f(x)]} =$$
$$= \lim_{x\to z} \frac{sin[f(x)]}{f(x)} \cdot \frac{sin[f(x)]}{1+cos[f(x)]} = 0; \lim_{x\to z} \frac{1-cos[f(x)]}{[f(x)]^2} = \lim_{x\to z} \frac{sin^2[f(x)]}{[f(x)]^2} \cdot \frac{1}{1+cos[f(x)]} = \frac{1}{2}$$
Inoltre: posto $sin^{-1}[f(x)] = t \Rightarrow f(x) = sin(t)$, per cui se al tendere di x a z si ha $f(x)$ che tende a zero, al tendere di t a zero avremo $sin(t)$ che tende a zero, e perciò: $\lim_{x\to z} \frac{sin^{-1}[f(x)]}{f(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{sin(t)} = 1$.
Lasciamo per esercizio il rimanente limite.

Vedremo altri esempi nelle verifiche. Vogliamo invece studiare altri limiti notevoli che possano aiutarci a risolvere altre forme indeterminate che non riusciamo a calcolare con le tecniche viste in precedenza.

Teorema 33

Si ha: $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.
Dimostrazione Omessa

Osserviamo che il precedente limite è una forma indeterminata del tipo 1^∞. Anche in questo caso abbiamo un risultato più generale.

Teorema 34

$$\lim_{x\to z} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to z} \left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e, z \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Esempio 49

Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{2x}$. È una forma indeterminata del tipo 1^∞, che può essere fatta rientrare nelle ipotesi del teorema 34. Basta scrivere: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{3}}\right)^{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{3}}\right)^{\frac{x^2}{3}}\right]^{\frac{3}{x^2}\cdot 2x}$. La parte all'interno delle parentesi quadrate si calcola con il teorema 34, pertanto il limite da calcolare è lo stesso del seguente, più semplice: $\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{6}{x}}$ e poiché l'esponente tende a 0, avremo: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{2x}=e^0=1$.

Il limite del teorema 34, permette di stabilire un altro limite notevole.

Teorema 35

Si ha: $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1$

Dimostrazione

Possiamo scrivere, utilizzando le proprietà dei logaritmi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot ln(1+x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

Calcoliamo il limite dell'argomento, che rientra nelle ipotesi del teorema 34, poiché $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$ e $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}=e$, quindi per il teorema 14, avremo: $\lim_{x\to 0}\left[ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=ln(e)=1$.

Il precedente limite è una forma indeterminata del tipo 0/0 e può essere esteso a logaritmi con base generica.

Teorema 36

Si ha: $\lim_{x\to 0}\frac{log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{ln(a)}$.

Dimostrazione

Basta applicare il cambio di base: $\lim_{x\to 0}\frac{log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x\cdot ln(a)}==\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{ln(a)}=\frac{1}{ln(a)}$

Si ha un risultato più generale.

Teorema 37

$\lim_{x\to z}f(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to z}\frac{log_a[1+f(x)]}{f(x)}=\frac{1}{ln(a)}, z\in\overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione per esercizio

Esempio 50

Calcolare $\lim_{x\to 2}\frac{ln(3-x)}{x^2-4}$. È una forma indeterminata del tipo 0/0, che può rientrare nelle ipotesi del teorema

36. Si ha: $\lim_{x\to 2}\frac{ln(3-x)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{ln[1+(2-x)]}{(2-x)\cdot(x+2)(-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{ln[1+(2-x)]}{(2-x)}\cdot\frac{-1}{x+2}=-\frac{1}{4}$.

Ancora un limite notevole.

Teorema 38

Si ha: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ e, più in generale, $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=ln(a)$

Dimostrazione

Detto $\log_a(1+x)=p\Rightarrow 1+x=a^p\Rightarrow x=a^p-1$, quindi il risultato del teorema 36 diventa: $\lim_{p\to 0}\frac{p}{a^p-1}=\frac{1}{ln(a)}$, ovviamente il nome scelto per la variabile è puramente simbolico, quindi possiamo anche scrivere: $\lim_{x\to 0}\frac{x}{a^x-1}=\frac{1}{ln(a)}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=ln(a)$.

Come ovvia conseguenza si ha il seguente risultato.

Corollario 2

Si ha: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

Dimostrazione per esercizio

Il limite del Teorema 38 è una forma indeterminata del tipo 0/0. Ecco il risultato più generale.

Teorema 39

$\lim_{x\to z}f(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to z}\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)}=ln(a), z\in\overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione per esercizio

Esempio 51

Calcolare $\lim_{x\to 3}\frac{2^{x-3}-1}{x^2-2x-3}$. È una forma indeterminata del tipo 0/0, che può rientrare nelle ipotesi del teorema 39. Si ha: $\lim_{x\to 3}\frac{2^{x-3}-1}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2^{x-3}-1}{(x-3)}\cdot\frac{1}{x+1}=\ln(2)\cdot\frac{1}{4}=\frac{\ln(2)}{4}$.

Ancora un limite notevole.

Teorema 40

Si ha: $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=p$.

Dimostrazione

Proponiamo la dimostrazione solo per p intero positivo. In questo caso sappiamo che possiamo scrivere $(1+x)^2=1+2x+x^2;(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3;(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4$. E così via, per qualsiasi altro esponente. Ricordiamo che il teorema 21 (principio di sostituzione degli infinitesimi), afferma che il limite di una somma fra infinitesimi è uguale al limite dell'infinitesimo di ordine inferiore. E sappiamo che fra x^k e x^h, è inferiore quello che ha esponente più piccolo, quindi vuol dire che $(1+x)^2\approx 1+2x;(1+x)^3\approx 1+3x;(1+x)^4\approx 1+4x;...;(1+x)^p\approx 1+px$, dove con il simbolo ≈, che leggiamo *asintotico a*, intendiamo dire che le due espressioni hanno lo stesso limite, in questo caso per x che tende a zero. Quindi possiamo scrivere: $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+px-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{p\cancel{x}}{\cancel{x}}=p$, che è la tesi.

Anche il precedente limite è una forma indeterminata del tipo 0/0, e ha la sua generalizzazione.

Teorema 41

$\lim_{x\to z} f(x)=0 \Rightarrow \lim_{x\to z}\frac{[1+f(x)]^p-1}{f(x)}=p, z\in\overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione per esercizio

Esempio 52

Calcolare $\lim_{x\to -2}\frac{(x^2+x-1)^{12}-1}{3x^2+5x-2}$. È una forma indeterminata del tipo 0/0, che può scriversi nel modo seguente: $\lim_{x\to -2}\frac{[1+(x^2+x-2)]^{12}-1}{x^2+x-2}\cdot\frac{x^2+x-2}{3x^2+5x-2}=12\cdot\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}\cdot(x-1)}{\cancel{(x+2)}\cdot(3x-1)}=12\cdot\frac{-3}{-7}=\frac{36}{7}$.

Concludiamo il paragrafo con la raccomandazione che quanto qui presentato è valido solo per forme indeterminate, applicare i risultati per limiti che non rientrano "esattamente" nelle ipotesi dei teoremi ovviamente fornisce risultati errati.

Esempio 53

- $\lim_{x\to 2}\frac{ln(1+x)}{x}$ non è una forma indeterminata, ma vale $\lim_{x\to 2}\frac{ln(1+x)}{x}=\frac{ln(3)}{2}$. Se invece lo consideriamo, sbagliando, come se fosse un limite notevole e che si abbia $\lim_{x\to 2}\frac{ln(1+x)}{x}=1$, ovviamente commettiamo un grave errore.
- Si faccia attenzione che, come spesso accade in matematica, anche sbagliando si possono ottenere risultati corretti. Per esempio calcoliamo nel seguente modo $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x+1)}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x}=\infty$, che è errato perché $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x+1)}{x}$ non è una forma indeterminata e quindi non rientra nelle ipotesi del teorema 32. Eppure $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin(1)}{x}=\infty$. Ovviamente l'avere ottenuto un risultato corretto non fa sì che la procedura venga considerata corretta.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot tan(5x)-3x}{9\cdot sin^2(x)+6x}$. Abbiamo a che fare con una forma indeterminata 0/0. Possiamo sfruttare il limite notevole $\lim_{x\to 0} f(x)=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{sin\left[f(x)\right]}{f(x)}=1$, che ovviamente implica anche $\lim_{x\to 0} f(x)=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{tan\left[f(x)\right]}{f(x)}=1$, dato che $\lim_{x\to 0}\frac{tan\left[f(x)\right]}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sin\left[f(x)\right]}{f(x)}\cdot\frac{1}{cos\left[f(x)\right]}=1\cdot 1=1$ Abbiamo allora $\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot tan(5x)-3x}{9\cdot sin^2(x)+6x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\frac{tan(5x)}{5x}\cdot 5x-3x}{9\cdot\frac{sin(x)}{x}\cdot\frac{sin(x)}{x}\cdot x^2+6x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot 1\cdot 5x-3x}{9\cdot 1\cdot 1\cdot x^2+6x}=$.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{17x}{9x^2+6x}=\lim_{x\to 0}\frac{17}{9x+6}=\frac{17}{6}$$

Calcolare i seguenti limiti, usando, laddove possibile, i limiti notevoli

Livello 1

1. $\lim_{x\to 0}\frac{sin(2x)}{3x}$ [2/3] $\lim_{x\to -2}\frac{sin(x+2)}{x-2}$ [0] $\lim_{x\to 2}\frac{sin(x-2)}{x^2-4}$ [¼]
2. $\lim_{x\to 0^+}\frac{sin(x)}{x^2}$ [+∞] $\lim_{x\to 3}\frac{sin^2(x-3)}{x-3}$ [0] $\lim_{x\to 1^-}\frac{1-sin(x-1)}{x-1}$ [–∞]
3. $\lim_{x\to 0}\left[x\cdot sin\left(\frac{3}{x}\right)\right]$ [3] $\lim_{x\to -1}\frac{sin(x^3+1)}{x+1}$ [3] $\lim_{x\to 0}\frac{sin(5x)}{sin(7x)}$ [5/7]
4. $\lim_{x\to 0}\frac{sin^2\left(\sqrt{2}x\right)}{tan^2\left(\sqrt{3}x\right)}$ [2/3] $\lim_{x\to 0}\frac{cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x}$ [1] $\lim_{x\to -3}(x+3)\cdot csc(x+3)$ [1]
5. $\lim_{x\to 1}\frac{sin(x-1)}{sin\left(x^2-1\right)}$ [½] $\lim_{x\to -2}\frac{sin(x^2-4)}{sin(x+2)}$ [–4] $\lim_{x\to 2}\frac{sin(x^2-4)}{sin(x^3-8)}$ [1/3]
6. $\lim_{x\to -1^+}\frac{sin(x^3-1)}{sin(x^2-x-2)}$ [+∞] $\lim_{x\to 5}\frac{sin(x-5)}{sin(x^2-x-20)}$ [1/9] $\lim_{x\to 1}\frac{sin(x^3-2x+1)}{sin(4x^2-3x-1)}$ [1/5]
7. $\lim_{x\to -1}\frac{sin(2x^3+3x+5)}{sin(x^2-4x-5)}$ [–3/2] $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x^2-2x-3)}{sin(2x^2-7x+3)}$ [–1] $\lim_{x\to \pi}\frac{sin(x)}{sin(x+\pi)}$ [–1]
8. $\lim_{x\to \pi}\frac{sin(\pi-x)}{sin(x)}$ [1] $\lim_{x\to 0}\frac{sin(15\pi x)}{sin(23\pi x)}$ [15/23] $\lim_{x\to 0}\frac{cos(17/2\pi-x)}{cos(25/2\pi+x)}$ [–1]
9. $\lim_{x\to 0}\frac{sin^{-1}(x)}{x}$ [1] $\lim_{x\to 0}\frac{tan^{-1}(x)}{x}$ [1] $\lim_{x\to 0^-}\frac{cos^{-1}(x)}{x}$ [–∞]

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim_{x\to 4}\frac{sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{x-4}$, che è una forma indeterminata 0/0. Cerchiamo di ricondurla al limite notevole $\lim_{x\to 4}\frac{sin\left[f(x)\right]}{f(x)}=1$ se $f(x)$ tende a zero. Sappiamo che possiamo scrivere $sin(x) = sin(\pi - x)$, pertanto avremo: $\lim_{x\to 4}\frac{sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}x\right)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{sin\left[\frac{\pi}{4}\cdot(4-x)\right]}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{sin\left[\frac{\pi}{4}\cdot(4-x)\right]}{\frac{\pi}{4}\cdot(4-x)}\cdot\frac{-\pi}{4}=\frac{-\pi}{4}$.

Calcolare i seguenti limiti, usando, laddove possibile, i limiti notevoli

Livello 2

10. $\lim_{x\to 1}\frac{sin(\pi x)}{x-1}$ (si ha: $sin(x) = sin(\pi - x)$) $[-\pi]$ $\lim_{x\to 2}\frac{sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-2}$ $[-\pi/2]$
11. $\lim_{x\to 0}\frac{-5\cdot sin(x^2)-3x}{3\cdot sin(5x)+2x}$ $[-3/17]$ $\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot sin(2x)-4x}{7\cdot sin(9x)+2x}$ $[2/65]$
12. $\lim_{x\to 0^+}\frac{-7\cdot sin(9x)+3}{sin(6x)+4x^2}$ $[+\infty]$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{1-cos(x)}{x^3}$ $[+\infty]$
13. $\lim_{x\to 0}\frac{sin^2(x-1)}{sin(x^2-1)}$ $[-sin(1)]$ $\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot sin(x)-3x}{-2\cdot tan(9x)+5x}$ $[-1/13]$
14. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-cos(x)}}{x}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{cos(x)}}{x^2}$ $[1/4]$
15. $\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot sin(x^2)-x^2}{2\cdot sin^2(5x)+2x^2}$ $[1/13]$ $\lim_{x\to 0}\frac{8\cdot sin(2x)-3x}{-7\cdot sin(5x)+1}$ $[0]$
16. $\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot sin^{-1}(4x)-x}{sin(6x)+x^3}$ $[11/6]$ $\lim_{x\to 0}\frac{sin^3(x)-5x}{5\cdot sin(3x)+7x}$ $[-5/22]$
17. $\lim_{x\to 2}\frac{1-cos(x^2-4)}{sin(x-2)}$ $[0]$ $\lim_{x\to 3}\frac{1-cos^2(x^2-9)}{sin(2x-6)}$ $[0]$
18. $\lim_{x\to 1^+}\frac{sin(2x^2-2)}{1-cos^2(x-1)}$ $[+\infty]$ $\lim_{x\to 2}\frac{1-cos^2(x-2)}{sin(3x^2-4x-4)}$ $[0]$

Livello 3

19. $\lim_{x\to 1}\frac{sin(2x-1)-sin(x)}{x-1}$ (Applicare le formule di prostaferesi) $[cos(1)]$
20. $\lim_{x\to \pi/3}\frac{sin(x)-sin(\pi/3)}{3x-\pi}$ $[1/6]$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{cos(3x)-cos(4x)}{x^3}$ $[+\infty]$
21. $\lim_{x\to 2}\frac{cos(x)-cos(2)}{x-2}$ $[-sin(2)]$ $\lim_{x\to 0}\frac{cos(5x+\pi)+cos(x)}{x}$ $[0]$
22. $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{2\cdot sin(x)-\sqrt{3}}{cos(x)-\frac{1}{2}}$ $\left[-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right]$ $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{2\cdot sin(x)-\sqrt{2}}{tan(x)-1}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
23. $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{sin(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2cos(x)-1}$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{6}\right]$ $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{sin(x)-\frac{1}{2}}{2\cdot cos(x)-\sqrt{3}}$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
24. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-sin(x)}{cot(x)}$ $[0]$ $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{cos(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{tan(x)-1}$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

25. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{tan(x)-1}{2\cdot sin(x)-\sqrt{2}}$ $[\sqrt{2}]$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{sin(x)-cos(x)}{4x-\pi}$ $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right]$

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+sin(x)}-\sqrt{1-sin(x)}}{x+sin(x)}$ [½] $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sqrt{sin(x)}}{cos(x)}$ [0]

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{cos(x)-1}{3x^2+4x^3}$ [–1/6] $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{tan\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)}$ [–π/4]

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{5}{13x^2}\right)^{\frac{4}{3}x^2}$. Abbiamo una forma indeterminata del tipo 1^∞, quindi cerchiamo di ricondurla alla forma $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$, in cui $f(x)$ tende a infinito. Abbiamo allora:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{13x^2}\right)^{\frac{4}{3}x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{13x^2}{5}}\right)^{\frac{13x^2}{5}}\right]^{\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{3}}=e^{\frac{20}{39}}$$

Calcolare i seguenti limiti, usando, laddove possibile, i limiti notevoli

***Livello* 1**

28. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$ $[e^2]$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$ $[e^2]$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{5x}\right)^{3x}$ $[e^{3/5}]$

29. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ $[e^{-1}]$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$ [1] $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{x}$ [0]

30. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x-1}$ $[e]$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-2}\right)^{x}$ $[e]$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$ [+∞]

31. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{-5x}$ $[e^{-10/3}]$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{11x}\right)^{\frac{2}{3}x}$ $[e^{2/11}]$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{7}{4x}\right)^{3x}$ $[e^{-21/4}]$

32. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{3}{8x}\right)^{-2x}$ $[e^{3/4}]$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{37}{5x^2}\right)^{2x}$ [1] $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{17}{3x}\right)^{-\frac{1}{2}x^2}$ [+∞]

33. $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(1-\dfrac{x-2}{x+2}\right)^{-\frac{2}{3\cdot(x-2)}}$ $[e^{1/6}]$ $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(1-\dfrac{x^3+1}{x-1}\right)^{\frac{3x}{x^2-1}}$ $[e^{9/4}]$ $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(1+\dfrac{13}{2x-5}\right)^{\frac{-5x}{x-3}}$ [0]

34. $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(1+\dfrac{x^2-4}{x^2-2}\right)^{\frac{x}{x^3-8}}$ $[e^{1/3}]$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{sin(x)}{x+2}\right)^{\frac{\pi}{x}}$ $\left[e^{-\pi^2/2}\right]$ $\lim\limits_{x\to 4}\left(1+\dfrac{x^2-16}{7x^2-1}\right)^{\frac{3}{5x-20}}$ $[e^{8/185}]$

35. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$ $[e^2]$ $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{4}{x-3}}$ $[e^8]$ $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^3+x^2-x+3\right)^{\frac{x+3}{x+2}}$ $[e^7]$

Lavoriamo insieme

Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^2-x+1}{5x^2+3}\right)^{\frac{3x^2+x-1}{4x-5}}$, abbiamo $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-x+1}{5x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{5x^2}=1$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+x-1}{4x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{4x}=+\infty$, quindi è una forma indeterminata di tipo 1^∞, pensiamo perciò di ricondurla a $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$. Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^2+3+(-x-2)}{5x^2+3}\right)^{\frac{3x^2+x-1}{4x-5}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^2+3}{5x^2+3}+\frac{-x-2}{5x^2+3}\right)^{\frac{3x^2+x-1}{4x-5}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5x^2+3}{-x-2}}\right)^{\frac{3x^2+x-1}{4x-5}}$$

, quindi adesso trasformiamo anche l'esponente: $\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{5x^2+3}{-x-2}}\right)^{\frac{5x^2+3}{-x-2}}\right]^{\frac{-x-2}{5x^2+3}\cdot\frac{3x^2+x-1}{4x-5}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{-x-2}{5x^2+3}\cdot\frac{3x^2+x-1}{4x-5}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{-3x^3}{20x^3}}=e^{-\frac{3}{20}}$.

Calcolare i seguenti limiti, usando, laddove possibile, i limiti notevoli

Livello 2

36. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{x+4}}$ [¼] $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+1}{x^2-x-2}\right)^{\frac{x^2+3}{5x}}$ [$e^{-2/5}$] $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^3-x+1}{3x^3+x^2}\right)^{\frac{7x^2+x}{x-2}}$ [$e^{-7/3}$]

37. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-x}{3x^2+x+3}\right)^{\frac{5x^3+1}{x^2+1}}$ [1024/243] $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3-x^2-2}\right)^{\frac{3x^2+x-3}{5x+2}}$ [$e^{3/5}$] $\lim_{x\to0^+}(1+\sin(x))^{\frac{3x-1}{x^3}}$ [0]

38. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2+1}{4x^2-3x+5}\right)^{\frac{3x^2+2x-1}{4x-3}}$ [$e^{9/16}$] $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{11x^2-3x+1}{11x^2+4x-3}\right)^{\frac{x^2+x+4}{5x+7}}$ [$e^{-7/55}$] $\lim_{x\to0}(\cos(x))^{\frac{4x+1}{x^2}}$ [$e^{-1/2}$]

Livello 3

39. $\lim_{x\to\pi}(1-\sin(x))^{\frac{x^2}{\tan(x)}}$ [e^{π^2}] $\lim_{x\to2}\left(\frac{2x^2-5}{x+1}\right)^{\frac{x+2}{x-2}}$ [$e^{28/3}$] $\lim_{x\to1}\left(\frac{4x^2-x+1}{x+3}\right)^{\frac{5x-1}{x-1}}$ [e^6]

40. $\lim_{x\to-2}\left(\frac{x^2+1}{x-7}\right)^{\frac{7x+1}{x+2}}$ [Il limite non ha senso] $\lim_{x\to-2}\left(\frac{x^2+1}{x+7}\right)^{\frac{7x+1}{x+2}}$ [e^{13}] $\lim_{x\to3}\left(\frac{2x^2+1}{x+16}\right)^{\frac{2x+5}{x-3}}$ [$e^{121/19}$]

41. $\lim_{x\to2}\left(\frac{5x+2}{x^2+8}\right)^{\frac{x+1}{x-2}}$ [$e^{1/4}$] $\lim_{x\to-3}\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)^{\frac{4x+1}{x+3}}$ [$e^{11/5}$] $\lim_{x\to5}\left(\frac{x+1}{2x-4}\right)^{\frac{3x+1}{x-5}}$ [$e^{-8/3}$] $\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$ [1]

42. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[1-\cos(x)]^{\tan(x)}$ [e^{-1}] $\lim_{x\to2}\left[\frac{\sin^2(x-2)}{(x-2)^2}\right]^{\frac{x+1}{x^3-8}}$ [1] $\lim_{x\to0}\left[\frac{2-2\cdot\cos(x)}{x^2}\right]^{\csc(x^2)}$ [$e^{-1/12}$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim_{x\to-2}\frac{\ln(x^2-x-5)}{x+2}$. Si ha $\lim_{x\to-2}(x^2-x-5)=1$, $\lim_{x\to-2}(x+2)=\infty$, quindi è un limite 0/0, che "assomiglia" a un limite notevole del tipo $\lim\limits_{x\to z} f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to z}\frac{ln\left[1+f(x)\right]}{f(x)}=1$. Operiamo le consuete "trasformazioni formali": $\lim\limits_{x\to -2}\frac{ln\left[1+\left(x^2-x-6\right)\right]}{x^2-x-6}\cdot\frac{x^2-x-6}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x+2}$, anche quest'ultimo limite è 0/0, ma essendo rapporto di polinomi dobbiamo esplicitare il fattore indeterminante x + 2, al numeratore. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}\cdot(x-3)}{\cancel{x+2}}=-5$.

Calcolare i seguenti limiti, usando, laddove possibile, i limiti notevoli

Livello 1

43. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+2x)}{3x}$ [2/3] $\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{ln\left(1+x^2\right)}{x}$ [0] $\quad \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{ln(1+x)}{x^2}$ [+∞]

44. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ln(x)}{x^2-1}$ [½] $\quad \lim\limits_{x\to 2}\frac{ln\left(x^2-3\right)}{x-2}$ [4] $\quad \lim\limits_{x\to 3}\frac{ln\left(x^2-8\right)}{3-x^2}$ [–*ln*(6)/6]

45. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln\left(x+x^2+1\right)}{x-x^2}$ [1] $\quad \lim\limits_{x\to -1^+}\frac{ln\left(2x^2+3x+1\right)}{x^3+1}$ [–∞] $\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{ln^2(1+4x)}{3x^2}$ [16/3]

46. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{ln\left(x^2\right)}{x^3+1}$ [–2/3] $\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{ln\left(2x^2-3x+1\right)}{4x^3}$ [–∞] $\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{ln\left(4x^2+1\right)}{5x^2-2x}$ [0]

47. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{sin(x)}$ [1] $\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{ln\left(1+2x^2\right)}{1-cos(x)}$ [4] $\quad \lim\limits_{x\to 1}\frac{ln(3x-2)}{sin(\pi x)}$ [–3/π]

48. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_2\left(x^2+1\right)}{x+x^2}$ [0] $\quad \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\log_3\left(x^2+x+1\right)}{x^2}$ [+∞] $\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_{1/2}\left(1+\sqrt{2}x\right)}{\sqrt{3}x}$ $\left[-\frac{\sqrt{6}}{ln(9)}\right]$

49. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_{\sqrt{2}}(1+\pi x)}{e\cdot x}$ $\left[\frac{2\pi}{e\cdot ln(2)}\right]$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_{\pi}\left(x^2+2x+1\right)}{4x}$ $\left[\frac{1}{ln\left(\pi^2\right)}\right]$ $\quad \lim\limits_{x\to 1}\frac{\log_2\left(x^2\right)}{x^2-1}$ $\left[\frac{1}{ln(2)}\right]$

Livello 2

50. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{ln\left(5x^2-8x-3\right)}{x-2}$ [12] $\quad \lim\limits_{x\to 1}\frac{ln\left(x^2-x+1\right)}{x-1}$ [1] $\quad \lim\limits_{x\to -1}\frac{ln\left(4x^2+3x\right)}{x^3+2x^2-1}$ [5]

51. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{ln\left(x^2+3x+3\right)}{x^2-4}$ [¼] $\quad \lim\limits_{x\to -1}\frac{ln\left(7x^2+x-5\right)}{x+1}$ [–13] $\quad \lim\limits_{x\to 1}\frac{ln\left(7x^2-6x\right)}{x^3-1}$ [8/3]

52. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ln\left(x^3+2x-2\right)}{x-1}$ [5] $\quad \lim\limits_{x\to 2}\frac{ln\left(2x^2-4x+1\right)}{x-2}$ [4] $\quad \lim\limits_{x\to 2}\frac{ln\left(4x^2-5x-5\right)}{x^2-4}$ [11/4]

53. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ln\left(x^3+x^2-x\right)}{4x^3-x^2-3}$ [2/5] $\quad \lim\limits_{x\to 1}\frac{ln\left(4x^3-x-2\right)}{x^3-2x^2+1}$ [–11] $\quad \lim\limits_{x\to 2}\frac{ln\left(x^3-4x+1\right)}{x^3+x^2+3x-18}$ [8/19]

54. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{log_2\left(x^3-3x-1\right)}{x^3-x^2-4}$ $\left[\frac{9}{8\cdot ln(2)}\right]$ $\quad \lim\limits_{x\to -1}\frac{log_4\left(x^3+4x+6\right)}{2x^3+3x+5}$ $\left[\frac{7}{18\cdot ln(2)}\right]$

55. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{log_{\sqrt{2}}\left(x^4+1\right)}{\sqrt{3}\cdot x}$ [0] $\quad \lim\limits_{x\to 2}\frac{log_{\pi}\left(x^3-7\right)}{x^2+x-6}$ $\left[\frac{12}{5\cdot ln(\pi)}\right]$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{log_{1/\pi}\left(x^2-1\right)}{x^2+x-2}$ $\left[\frac{12}{5\cdot ln(\pi)}\right]$

Livello 3

56. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{ln\left[1+sin(x)\right]}{1-cos(x)}$ **[+∞]** $\quad \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{ln\left[2\cdot sin(x)\right]}{3\cdot tan(x)-\sqrt{3}}$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{log_2\left[1-sin(x)\right]}{x}$ $\left[-\frac{1}{ln(2)}\right]$

57. $\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{log_{1/3}\left[tan(-x)\right]}{sin(x)+cos(x)}\left[\frac{\sqrt{2}}{ln(3)}\right]$ $\lim_{x\to2}\frac{log_3\left(x^2-3\right)}{sin(x)-sin(2)}$ $\left[\frac{4}{cos(2)\cdot ln(3)}\right]$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ln\left[sin(x)\right]}{cos(x)}$ [0]

58. $\lim_{x\to0}\frac{ln(x+1)}{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}$ $\left[-\frac{2}{e}\right]$ $\lim_{x\to2}\frac{ln\left(x^2-3\right)}{(x-1)^{\frac{1}{2-x}}-e}$ $\left[-\frac{8}{e}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim_{x\to1}\frac{e^{x^3-2x+1}-1}{x^4-x}$, abbiamo una forma indeterminata 0/0, che può rientrare nel limite notevole $\lim_{x\to z}f(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to z}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1$. Vediamo di ricondurre il limite a questa forma.

$$\lim_{x\to1}\frac{e^{x^3-2x+1}-1}{x^4-x}=\lim_{x\to1}\frac{e^{x^3-2x+1}-1}{x^3-2x+1}\cdot\frac{x^3-2x+1}{x^4-x}=\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x+1}{x^4-x}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}\cdot\left(x^2+x-1\right)}{\cancel{(x-1)}\cdot\left(x^3+x^2+x\right)}=\frac{1}{3}$$

Calcolare i seguenti limiti, usando, laddove possibile, i limiti notevoli

Livello 1

59. $\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x}$ [0] $\lim_{x\to0^+}\frac{5^x-1}{x^2}$ [+∞] $\lim_{x\to1^-}\frac{2^{2x}-2}{x-1}$ [–∞] $\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{x}$ [–1]

60. $\lim_{x\to0}\frac{3^{x^2}-1}{2x^2}$ [ln(3)/2] $\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{4x}$ [¾] $\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{x^2-1}$ [¾] $\lim_{x\to2}\frac{4^{x^2-4}-1}{x^3-8}$ [ln(4)/3]

61. $\lim_{x\to-1}\frac{e^{x+1}-1}{x^4-1}$ [–¼] $\lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{x-1}$ [e] $\lim_{x\to0^+}\frac{\pi^{2x^2}-1}{x^3}$ [+∞] $\lim_{x\to-\frac{1}{3}^-}\frac{e^x-\sqrt[3]{e}}{3x+1}$ [+∞]

62. $\lim_{x\to3}\frac{e^{x+1}-e^4}{x^2+2x-14}$ [0] $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{9^x-3}{4\cdot x^2-1}$ [ln(27)/2] $\lim_{x\to1}\frac{4^{2x}-16}{x^2+x-2}$ [64ln(2)/3]

Livello 2

63. $\lim_{x\to-1}\frac{e^{x^2-x-2}-1}{x^3+1}$ [–1] $\lim_{x\to1}\frac{e^{2x^2-x-1}-1}{x^3-1}$ [1] $\lim_{x\to1}\frac{e^{3x^3-2x-1}-1}{2x^3-x^2+4x-5}$ [½] $\lim_{x\to3}\frac{e^{x^2-4x+3}-1}{x^2-x-6}$ [2/5]

64. $\lim_{x\to3}\frac{e^{3x^2-8x-3}-1}{x-3}$ [10] $\lim_{x\to1^+}\frac{2^{2x^2-3x-1}-1}{x^3-1}$ [+∞] $\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{e}\right)^{2x^3-5x^2+4}-1}{x^2-3x+2}$ [2] $\lim_{x\to2}\frac{\pi^{3x^2-7x+2}-1}{2x^2-3x-2}$ [ln(π)]

65. $\lim_{x\to-1}\frac{4^{x^3+2x+3}-1}{x^4-x^2+4x+4}$ [ln(25)] $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{3}^{2x^3-x^2+x-14}-1}{x^2-x-2}$ [7ln(3)/2] $\lim_{x\to-1}\frac{e^{x^2+5x+4}-1}{x+1}$ [3] $\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{e^{x^2-2}-1}{x^4-4}$ [¼]

Livello 3

66. $\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2-x}-1}{sin\left(x+x^2\right)}$ [–1] $\lim_{x\to0}\frac{e^{x^3-2x}-1}{ln\left(1+x^3\right)}$ [–∞] $\lim_{x\to0}\frac{e^{3x^2-4x}-1}{tan(2x)}$ [–2]

67. $\lim_{x\to1}\frac{2^{x^2+x}-4}{sin(x-1)}$ [12·ln(2)] $\lim_{x\to-1}\frac{3^{2x^2-x}-27}{ln(-x)}$ [135·ln(3)] $\lim_{x\to2}\frac{3^{x^2-2x+1}-3}{sin(\pi x)}$ [6ln(3)/π]

68. $\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}^{5-x^2}-2}{ln\left(x^2-2\right)}$ [ln(½)] $\lim_{x\to-2}\frac{7^{x^2-x-4}-49}{sin(\pi x)+ln(3+x)}$ $\left[-\frac{245\cdot ln(7)}{\pi+1}\right]$

69. $\lim_{x\to2}\frac{3^{x^2-2}-9}{log_{1/2}\left(x^2-3\right)+sin(x-2)}$ $\left[\frac{36\cdot ln(2)\cdot ln(3)}{ln(2)-4}\right]$ $\lim_{x\to-1}\frac{e^{x^4-x^2}-sin\left(-\frac{\pi}{2}\cdot x\right)}{cos^{-1}(x)+log_2\left(1+x+2^{-\pi}\right)}$ [0]

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{(1+5x)^{12}-1}{4x^3}$. È una forma indeterminata 0/0, che rientra nel limite notevole $\lim_{x\to z} f(x)=0 \Rightarrow \lim_{x\to z}\frac{\left[1+f(x)\right]^k-1}{f(x)}=k$. Operiamo le consuete trasformazioni formali:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+5x)^{12}-1}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+5x)^{12}-1}{5x}\cdot\frac{5}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\left(12\cdot\frac{5}{4x^2}\right)=+\infty.$$

Calcolare i seguenti limiti, usando, laddove possibile, i limiti notevoli

Livello 1

70. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)^{42}-1}{2x}$ [63]; $\lim_{x\to 0}\frac{(1+7x)^5-1}{-3x}$ [–35/3]; $\lim_{x\to 0}\frac{1+(4x)^5-1}{7x}$ [0]

71. $\lim_{x\to 0}\frac{(1-2x)^{21}-1}{7x}$ [–6]; $\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x^2\right)^{3/4}-1}{5x^2}$ [3/20]; $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+6x^3}-1}{\sqrt{2x^3}}$ [0]

72. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{(1+3x)^4}-1}{x^2}$ [+∞]; $\lim_{x\to 1}\frac{(4x-3)^4-1}{x-1}$ [16]; $\lim_{x\to -1}\frac{\left(3x^2-2\right)^6-1}{x^3+1}$ [–12]

Livello 2

73. $\lim_{x\to 2}\frac{(3-x)^{2/7}-1}{\sqrt{3}\cdot(x-2)}$ $\left[-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{21}\right]$; $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}x\right)^3}-1}{x^3-27}$ [1/405]; $\lim_{x\to -2}\frac{\left(x^2-3\right)^7-1}{x^2+4}$ [0]

74. $\lim_{x\to -\sqrt{2}}\frac{\left(x^2-1\right)^{13}-1}{x^4-4}$ [13/4]; $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{(4x-1)^{3/8}-1}{2x-1}$ [¾]; $\lim_{x\to -\frac{3}{4}}\frac{(5+8x)^{4/3}-1}{16x^2-9}$ [∅]

75. $\lim_{x\to 3}\frac{(5x-14)^8-1}{x^2-x-6}$ [8]; $\lim_{x\to 2}\frac{(3-x)^7-1}{x^2-4}$ [–7/4]; $\lim_{x\to 1}\frac{(3x-2)^5-1}{x^4-1}$ [15/4]

76. $\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-3\right)^{10}-1}{2x^2-5x+2}$ [40/3]; $\lim_{x\to -2}\frac{(4x-7)^{15}-1}{x^2-4}$ [∞]; $\lim_{x\to -2}\frac{\left(x^2-3\right)^7-1}{3x^2+4x-4}$ [7/2]

Livello 3

77. $\lim_{x\to -1}\frac{(4x+5)^9-1}{\sin(x+1)}$ [36]; $\lim_{x\to 2}\frac{(3x-5)^{12}-1}{\ln\left(x^4-15\right)}$ [9/8]; $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{(4x-7)^3}-1}{\log_3\left(x^3-7\right)}$ [*ln*(3)/2]

78. $\lim_{x\to 3}\frac{(4-x)^{11}-1}{3^x-27}$ $\left[-\frac{11}{27\cdot\ln(3)}\right]$; $\lim_{x\to -1}\frac{(5x+6)^{15}-1}{e^{-x}-e}$ $\left[-\frac{75}{e}\right]$; $\lim_{x\to 2^+}\frac{(5x-9)^{12}-1}{1-\cos\left(x^2-5x+6\right)}$ [+∞]

79. $\lim_{x\to 1}\frac{(2+x)^3-27}{4^x-4}$ $\left[\frac{27}{8\cdot\ln(2)}\right]$; $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3(x)-1}{\ln\left[1+\cos(x)\right]}$ [0]; $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin(2x)^7-1}{2^{\sin(x)-\cos(x)}-1}$ [0]

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare e classificare i punti di discontinuità di $f(x)=\frac{x-\pi}{\sin(x)}$, $x\in[0; 2\pi]$.

L'insieme di esistenza è dato dalla condizione: $\sin(x)\neq 0 \Rightarrow x\neq 0, \pi, 2\pi$ Quindi dobbiamo studiare cosa accade negli intorni di questi valori. Distinguiamo i tre casi:

$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\pi}{\sin(x)}=-\infty$, $\lim_{x\to 2\pi^-}\frac{x-\pi}{\sin(x)}=-\infty$, quindi $x = 0$ e $x = 2\pi$, sono entrambi punti di discontinuità di II specie.

Invece si ha: $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{sin(x)}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{sin(\pi-x)}=\lim\limits_{x\to\pi}\left(-\frac{\pi-x}{sin(\pi-x)}\right)=-1$.Quindi $x = \pi$, è un punto di discontinuità di III specie.

Determinare e classificare gli eventuali punti di discontinuità delle seguenti funzioni

Livello 2

80. $f(x)=(1+3x)^{\frac{1}{2x}}$ [0: III specie] $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x-1}}$ [1: II specie]

81. $f(x)=\frac{1-cos^2(x)}{x^2}$ [0: III specie] $f(x)=\frac{1-cos^2(x)}{x}$ [0: III specie]

82. $f(x)=(x)^{\frac{1}{x-1}}$ [1: III specie] $f(x)=\frac{1-cos^2(x+1)}{x^2-1}$ [–1: III specie; 1: II]

83. $f(x)=\frac{tan(3x)}{5x}, x\in[0,\pi]$ [0: III; π/6, π/2, 5/6π: II] $f(x)=\frac{x-\frac{\pi}{2}}{cos(x)}; x\in[0,2\pi]$ [0, 3π/2 :II; π/2 :III]

84. $f(x)=\frac{sin(x)}{|x|}$ [0: I specie] $f(x)=\frac{sin(|x|)}{x}$ [0: I specie]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Una funzione monotona può avere discontinuità di che tipo? Giustificare la risposta. [Solo di I specie]
2. La funzione somma di due funzioni discontinue può essere continua? Giustificare la risposta, fornendo un esempio se positiva. [Sì]
3. La funzione prodotto di due funzioni discontinue può essere continua? Giustificare la risposta, fornendo un esempio se positiva. [Sì]
4. Se $\exists\lim\limits_{x\to z}|f(x)|, z\in\overline{\mathbb{R}}$, possiamo dire che $\exists\lim\limits_{x\to z}f(x), z\in\overline{\mathbb{R}}$? Giustificare la risposta.
   [No, per esempio $\nexists\lim\limits_{x\to 1}\left[(-1)^{\lceil x\rceil}\cdot x\right]$, ma $\lim\limits_{x\to 1}\left|(-1)^{\lceil x\rceil}\cdot x\right|=\lim\limits_{x\to 1}x=1$]
5. Calcola $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin(sin(sin(...sin(x))))}{x}$, dove i seni, uno dentro l'altro sono in numero di n. [1]
6. $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}}\frac{4^{x^4-7}-16}{6\cdot cos^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)-5\pi}$ $\left[64\cdot\sqrt{3}\cdot ln(2)\right]$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln[e+sin(3x)]-5^{3x^2-x}}{tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}}$ $\left[\frac{ln(5)+3\cdot e^{-1}}{4}\right]$
7. Calcola al variare dei parametri $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$. $\left[\begin{cases}\frac{a}{b} & a<0,b<0\\ 0 & a>0,b<0\\ +\infty & a<0,b>0\\ \frac{b}{a} & a>0,b>0\end{cases}\right]$
8. Calcola $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{a_1+a_2x+a_3x^2+...+a_nx^{n-1}+x^n}-x\right), n\in\mathbb{N}, n\geq 2, a_n\neq 0$. $\left[\frac{a_n}{n}\right]$
9. Calcola $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3^x+3^{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$. [9]
10. Se si ha: $\frac{x^2+x-2}{x+3}\leq\frac{f(x)}{x^2}\leq\frac{x^2+2x-1}{x+3}$, supposto che esista calcolare $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$. [–1]
11. Enuncia una condizione sufficiente che assicuri che se una funzione verifica il teorema di esistenza degli zeri ammetta un'unica soluzione. [La funzione sia strettamente monotona]

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi
I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito
http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

1. (Liceo scientifico 1989/90) Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AC} = 2r$ e centro O, tracciare la semiretta uscente da A, perpendicolare ad AC e giacente rispetto ad AC, dalla stessa parte della semicirconferenza. Detto M un punto generico su tale semiretta, indicare con x la distanza di M da A. Da M staccare l'ulteriore tangente in B alla semicirconferenza. Detta K l'intersezione della semicirconferenza con il segmento OM, determinare l'area y del quadrilatero $ACBK$ in funzione di x. Determinare il valore di y per x tendente a $+\infty$. $\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{r^2x}{\sqrt{x^2+r^2}}+\frac{r^3x}{x^2+r^2}\right)=r^2\right]$
2. (Liceo scientifico 1991/92) Data una circonferenza γ di raggio unitario e centro O, tracciare una semiretta s uscente da O e intersecante γ in un punto Q. Indicato con P un generico punto di s esterno alla circonferenza γ, tracciare da esso le due tangenti alla circonferenza: siano A e B i punti di tangenza. Indicata con x la lunghezza del segmento PQ, trovare $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\overline{AQ}+\overline{QB}}{\overline{AB}}\right)$. $\left[\sqrt{2}\right]$
3. (Liceo scientifico 2000/2001) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, si sa che $f(x) \to \ell$ per $x \to a$, essendo ℓ ed a numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che $f(a) = \ell$ e fornire un'esauriente spiegazione della risposta. [No, p.e. $\lim_{x\to0}\frac{sin(x)}{x}=1$, ma $f(0)$ non esiste]
4. (Liceo scientifico 2000/2001) $\lim_{x\to+\infty}\frac{sin(x)-cos(x)}{x}$ a) è uguale a 0; b) è uguale ad 1; c) è un valore diverso dai due precedenti; d) non è determinato. Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione. [a)]
5. (Liceo scientifico PNI 2001/2002) Data la funzione $f(x) = e^x - sin(x) - 3x$ calcolarne i limiti per x tendente a $+\infty$ e $-\infty$ e provare che esiste un numero reale α con $0 < \alpha < 1$ in cui la funzione si annulla. [$+\infty$; $-\infty$]
6. (Liceo scientifico 2001/2002) Si consideri la funzione: $f(x) = (2x - 1)^7 \cdot (4 - 2x)^5$. Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo $½ \le x \le 2$. [Sì]
7. (Liceo scientifico 2003/2004) Di una funzione $g(x)$, non costante, si sa che: $\lim_{x\to2} g(x)=3$ e $g(2) = 4$. Trovate una espressione di $g(x)$. $\left[\text{P.e.: } g(x)=\begin{cases}x^2-1 & x\ne2\\ 4 & x=2\end{cases}\right]$
8. (Liceo scientifico suppletiva 2004/2005) Si consideri l'equazione $(k - 2) \cdot x^2 - (2k - 1) \cdot x + k + 1 = 0$, dove k è un parametro reale diverso da 2. Indicate con x' e x'' le sue radici, calcolare i limiti di $x' + x''$ quando k tende a 2, a $+\infty$ e a $-\infty$. [∞; 2; 2]
9. (Liceo scientifico suppletiva 2005/2006) Il limite della funzione $f(x)=x\cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)$ per x che tende a zero A) non esiste B) è 0 C) è un valore finito diverso da 0 D) è $+\infty$. Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata. [B]
10. (Liceo Scientifico 2005/2006) La funzione $f(x) = tan(x)$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo $I = [\pi/4; 3\pi/4]$, eppure non esiste alcun $x \in I$, tale che $f(x) = 0$. È così? Perché? [Non si può applicare il T. di esistenza degli zeri perché la funzione non è continua in I]
11. (Liceo scientifico suppletiva 2005/2006) Considerata la funzione reale di variabile reale $f(x)$, affermare che $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ significa che, per ogni numero reale M, esiste un numero reale N tale che, per ogni x, se $x > N$, allora $f(x) > M$. È vero o falso? [Vero]

12. (Liceo scientifico suppletiva 2006/2007) Si calcoli $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot cos(x)}{x^2-sin^2(x)}$. [∞]

13. (Liceo scientifico 2007/2008) Sia $f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}$; esiste il $\lim_{x\to 1} f(x)$? Si giustifichi la risposta.

[No, limite sinistro diverso da limite destro]

14. (Liceo scientifico suppletiva 2007/2008) Si calcoli $\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-cos(x)}{1-cos(x)}$. [3]

15. (Liceo scientifico 2008/2009) Si calcoli $\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. [–1]

16. (Liceo scientifico 2009/2010) Si calcoli $\lim_{x\to\infty} 4x\cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)$. [4]

17. (Liceo scientifico 2009/2010) Per quale o quali valori di *k* la funzione seguente è continua in $x = 4$? $h(x)=\begin{cases}3x^2-11x-4 & x\le 4\\ k\cdot x^2-2x-1 & x>4\end{cases}$. [9/16]

18. (Liceo scientifico PNI 2010/2011) Si determini il limite di $f(x)=x+\ln(4)+\frac{2}{e^x+1}$ per *x* che tende a $+\infty$ e a $-\infty$. Si calcoli $f(x) + f(-x)$ e si spieghi perché dal risultato si deduce che $A \equiv (0; 1 + ln(4))$ è centro di simmetria di Γ. [$+\infty$; $-\infty$; $2 \cdot [1 + ln(4)]$]

19. (Liceo scientifico 2010/2011) Si calcoli $\lim_{x\to a}\frac{tan(x)-tan(a)}{x-a}$. (Sugg. usare la formula di sottrazione della tangente) $\left[\frac{1}{cos^2(a)}\right]$

20. (Liceo scientifico Suppletiva 2010/2011) La funzione: $f(x)=\frac{1}{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^2}$ non è definita per $x = 0$, che è per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della $f(x)$ per *x* tendente a zero da sinistra e per *x* tendente a zero da destra.

[I specie con salto di discontinuità 1]

21. (Liceo scientifico 2011/2012) Si illustri il significato di *asintoto* e si fornisca un esempio di funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

$$\left[f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{(cx+d)\cdot(ex+f)}, a,c,e\ne 0; -\frac{d}{c}\ne -\frac{f}{e}\right]$$

22. (Liceo scientifico PNI 2011/2012) Si calcoli $\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2}$. [$-\infty$]

23. (Liceo scientifico 2012/2013) Si calcoli: $\lim_{x\to 0} 4\cdot\frac{sin(x)cos(x)-sin(x)}{x^2}$. [0]

24. (Liceo scientifico PNI 2012/2013) Si mostri, che: $\lim_{x\to\pi}\frac{e^{sin(x)}-e^{sin(\pi)}}{x-\pi}=-1$.

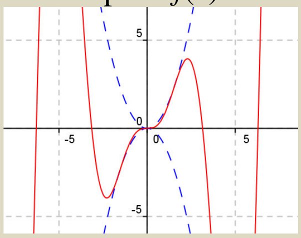
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

AK = Arkansas State University
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
W = Wohascum county

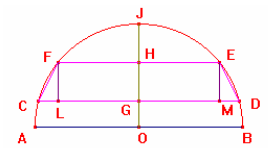
Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato dal Wohascum County del Minnesota.
Esistono funzioni definite in tutti i reali il cui grafico incontra infinite volte qualsiasi retta non parallela agli assi? La risposta è positiva, una di queste per esempio è $f(x) = x^2 \cdot sin(x)$, che vediamo in figura.



Infatti la funzione è evidentemente asintotica alle parabole $y = \pm x^2$, dato che $-1 \le sin(x) \le 1$. Se consideriamo una qualsiasi retta non parallela agli assi, di equazione $y = mx + q$, vediamo che si ha: $\lim_{x\to\infty} \frac{mx+q}{x^2} = 0$, quindi esisteranno opportuni valori di x a partire dai quali si avrà $\left|\frac{mx+q}{x^2}\right| < 1 \Rightarrow -x^2 < mx+q < x^2$. Quindi anche la retta sarà contenuta dalle due parabole, perciò incontrerà infinite volte la funzione.

1. (AHSME 1969) Consideriamo l'ascissa $x(m)$ del punto intersezione della parabola $y = x^2 - 6$ e della retta $y = m$, con $-6 < m < 6$. Calcolare $\lim_{m\to 0} \frac{x(m) - x(-m)}{m}$. $\left[\frac{1}{\sqrt{6}}\right]$

2. (AHSME 1968) In figura 

vi è una semicirconferenza di raggio a, H è punto medio di GJ. Indichiamo con K l'area del trapezio $CDEF$, con R quella del rettangolo $LMEF$. Determinare il limite del rapporto K/R al tendere di $\overline{OG}$ ad a, in modo che H sia sempre punto medio di GJ. $\left[\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right]$

3. (HSMC 2001) Data $f(x) = 3x + 4$, trovare una funzione $g(x)$ tale che si abbia $f(g(x)) = 4x - 1$. $[1/3 \cdot (4x - 5)]$

4. (HSMC 2002) Calcolare $\lim_{h\to 0} \frac{sin(\pi/3+h) - sin(\pi/3)}{cos(\pi/3+h) - cos(\pi/3)}$. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

5. (HSMC 2003) Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{cos(x) - 1}{x \cdot sin(2x)}$. [–¼]

6. (HSMC 2005) Il polinomio $x^3 + x^2 + x - 20$ ha un solo zero, trovarlo con una precisione di 0,5. [2,5 ± 0,5]

7. (HSMC 2009) Calcolare $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+4x^2+7x} - x\right)$. [4/3]

8. (AK 2009) Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{|2x-1| - |2x+1|}{x}$. [–4]

9. (AK 2010) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{7|x|+5x}{7|x|-5x} & x \ne 0 \\ 6 & x = 0 \end{cases}$ è continua in tutto $\mathbb{R}$? [No]

10. (HSMC 2011) Calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)\cdot sin(x)-tan(x)}{x^2\cdot sin(x)}$. [–1]

Questions in English

Working together

We wish to solve a question assigned at HSMC in 2005
The cubic polynomial x^3+x^2+x-20 has exactly one zero. Find it within ± 0,5.
We have $f(2) = -6 < 0$ and $f(3) = 19 > 0$, so for the Intermediate Value Theorem, there is a zero in]2, 3[. The question is to find a value within 0,5 hence it is 2,5 ± 0,5.

11. (HSMC 1999) Compute the limit $\lim_{h\to 0}\frac{sin(1)\cdot cos(h)+cos(1)\cdot sin(h)-sin(1)}{h}$. [$cos(1)$]
12. (HSMC 2000) Suppose f is a positive continuous function on the interval [−2; 3] and A(t) is the area of the region bounded by the graph of $y = f(x)$ and the lines $y = 0$; $x = -2$ and $x = t$ for t between −2 and 3. Compute $\lim_{x\to 3^-}\frac{A(3)-A(t)}{3-t}$. [$f(3)$]
13. (HSMC 2003) Find all values of a such that $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+ax-6}{x^2+x-2}$ exists and is finite. [$a = -1$]
14. (HSMC 2004) Compute the following limit $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-\sqrt{x}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$. [–1]
15. (HSMC 2008) Given $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=1$, find $a + b$. [8]
16. (AK 2009) Let $\lfloor x\rfloor$ be the largest integer less than or equal to x. Find $\lim_{x\to 2,5}\lfloor x+3\rfloor$. [5]
17. (AK 2009) Compute $\lim_{x\to 0}\frac{e^{tan(x)}-e^x}{tan(x)+x}$. [0]
18. (AK 2010) Find $h(2)$ such that the function $h(x)=\frac{x^2+3x-10}{x-2}$ is continuous at $x = 2$. [7]
19. (AK 2010) For what values of x the function $f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ is continuous? [$x = 0$]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza) Data la funzione $f(x) = x^2 - 1$, si consideri la successione così definita: $a_1 = 0$, $a_2 = f(a_1)$, …, $a_{n+1} = f(a_n)$; per ogni numero naturale n. Quanto vale a_{64}?
A) –64 B) –1 C) 0 D) 63
2. (Scienze della formazione primaria, Università di Cagliari 2007–08) L'intervallo aperto (0; 2) comprende
A) un solo numero un solo numero reale ma nessun numero naturale B) un solo numero relativo ma nessun numero reale C) infiniti numeri naturali D) un solo numero naturale ed infiniti numeri reali

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_3_1.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	2
B	E

10. Il calcolo differenziale

10.1 Le Derivate

Prerequisiti
- Sistema di riferimento cartesiano ortogonale
- Rappresentazione grafica di semplici funzioni
- Concetto di dominio e codominio di una funzione
- Concetto di infinito
- Invertibilità di una funzione
- Composizione di funzioni
- Continuità di una funzione
- Proprietà delle funzioni continue
- Limiti delle funzioni

Obiettivi
- Comprendere il concetto di derivabilità di una funzione
- Sapere calcolare derivate di funzioni elementari
- Significato geometrico e meccanico della derivata
- Sapere risolvere problemi che hanno a che fare con la derivazione delle funzioni

Contenuti
- Concetto di derivata di una funzione
- Derivate delle funzioni elementari
- Operazioni aritmetiche elementari con le derivate
- Derivate delle funzioni composte e delle funzioni inverse
- Derivate successive
- Teoremi del calcolo differenziale

Parole chiave
Derivata – Differenziale – Rapporto incrementale

Concetto di derivata di una funzione

E cosa sono queste flussioni? Le velocità di incrementi evanescenti? Non sono né quantità finite, né quantità infinitamente piccole, e neppure il niente. Dobbiamo chiamarle spettri o quantità scomparse?
George Berkeley, The Analyst

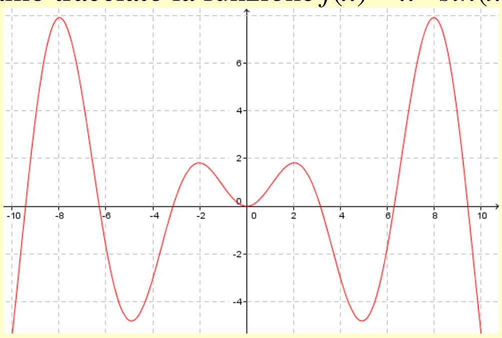
Il problema

Per tracciare il grafico di una funzione potremmo segnare alcuni dei suoi punti, ma, tranne in pochi casi particolari (retta, parabola, iperbole equilatera, …) non sappiamo come unire questi punti. Dobbiamo quindi vedere come si fa ad andare da un punto a un altro della funzione.

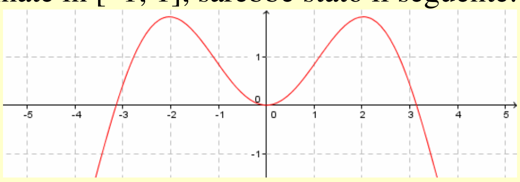
Il problema posto è fondamentale per il tracciamento delle funzioni, e permette anche di stabilire se una funzione tracciata con un software è effettivamente corretta.

Esempio 1

Usando il software Geogebra abbiamo tracciato la funzione $f(x) = x \cdot sin(x)$, ottenendo il grafico seguente



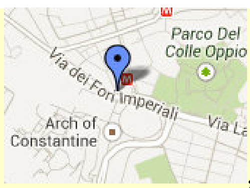
La prima domanda a cui dobbiamo rispondere è: chi ci assicura che quel che vediamo è "veramente" il grafico cercato? La seconda domanda è: il grafico è riferito all'intervallo [–10; 10] per le ascisse e [–5;8] per le ordinate, cosa possiamo dire per quel che accade all'esterno di esso?
La prima domanda può sembrare strana e inutile, ma non lo è. Infatti ogni software grafico rappresenta solo un numero finito di punti, che dipendono dalla risoluzione scelta. Per esempio per una risoluzione 800 × 600, si tracciano un massimo di 800 punti, dato che alcuni dei punti calcolati possono avere ordinate che non rientrano nella schermata. Per esempio se il grafico precedente lo avessimo visualizzato per ascisse che rientrano nell'intervallo [– 5; 5] e ordinate in [–1; 1], sarebbe stato il seguente:



e si vede che in esso "mancano" parecchi punti, rispetto al primo grafico tracciato in un intervallo più ampio. Allo stesso modo non sappiamo cosa accade fra un pixel e l'altro, dato che in effetti fra di essi vi sono infiniti punti che il software non può tracciare.

In effetti quanto visto nel precedente esempio, accade anche nelle mappe stradali, in cui, a causa della scala usata non vediamo, per esempio, tutte le curve presenti in una strada, ma solo un suo andamento che varia appunto dallo zoom usato.

Esempio 2

Con Google maps abbiamo cercato il Colosseo, ottenendo la seguente immagine 

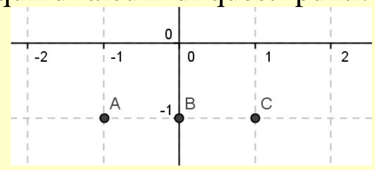
, il

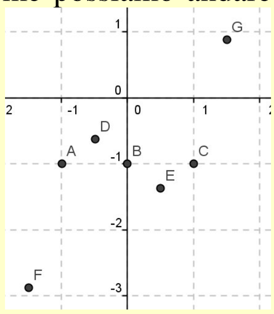
ballon blu rappresenta la posizione del monumento. Adesso effettuiamo uno zoom e vediamo ovviamente cose che prima non si vedevano. 

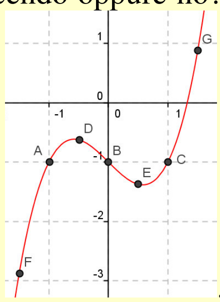
Le strade hanno maggiori dettagli, alcune prima non si vedevano, altre sembravano più *dritte* e così via.

Tenuto conto dell'esempio precedente dobbiamo stabilire una condizione che ci permetta di tracciare con una certa sicurezza il grafico di una funzione.

Esempio 3

Consideriamo una funzione più semplice, per esempio $f(x) = x^3 - x - 1$, e supponiamo di volerla tracciare con un procedimento simile a quello dei software, ossia per punti. Calcoliamo quindi alcuni di questi punti. Per esempio abbiamo $(-1; -1)$, $(0; -1)$, $(1; -1)$. Rappresentiamo questi 3 punti. 

Curiosamente i punti hanno tutti la stessa ordinata, dobbiamo quindi capire come possiamo andare da un punto all'altro, perciò calcoliamo e rappresentiamo altri punti. 

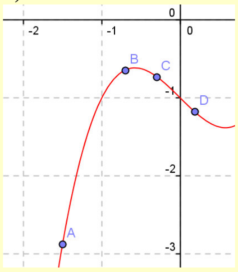
Cosa ci dicono? Non molto che già non potessimo prevedere. Il punto D dice che dovendo andare da A a B e non procedendo in linea retta, dobbiamo prima salire e poi scendere o viceversa. Lo stesso può dirsi per il punto E. I punti F e G non ci danno molte altre informazioni. Il problema è che non sappiamo cosa succede fra i successivi punti segnati, per esempio fra A e D. Ossia arriveremo da A a D crescendo oppure no? E lo stesso succede per gli altri punti. Il grafico proposto da Geogebra è il seguente 

.

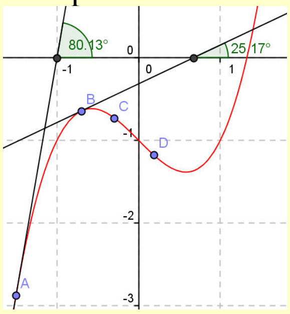
Quindi la questione che dobbiamo affrontare consiste nello stabilire quali sono gli intervalli in cui la funzione cresce e quelli in cui decresce, poiché se riusciamo a risolvere questo problema siamo in grado di rappresentare una funzione in modo accettabile. Nel senso che, con riferimento alla funzione dell'Esempio 3, potremmo disegnare un punto un po' più in alto o più in basso, se non ne calcoliamo le coordinate, però, siamo sicuri che, per esempio, andando dal punto A al punto B la curva cresce, raggiunge un punto (che non deve essere per forza D) dove la curva cambia crescenza, diventando decrescente per raggiungere B.
Quindi la prima questione da affrontare è come si stabilisce che in un certo intervallo una funzione cresce o decresce.

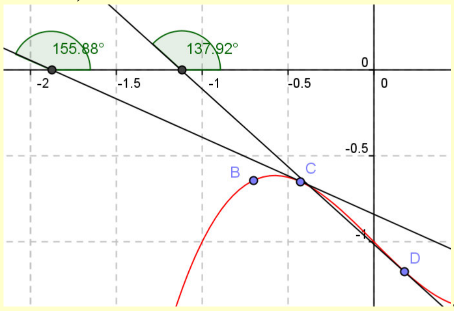
Esempio 4

Riprendiamo in considerazione la funzione $f(x) = x^3 - x - 1$ e il suo grafico tracciato da Geogebra.



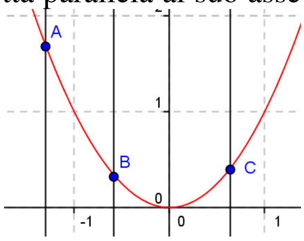
Cosa stabilisce che dal punto A al punto B la funzione cresca, mentre da C a D decresca? Le due figure seguenti forniscono la risposta.



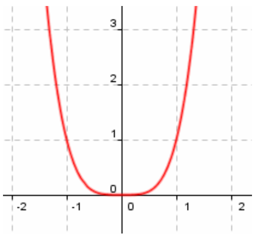


. Se una funzione cresce in un intervallo la retta tangente alla funzione in un generico punti dell'intervallo forma angoli acuti con il semiasse positivo delle ascisse, cioè ha coefficiente angolare positivo. Se la funzione decresce invece la detta tangente ha coefficiente angolare negativo.

Quindi il problema è ricondotto alla determinazione del coefficiente angolare della retta tangente a una funzione in un suo punto. Prima però dobbiamo chiarire cosa intendiamo con la dicitura *retta tangente a una curva*. Infatti siamo abituati a pensare che una retta sia tangente a una curva se la tocca in un solo punto, il che è ovviamente falso, come si vede nel caso della seguente parabola, in cui ogni retta parallela al suo asse



di simmetria incontra la parabola in un punto, ma ovviamente non è ivi tangente.
Allora potremmo dire che la retta è tangente se incontra la curva in un punto "doppio", ossia un punto in cui le soluzioni del sistema fra l'equazione della curva e l'equazione della retta sono due coincidenti. Ma anche questo non è vero perché per esempio la curva $y = x^4$ ha l'asse delle ascisse come retta tangente nell'origine, come mostrato nella figura seguente,



ma le soluzioni del sistema $\begin{cases} y = x^4 \\ y = 0 \end{cases}$, sono 4 coincidenti e non 2.
Per risolvere la questione poniamo la seguente definizione.

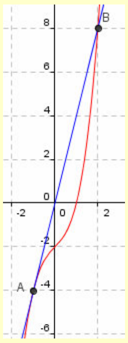
Definizione 1

Data una funzione $y = f(x)$, continua in un intorno completo di $P \equiv (x_0; f(x_0))$, diciamo che la retta di equazione $y = mx + q$ è a essa tangente in P se il sistema $\begin{cases} y = f(x) \\ y = mx + q \end{cases}$ ha fra le sue soluzioni $\begin{cases} x = x_0 \\ y = f(x_0) \end{cases}$ almeno due volte.

Ovviamente la definizione precedente non esclude che la tangente possa toccare la curva anche in altri punti diversi da quello di tangenza.

Esempio 5

La funzione $f(x) = x^3 + x - 2$ ha la retta $y = 4x$ come tangente nel punto $A \equiv (-1; 4)$, come mostrato in figura.



Infatti il sistema $\begin{cases} y = x^3 + x - 2 \\ y = 4x \end{cases} \Rightarrow x^3 + x - 2 = 4x \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 \cdot (x - 2) = 0$, ha la soluzione doppia (–1; 4) ma ha anche la soluzione singola (2; 8).

La nostra definizione quindi fornisce un punto di vista diverso da quello finora intuitivo di retta tangente. Può però succedere anche qualcosa di inatteso.

Esempio 6

La funzione $f(x) = |x|$ ha retta tangente nell'origine? Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y = |x| \\ y = m \cdot x \end{cases} \Rightarrow |x| = mx \Rightarrow \begin{cases} x = mx \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -x = mx \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m = -1 \\ x < 0 \end{cases}$$

cioè non esiste una sola retta passante per l'origine che incontri la funzione almeno due volte nell'origine. Quindi la detta funzione non ha retta tangente nell'origine.

Quindi dobbiamo tenere conto che possono esserci anche funzioni continue che in alcuni punti non hanno retta tangente.

Torniamo al problema iniziale di trovare il coefficiente angolare della retta tangente a una funzione. La definizione 1 è troppo macchinosa, quindi ne forniamo un'altra a essa equivalente ma che usa i concetti del calcolo infinitesimale.

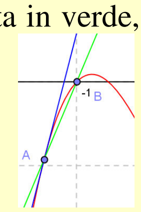
Definizione 2

Data una funzione $y = f(x)$, continua in un intorno completo $I_r(P)$, con $P \equiv (x_0; f(x_0))$, diciamo che essa è dotata di retta tangente in P, se, considerata una qualsiasi retta passante per P e per un punto Q di $I_r(P)$, che indichiamo con $r_{P,Q} : \dfrac{x - x_P}{x_Q - x_P} = \dfrac{y - y_P}{y_Q - y_P}$, esiste finito $\lim\limits_{Q \to P} r_{P,Q}$.

Quindi la retta tangente è definita come il limite di una retta passante per due punti quando uno dei due punti tende a diventare l'altro. In effetti ciò coincide con il precedente concetto algebrico di soluzione almeno doppia.

Esempio 7

In figura la retta tangente alla funzione nel punto A, indicata con il colore blu, è la posizione limite di una qualsiasi retta, tracciata in verde, passante per A e per un qualsiasi punto B diverso da A, quando B tende a diventare A.



Vediamo allora di determinare il coefficiente angolare della retta tangente usando la definizione 2.

Esempio 8

Consideriamo il caso in cui la funzione è crescente in un punto A. Ciò ci permette di dire che se B è un punto che ha un'ascissa maggiore di quella di A anche l'ordinata di B è maggiore di quella di A. Quindi se si ha $A \equiv (x_0; f(x_0))$ e $B \equiv (x_0 + h; f(x_0 + h))$, l'equazione della retta passante per A e B è:

$$r_{A,B} : \frac{x - x_0}{x_0 + h - x_0} = \frac{y - f(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)} \Rightarrow y = \frac{\left[f(x_0 + h) - f(x_0)\right] \cdot (x - x_0)}{h} + f(x_0)$$

Perciò il coefficiente angolare della retta per A e B è $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, quindi dobbiamo cercare se esiste finito $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. In caso di risposta positiva questo è il coefficiente angolare della retta tangente.

In vista del precedente esempio poniamo alcune definizioni.

Definizione 3

Data una funzione $y = f(x)$, continua in un intorno completo $\mathrm{I}_r(P)$, con $P \equiv (x_0; f(x_0))$, diciamo suo **rapporto incrementale di incremento $h > 0$**, la quantità $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Definizione 4

Data una funzione $y = f(x)$, continua in un intorno completo $\mathrm{I}_r(P)$, con $P \equiv (x_0; f(x_0))$, diciamo che essa è **derivabile in $x = x_0$**, se esiste finito $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Il limite finito si chiama **derivata prima di $f(x)$ in x_0**.

Notazione 1

Se una funzione è derivabile in $x = x_0$, indichiamo la sua derivata prima con uno dei seguenti simboli equivalenti: $f'(x_0), \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0}, D\left[f(x)\right]_{x=x_0}$. Se vogliamo indicare la derivata per tutti gli x di un insieme scriveremo invece: $f'(x), \frac{df(x)}{dx}, D\left[f(x)\right]$.

Quindi dire che una funzione è derivabile in un suo punto, da un punto di vista geometrico vuol dire che essa ammette retta tangente nel dato punto. Facilmente possiamo dire qual è l'equazione di questa retta.

Teorema 1

L'equazione della retta tangente alla funzione $y = f(x)$, derivabile in x_0, nel punto $P \equiv (x_0; f(x_0))$ è

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Dimostrazione Segue dai risultati precedenti.

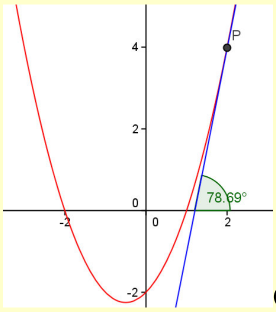
Esempio 9

Vogliamo stabilire se la funzione $f(x) = x^2 + x - 2$ è derivabile per $x = 2$. Abbiamo:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(2+h)^2+\left(\cancel{2}+h\right)-\cancel{2}\right]-\left(2^2+\cancel{2-2}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{4}+h^2+4h+h-\cancel{4}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{\cancel{2}}+5\cancel{h}}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(h+5)=5$$

Quindi la funzione è derivabile in $x = 2$ e la sua derivata è $f'(2) = 5$. Quindi l'equazione della retta tangente alla funzione nel punto (2; 4) è $y - 4 = 5 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = 5x - 6$, e tale retta forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo acuto, come confermato dal grafico ottenuto con Geogebra.



Ovviamente, da quel che sappiamo sul significato del coefficiente angolare vuol dire anche che *tan*(78,69°) ≈ 5. L'approssimazione è dovuta al fatto che il valore calcolato da Geogebra è approssimato.

L'angolo storico

La nascita del calcolo differenziale è storicamente legata alla risoluzione dei seguenti quattro problemi:

1. trovare velocità ed accelerazione istantanea data la legge temporale dello spazio;
2. trovare la tangente a una curva;
3. trovare il massimo o il minimo di una funzione;
4. calcolare la lunghezza di una curva.

Il primo approccio che porta all'attuale concetto di derivata è ad opera di Pierre de Fermat che nel suo manoscritto del 1637, *Methodus ad disquirendam maximam et minimum* determina l'equazione della tangente a una curva con un metodo molto simile a quello del rapporto incrementale. Da allora molti altri si interessarono di questo problema. Ma i due maggiormente legati alla questione sono Isaac Newton che espone le sue idee in un'opera del 1671: *Methodus fluxionum et seriereum infinitum*, che però è pubblicata solo nel 1736 e Gottfried Wilhelm Leibniz. Questi, a differenza di Newton che era restio a pubblicare, faceva stampare ogni suo lavoro. E il primo in cui comincia a parlare di queste nozioni è un articolo del 1684. Inoltre Leibniz ha anche il merito di essere stato un inventore di simboli matematici *duraturi* ed *efficaci*, il che permise la diffusione delle sue idee molto più rapidamente. Per secoli vi sono state infinite discussioni su chi dei due grandi scienziati debba essere considerato il "padre" del calcolo infinitesimale, la conclusione è che entrambi giunsero alle conclusioni più o meno nello stesso momento, ma solo il differente approccio alla diffusione stampata delle idee fece prevalere Leibniz su Newton.
Dal punto di vista della notazione Newton usava porre un puntino per indicare la derivata, che chiamava *flussione*, cioè $\dot{x}$. Invece Leibniz usava la scritta *dx*. In seguito Joseph Louis Lagrange nel 1797 riprendendo un simbolo usato da Johann Bernoulli qualche secolo prima, indicò la derivata con la lettera D.

Quindi possiamo dire che una curva derivabile può essere tracciata anche dall'insieme delle tangenti nei suoi punti.

Esempio 10

La funzione $f(x) = x^2 + x - 2$, è derivabile per ogni x reale, come è facile capire, anzi abbiamo:

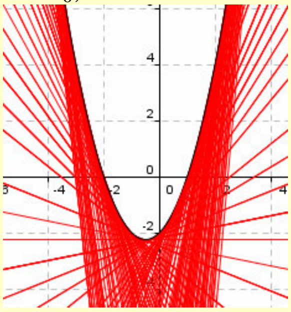
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x_0+h)^2+\left(\cancel{x_0}+h\right)-\cancel{2}\right]-\left(x_0^2+\cancel{x_0}-\cancel{2}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x_0^2}+h^2+2x_0h+h-\cancel{x_0^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{\cancel{2}}+2x_0\cancel{h}+\cancel{h}}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(h+2x_0+1)=2x_0+1$$

Quindi la funzione è derivabile in ogni punto $x = x_0$ e la sua derivata è $f'(x_0) = 2x_0 + 1$. Quindi l'equazione della retta tangente alla funzione nel punto $(x_0; x_0^2 + x_0 - 2)$ è

$$y - x_0^2 - x_0 + 2 = (2x_0 + 1) \cdot (x - x_0) \Rightarrow y = (2x_0 + 1) \cdot x - x_0^2 + 2.$$

Pertanto al variare del punto, cioè della variabile x_0, avremo infinite rette che descrivono il contorno della funzione, come mostrato da Geogebra.



Le idee espresse nel precedente esempio meritano una definizione.

Definizione 5

Data una funzione $y = f(x)$, derivabile in tutti i punti del suo dominio, l'insieme delle sue rette tangenti si chiama **inviluppo della funzione**.

Per quanto premesso possiamo enunciare i seguenti risultati.

Teorema 2

- Una funzione $y = f(x)$, continua e derivabile in un intervallo $[a; b]$ è crescente in $[a; b]$ se e solo se si ha $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in [a; b]$.
- Una funzione $y = f(x)$, continua e derivabile in un intervallo $[a; b]$ è decrescente in $[a; b]$ se e solo se si ha $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in [a; b]$.

Dimostrazione immediata da tutto ciò che abbiamo detto finora.

Esempio 11

Consideriamo la funzione $f(x) = x^2 + x - 2$, che abbiamo già visto essere una parabola di vertice un punto di ascissa – ½ e che volge la concavità verso l'alto. Noi sappiamo che tale funzione, in quanto parabola, è crescente per tutti i punti a destra del vertice, cioè di ascissa maggiore di – ½ e decrescente per quelli a sinistra del vertice. Verifichiamo il tutto con l'uso del Teorema 2. Calcoliamo quindi la derivata della funzione in un suo punto generico x_0. Abbiamo:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x_0+h)^2+x_0+h-2\right]-\left(x_0^2+x_0-2\right)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x_0^2}+2hx_0+h^2+\cancel{x_0}+h-\cancel{2}-\cancel{x_0^2}-\cancel{x_0}+\cancel{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2hx_0+h^2+h}{h}=\lim_{h\to 0}\left(2x_0+h+1\right)=2x_0+1$$

Quindi, secondo il teorema 2 la funzione è crescente per $2x_0 + 1 > 0$, cioè per $x_0 > -½$, che è proprio quello che avevamo preannunciato. Ovviamente sarà decrescente per $x_0 < -½$.

Naturalmente, affinché una funzione sia derivabile essa deve anche essere continua. Come abbiamo già visto nell'esempio 6, invece non è detto che una funzione continua sia sempre derivabile.

Teorema 3

Una funzione $y = f(x)$, derivabile in un intervallo $[a; b]$ è anche continua in $[a; b]$.

Dimostrazione

Dimostrare che $y = f(x)$ è continua in $x_0 \in [a; b]$ equivale a dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = 0$$

Dall'ipotesi di derivabilità noi sappiamo che $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)\in\mathbb{R}$, per ogni $h \neq 0$, quindi se consideriamo $h = x - x_0$, possiamo anche scrivere $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$. Ciò significa, per le proprietà dei limiti che si ha anche: $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}f'(x_0)\cdot(x-x_0)=0$, cioè la tesi.

Esempio 12

La funzione $f(x) = |x|$ pur essendo continua in $x = 0$, non è ivi derivabile. Infatti abbiamo:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

e questo limite non esiste perché $x = 0$ è un punto di discontinuità di I specie, dato che

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1,\ \lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h}{h}=-1.$$

Una funzione non è derivabile se il limite del suo rapporto incrementale non esiste o non è finito. Poniamo allora tre distinte definizioni per le due eventualità.

Definizione 6

Data una funzione $y = f(x)$, continua in un intorno completo di $P \equiv (x_0; f(x_0))$, se

- $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ non esiste, e almeno uno dei due limiti sinistro o destro esiste finito, allora diciamo che la funzione ha in P un **punto angoloso**. I limiti, se finiti, destro e sinistro si dicono rispettivamente **derivata sinistra** e **derivata destra** della funzione.
- $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\pm\infty \vee \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\mp\infty$ allora diciamo che la funzione ha in P un **punto cuspidale**
- $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\pm\infty \vee \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\pm\infty$ allora diciamo che la funzione ha in P un **punto di flesso a tangente verticale**

Notazione 2

Le derivate sinistra e destra in $x = x_0$, di una funzione si indicano rispettivamente con: $f'_-(x_0), f'_+(x_0)$.

Osserviamo che abbiamo distinto il caso in cui i limiti sinistro e destro del rapporto incrementale siano infiniti dello stesso segno, da quello in cui invece hanno segni diversi. Vediamo di capire il perché. Prima osserviamo che la funzione $f(x) = |x|$ ha un punto angoloso in $x = 0$, quindi ha due distinte tangenti. Il che accade anche per i punti cuspidali.

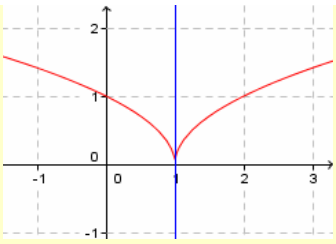
Esempio 13

La funzione $f(x)=\sqrt{|x-1|}$ è continua per ogni x, vediamo se è derivabile per $x = 1$. Abbiamo:

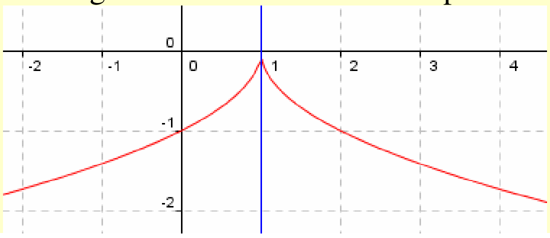
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{|h|}-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{-h}}{h}=-\infty$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{|h|}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h}=+\infty$$

Pertanto per $x = 1$ abbiamo un punto cuspidale. Facciamo rappresentare il grafico a Geogebra



Ovviamente dire che per $x = 1$ vi è una cuspide equivale a dire che la retta tangente alla funzione in tale punto ha coefficiente angolare infinito, quindi è una retta parallela all'asse delle ordinate, come mostrato in figura. Dato che i due coefficienti angolari hanno segno contrario vuol dire che da sinistra l'angolo è di –90° e da destra di +90°. Questo fa sì che la curva cambi crescenza, passando da una fase decrescente a una crescente. Ovviamente la funzione $f(x) = -\sqrt{|x-1|}$, si comporta esattamente al contrario, avendo prima una fase di crescita e poi di decrescita. Ma ugualmente si ha in $x = 1$ un punto cuspidale.



Invece i punti di flesso hanno la stessa tangente da entrambi i lati del punto, solo che questa tangente è verticale e quindi la funzione non è nel punto derivabile.

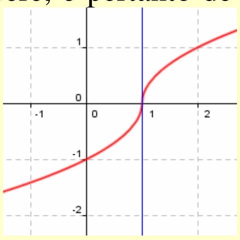
Esempio 14

La funzione $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ -\sqrt{1-x} & x < 1 \end{cases}$ è continua per ogni x, ma non è derivabile per $x = 1$, infatti:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-\sqrt{-h} - 0}{h} = +\infty$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = +\infty$$

Pertanto per $x = 1$ abbiamo un punto di flesso a tangente verticale. Facciamo rappresentare il grafico a Geogebra, in cui si vede appunto che la curva continua a crescere, e pertanto deve operare una "flessione" per poter fare sì che la retta tangente in $x = 1$ rimanga verticale.



Concludiamo osservando che se la funzione è definita solo in un intorno destro o sinistro del punto e la derivata è infinita, non possiamo distinguere se il punto è cuspidale o di flesso, diciamo quindi semplicemente che la funzione nel dato punto non è derivabile.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare la derivata della funzione $f(x) = x^3 - x + 1$ nel suo punto di ascissa $x_0 = 0$.

Dobbiamo calcolare il seguente limite: $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3-h+1-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot(h^2-1)}{\cancel{h}}=-1$.

Quindi $f'(0)=-1$.

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni nei punti accanto indicati

Livello 1

1. $f(x) = x^2 + x$; $x_0 = -1$ [– 1] $f(x) = 3x + 2$; $x_0 = 1$ [3] $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$; $x_0 = 0$ [3]
2. $f(x) = x^3 + x$; $x_0 = 2$ [13] $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$; $x_0 = ½$ [–5/4]
3. $f(x) = x^4 + x^2$; $x_0=\sqrt{2}$ $\left[10\cdot\sqrt{2}\right]$ $f(x) = -x^5 + x^3$; $x_0=-\sqrt{2}$ [–14] $f(x)=\sqrt{x}$; $x_0 = 1$ [½]
4. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$; $x_0 = 0$ [0] $f(x) = 2x^3 - 1$; $x_0 = -½$ [3/2]

Livello 2

5. $f(x)=\frac{3x^2-5x}{7x+1}$; $x_0 = 0$ [–5] $f(x)=\frac{5x^2-3}{9x^2+7x}$; $x_0 = 1$ [55/128] $f(x) = ln(x)$; $x_0 = 2$ [½]
6. $f(x)=\frac{x+2}{3x-5}$; $x_0 = -1$ [–11/64] $f(x) = e^{2x}$; $x_0 = 0$ [2] $f(x) = e^x$; $x_0 = 1$ [e]
7. $f(x)=\frac{x-5}{8x^2-3x+5}$; $x_0 = ½$ [112/121] $f(x)=\frac{x^2+3x-5}{4x^2+1}$; $x_0 = 2$ [39/289]
8. $f(x)=\frac{7x^2-5}{5x^2+3x-2}$; $x_0 = 2$ [143/576] $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{x-1}$; $x_0 = 1/3$ $\left[-\frac{9+6\cdot\sqrt{3}}{4}\right]$

Livello 3

9. $f(x) = sin(x)$; $x_0 = 0$ [0] $f(x) = cos(x)$; $x_0 = \pi$ [0] $f(x) = sin(2x)$; $x_0 = \pi/2$ [0]
10. $f(x) = cos(x/2)$; $x_0 = \pi$ [–½] $f(x) = sin^2(x)$; $x_0 = 1$ [$sin(2)$] $f(x) = tan(x)$; $x_0 = 0$ [1]
11. $f(x)=\sqrt[3]{x}-sin(x)$; $x_0 = 0$ [∅] $f(x) = cos(x + 1) - ln(2x)$; $x_0 = 1$ [– 1 – $sin(2)$]
12. $f(x)=e^{\sqrt{x}}+sin(x)$; $x_0 = 2$ $\left[\frac{\sqrt{2}\cdot e^{\sqrt{2}}+4\cdot cos(2)}{4}\right]$ $f(x) = sin(e^x)$; $x_0 = 0$ [$cos(1)$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo scrivere l'equazione della retta tangente alla funzione $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$ nel suo punto di ascissa $x_0 = 1$. Dobbiamo intanto calcolare il coefficiente angolare della retta, ossia la derivata della funzione, quindi il limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cdot(1+h)^4-3\cdot(1+h)^2+1-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2\cdot\left(2+2h^2+4h-3\right)+1}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2\cdot\left(2h^2+4h-1\right)+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h^4+8h^3+9h^2+2h-1+1}{h}=\lim_{h\to 0}\left(2h^3+8h^2+9h+2\right)=2.$$

Ora possiamo scrivere l'equazione cercata: $y - f(1) = f'(1)\cdot(x - 1) \Rightarrow y - 0 = 2\cdot(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2$.

Scrivere le rette tangenti alle seguenti funzioni nei punti accanto indicati

Livello 1

13. $f(x) = 2x + 1$; $x_0 = 1$ [$y = 2x + 1$] $f(x) = 1 - x$; $x_0 = 3$ [$y = 1 - x$]
14. $f(x) = x^2 + 4x - 1$; $x_0 = 1$ [$y = 6x - 2$] $f(x) = 2x^3 + 3x^2$; $x_0 = -2$ [$y = 12x + 20$]
15. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$; $x_0 = -½$ [$y = -3/2x - 5/4$] $f(x) = x^4 - 1$; $x_0 = -2/3$ [$y = -32/27x - 43/27$]

16. $f(x) = x^3 + x^2 + 1$; $x_0 = -1$ [$y = x + 2$] $f(x) = x^5 + x^3 + x$; $x_0 = \sqrt{2}$ $\left[y = 27x - 20\cdot\sqrt{2}\right]$

17. $f(x) = \sqrt{x+1}$; $x_0 = 1$ $\left[y = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot(x+3)\right]$ $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$; $x_0 = 0$ [$y = \frac{1}{2}x + 1$]

Livello 2

18. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$; $x_0 = 0$ [$y = 2x - 1$] $f(x) = \frac{2x}{x+2}$; $x_0 = 1$ [$y = 4/9x + 2/9$]

19. $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$; $x_0 = 0$ [$y = -x - 2$] $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}$; $x_0 = 2$ [$y = 1/25x + 28/25$]

20. $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-2}$; $x_0 = -1/3$ [$y = 22/49x - 23/49$] $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+1}$; $x_0 = \frac{1}{2}$ [$y = 32x - 20$]

21. $f(x) = ln(x)$; $x_0 = 1$ [$y = x - 1$] $f(x) = e^x$; $x_0 = 1$ [$y = e\, x$]

Livello 3

22. $f(x) = cos(x)$; $x_0 = \pi/3$ $\left[y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x + \frac{\sqrt{3}\cdot\pi}{6} + \frac{1}{2}\right]$ $f(x) = sin(x)$; $x_0 = \pi/2$ [$y = 1$]

23. $f(x) = sin(2x)$; $x_0 = \pi/4$ [$y = 1$] $f(x) = cos(x/2)$; $x_0 = 2\pi$ [$y = -1$]

24. $f(x) = sin\left(\frac{2}{x}\right)$; $x_0 = \frac{3}{\pi}$ $\left[y = \frac{\pi^2}{9}\cdot x - \frac{2\pi - 3\cdot\sqrt{3}}{6}\right]$ $f(x) = cos\left(\frac{4}{x^2}\right)$; $x_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ $x_0 = 2$ [$y = 1$]

25. Per quali punti la funzione $f(x) = x^2 + 4x$ ha derivata nulla? [(–2; –4)]
26. Per quali punti la funzione $f(x) = x^3 + x^2$ ha derivata nulla? [(0; 0), (–2/3; 4/27)]
27. Per quali punti la funzione $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ è crescente? [$x > 0$]
28. Per quali punti la funzione $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-1}$ è decrescente? [$x > 0$]
29. In quali punti della funzione $f(x) = \sqrt{x+1}$ la funzione non è derivabile? [(–1; 0)]
30. Dimostrare che se la funzione $f(x)$ è derivabile in x_0, allora anche $f(x) + k$ ($k \in \mathbb{R}$) è derivabile in x_0 e $D[k + f(x)]_{x=x0} = D[f(x)]_{x=x0}$.
31. Dimostrare che se la funzione $f(x)$ è derivabile in x_0, allora anche $k \cdot f(x)$ ($k \in \mathbb{R}$) è derivabile in x_0 e la $D[k \cdot f(x)]_{x=x0} = k \cdot D[f(x)]_{x=x0}$

Lavoriamo insieme

Abbiamo visto che in generale una funzione che contiene dei valori assoluti non è derivabile nei punti che annullano il valore assoluto. Vediamo se ciò accade anche per la funzione $f(x) = \frac{|x|+1}{|x+1|}$. Intanto essa è definita solo per $x + 1 \neq 0$, cioè per $x \neq -1$. Inoltre può scriversi anche nel modo seguente: $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x+1} = 1 & x \geq 0 \\ \frac{1-x}{|x+1|} & x < 0 \end{cases}$. Quindi dobbiamo calcolare $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1-1}{h} = 0$ e

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{1-h}{1+h}-1}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{1-h-1-h}{h\cdot(1+h)} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-2h}{h\cdot(1+h)} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-2}{1+h} = -2.$$

Perciò la funzione non è derivabile per $x = 0$, in cui vi è un punto angoloso.

Stabilire quali delle seguenti funzioni non sono derivabili nei punti accanto indicati, per quelle che non lo sono stabilire, se possibile, se il dato punto è angoloso, cuspidale o di flesso

Livello 2

32. $f(x)=\sqrt{x}$; $x_0 = 0$ [Non derivabile] $f(x) = ln(x^2 + 1)$; $x_0 = 0$ [Derivabile]

33. $f(x)=\dfrac{|x|}{x-1}$; $x_0 = 0$ [Angoloso] $f(x)=\dfrac{x}{|x+1|}$; $x_0 = 0$ [Derivabile]

34. $f(x)=\dfrac{|x|+|x+1|}{|x|-|x+1|}$; $x_0 = 0 \vee x_0 = -1$ [Angolosi] $f(x) = ln(|x| + 1)$; $x_0 = 0$ [Angoloso]

35. $f(x) = |x - 2|$; $x_0 = 2$ [Angoloso] $f(x) = |2x + 1| - |2x - 1|$; $x_0 = \pm ½$ [Angolosi]

Livello 3

36. $f(x)=sin\left(\sqrt[3]{x}\right)$; $x_0 = 0$ [Flesso] $f(x)=\sqrt{|x|}$; $x_0 = 0$ [Cuspidale]

37. $f(x) = sin(|x - \pi|)$; $x_0 = \pi$ [Angoloso] $f(x) = cos(|x|)$; $x_0 = 0$ [Derivabile]

38. $f(x)=sin\left(\sqrt[3]{x^2}\right)$; $x_0 = 0$ [Cuspidale] $f(x)=sin\left(\sqrt[3]{x^4}\right)$; $x_0 = 0$ [Derivabile]

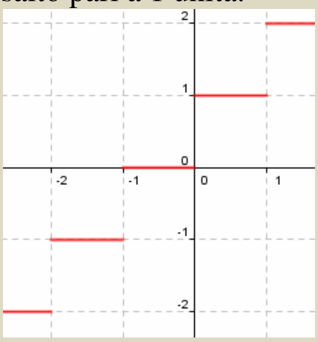
39. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge 0\\ -\sqrt{-x} & x<0\end{cases}$; $x_0 = 0$ [Flesso] $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2} & x\ge 0\\ -\sqrt{x^2} & x<0\end{cases}$; $x_0 = 0$ [Derivabile]

40. $f(x)=\begin{cases}sin(|x|) & x\ge 0\\ cos(|x-\pi/2|) & x<0\end{cases}$; $x_0 = 0$ [Derivabile] $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x-1} & x\ge 0\\ \dfrac{-|x|}{x-1} & x<0\end{cases}$; $x_0 = 0$ [Derivabile]

41. $f(x)=\begin{cases}ln\left(\sqrt{x}\right) & x\ge 0\\ -ln\left(\sqrt{-x}\right) & x<0\end{cases}$; $x_0 = 0$ [Non continua] $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|} & x\ge 0\\ sin(|x|) & x<0\end{cases}$; $x_0 = 0$ [Non derivabile]

Lavoriamo insieme

Consideriamo la funzione *ceiling*(x), che indichiamo con $f(x) = \lceil x \rceil$, che determina il massimo intero contenuto in x, che ricordiamo che ha il grafico seguente, che è quello di una funzione con infiniti punti di discontinuità di I specie per tutte le x intere, con salto pari a 1 unità.



Ovviamente dove la funzione non è continua non è neanche derivabile, ma dove è continua è invece derivabile e la sua derivata è ovviamente 0, dato che abbiamo a che fare con segmenti paralleli all'asse delle ascisse, le cui tangenti quindi sono gli stessi segmenti di coefficiente angolare zero.

Dopo avere rappresentato le seguenti funzioni stabilire dove sono derivabili e quanto vale detta derivata. Ricordiamo le funzioni: *floor*(x) = $\lfloor x \rfloor$, cioè il minimo intero contenuto in x; $segno(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$, *round*($x$) è l'arrotondamento di x

Livello 2

42. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ [$f'(x) = 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$] $f(x) = segno(x)$ [$f'(x) = 0, x \neq 0$]

43. $f(x) = round(x)$ [$f'(x) = 0, x \in \mathbb{R}: x - 0{,}5 \notin \mathbb{Z}$] $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil$ [$f'(x) = 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$]

44. $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\geq 0\\ 3x-1 & x<0\end{cases}$ $\left[f'(x)=\begin{cases}2 & x>0\\ 3 & x<0\end{cases}\right]$ $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\geq 0\\ x-1 & x<0\end{cases}$ $[f'(x) = 1, x \neq 0]$

45. $f(x)=\begin{cases}x & x\geq 0\\ 3x & x<0\end{cases}$ $\left[f'(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 3 & x<0\end{cases}\right]$ $f(x)=\begin{cases}1-2x & x\geq 2\\ 3x-9 & x<2\end{cases}$ $\left[f'(x)=\begin{cases}-2 & x>2\\ 3 & x<2\end{cases}\right]$

46. $f(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ x & 0\leq x<1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$ $\left[f'(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & 0<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}\right]$ $f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ x & 0\leq x<1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$ $\left[f'(x)=\begin{cases}0 & x<0\vee x>1\\ 1 & 0<x<1\end{cases}\right]$

Derivate delle funzioni elementari

La matematica incomincia solamente quando il misuratore ed il calcolatore si interessano al funzionamento della loro tecnica e la istituzionalizzano come una specie di gioco le cui due idee direttrici sono l'invenzione e la dimostrazione. *Gilles Gaston Granger*

Il problema

Se volessimo calcolare la derivata della funzione $f(x) = x^{27} + 134x^{13} + sin(17x)$, applicando la definizione 4, avremmo da effettuare laboriosi calcoli, non solo, ma, una volta che la abbiamo calcolata, se dovessimo calcolare la derivata della funzione $f(x) = 3x^{27} - 3x^{13} + 5sin(17x)$, non possiamo sfruttare i calcoli precedenti?

La citazione proposta all'inizio di questo paragrafo è molto istruttiva e ci ricorda che il matematico, una volta che ha inventato una certa tecnica, vuole evitare di ripeterla, ma preferisce determinare una legge generale che applicherà. Un po' quello che abbiamo fatto alle scuole elementari imparando a memoria le cosiddette tabelline. Una volta che abbiamo capito come si moltiplicano i numeri fra loro, cioè che dire 5 × 7 è lo stesso che dire 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5, è inutile ripeterlo ogni volta, impariamo *una volta per tutte*, che 5 × 7 = 35 e tutte le volte in cui ci servirà, useremo questa informazione. Lo stesso abbiamo fatto molte altre volte e così faremo anche stavolta, cioè impareremo come calcolare le derivate di alcune funzioni elementari, quindi impareremo come usare queste informazioni per calcoli più complessi.
Cominciamo intanto a calcolare qualche semplice derivata in generale, non più quindi in un dato punto.

Esempio 15

Vogliamo stabilire se la funzione costante $f(x) = 3$ è derivabile e qual è la sua derivata. In questo caso possiamo procedere in due modi.

1. Geometricamente. Dato che la funzione non è altro che una retta e che la retta tangente a una retta è ovviamente la retta stessa, possiamo dire che la derivata è il coefficiente angolare della retta, cioè, in questo caso, $f'(x) = 0$.
2. Algebricamente. Calcoliamo il limite del rapporto incrementale nel generico punto di ascissa x, cioè:
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h}=0$$
Ovviamente, essendo la funzione costante $f(x + h) = 3$ per ogni x e per ogni h.

Dal precedente esempio segue immediato il risultato generale.

Teorema 4

La funzione costante $f(x) = k$ è derivabile per ogni x reale e si ha: $f'(x) = 0$.

Dimostrazione Sulla falsariga dell'esempio 15.

Tenuto conto dell'osservazione fatta nell'esempio 15 a proposito delle rette possiamo anche enunciare il seguente risultato.

Teorema 5

La funzione lineare $f(x) = ax + b$ è derivabile per ogni x reale e si ha: $f'(x) = a$.
Dimostrazione Sulla falsariga dell'esempio 15.

Segue abbastanza immediatamente il seguente risultato.

Corollario 1

Sia $f(x)$ derivabile in X e sia a un numero reale, allora $a \cdot f(x)$ è derivabile in X e si ha: $D[a \cdot f(x)] = a \cdot f'(x)$.
Dimostrazione Per esercizio

Adesso vogliamo considerare la funzione potenza $f(x) = x^n$, per n generico numero naturale.

Esempio 16

- Cominciamo con la funzione quadratica $f(x) = x^2$. L'approccio geometrico stavolta non è utile, poiché non è facile immaginare cosa accade per la retta tangente a una parabola. Conviene quindi usare il metodo algebrico: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$. Ovviamente otteniamo una forma indeterminata 0/0, ricordiamo anzi che il limite del rapporto incrementale è **sempre** una forma indeterminata 0/0. Eliminiamo l'indeterminazione: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2hx+h^2-\cancel{x^2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x$. Quindi si ha: $D[x^2] = 2x$.
- A questo punto facilmente possiamo calcolare la derivata della funzione cubica $f(x) = x^3$. Si ha: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\cancel{x^3}+3hx^2+3hx+h^3-\cancel{x^3}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot(3x^2+3hx+h^2)}{\cancel{h}} = 3x^2 = 2x$.
  Quindi $D[x^3] = 3x^2$.

Usando un procedimento induttivo possiamo enunciare il seguente risultato generale.

Teorema 6

La funzione potenza $f(x) = x^n$ è derivabile per ogni x reale e ogni n naturale e si ha: $f'(x) = nx^{n-1}$.
Dimostrazione

Dobbiamo calcolare $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$, quindi dobbiamo sviluppare la potenza del binomio, che potremmo fare mediante lo sviluppo del binomio di Newton. In effetti ciò non è necessario, quello che a noi interessa sapere è che lo sviluppo di $(x + h)^n$ è un polinomio omogeneo di grado n, i cui termini possono scriversi in modo che le potenze di x decrescano da n a 0 e, contemporaneamente, le potenze di h crescono da 0 a n. Cioè $(x + h)^n = x^n + a_1 x^{n-1} h + a_2 x^{n-2} h^2 + \ldots + a_{n-1}xh^{n-1} + a_{n-1}h^2$. Abbiamo: $a_k = \binom{n}{k}$, ma in realtà a noi interessano solo i primi due addendi. Infatti il primo ci interessa perché si semplificherà con $-x^n$, e perciò eliminerà l'indeterminazione; il secondo ci interessa perché è l'unico che contiene h al primo grado. Tutti gli altri addendi invece conterranno potenze di h maggiori o uguali a 2, pertanto quando semplificheremo per h numeratore e denominatore solo il secondo addendo non avrà h e quindi, passando al limite rimarrà solo esso. Chiariamo meglio:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^n}+nx^{n-1}h+a_2x^{n-2}h^2+\ldots+a_{n-1}h^n-\cancel{x^n}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot\left(nx^{n-1}+a_2x^{n-2}h+\ldots+a_{n-1}h^{n-1}\right)}{\cancel{h}} = nx^{n-1}$$

Che è ciò che voleva dimostrarsi.

Esempio 17

Possiamo dire che si ha: $D[x^{24}] = 24x^{23}$; $D[x^{417}] = 417x^{416}$.

Il risultato precedente può generalizzarsi per una potenza a esponente reale.

Teorema 7

La funzione potenza $f(x) = x^p$ è derivabile per ogni x e ogni p reale e si ha: $f'(x) = p \cdot x^{p-1}$.

Dimostrazione

Dobbiamo calcolare $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^p - x^p}{h}$, dividiamo numeratore e denominatore per x^p ottenendo: $\lim\limits_{h\to 0} x^p \cdot \frac{(1+h/x)^p - 1}{h}$, ci accorgiamo che il secondo fattore assomiglia a un limite notevole, lo modifichiamo opportunamente: $\lim\limits_{h\to 0} x^{p-1} \cdot \frac{(1+h/x)^p - 1}{h/x} = x^{p-1} \cdot p$, che è la tesi cercata.

Esempio 18

Possiamo dire che si ha: $D\left(\frac{1}{x}\right) = D\left(x^{-1}\right) = -x^{-2} = \frac{1}{x^2}$; $D\left(\sqrt{x}\right) = D\left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
$D\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) = D\left(x^{-2/3}\right) = -\frac{2}{3}x^{-5/3} = -\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x^5}}$; $D\left(x^{e+\pi}\right) = (e+\pi)\cdot x^{e+\pi-1}$.

Consideriamo qualche altra funzione elementare.

Teorema 8

La funzione esponenziale $f(x) = a^x$ è derivabile per ogni x reale e ogni $a > 0$ e si ha: $f'(x) = a^x \cdot ln(a)$.

Dimostrazione

Abbiamo: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{a^x\cdot\left(a^h - 1\right)}{h}$. Otteniamo la tesi richiesta ricordando il limite notevole: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = ln(a)$.

Immediato segue il seguente risultato.

Corollario 2

La funzione esponenziale $f(x) = e^x$ è derivabile per ogni x reale e si ha: $f'(x) = e^x$

Esempio 19

Abbiamo: $D\left(2^x\right) = 2^x \cdot \ln(2)$; $D\left(\pi^x\right) = \pi^x \cdot \ln(\pi)$.

Ancora una funzione elementare.

Teorema 9

La funzione logaritmica $f(x) = log_a(x)$ è derivabile per ogni x reale positivo e ogni $a > 0$ e diverso da 1 e si ha: $f'(x) = 1/[x\cdot ln(a)]$.

Dimostrazione

Abbiamo: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{log_a(x+h)-log_a(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{log_a\frac{x+h}{x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$. Otteniamo la tesi richiesta moltiplicando e dividendo per x e ricordando il limite notevole: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{log_a(1+h)}{h}=\frac{1}{ln(a)}$.

Immediato è il seguente risultato.

Corollario 3

Si ha $D[ln(x)] = 1/x$.

Esempio 20

Abbiamo: $D\left[log_3(x)\right]=\frac{1}{x\cdot ln(3)};D\left[log_{\frac{2}{3}}(x)\right]=\frac{1}{x\cdot ln\left(\frac{2}{3}\right)}$.

Passiamo alle funzioni goniometriche.

Teorema 10

La funzione $f(x) = sin(x)$ è derivabile per ogni x reale e si ha: $f'(x) = cos(x)$.

Dimostrazione

Abbiamo: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{sin(x+h)-sin(x)}{h}$. Per eliminare l'indeterminazione applichiamo la formula di prostaferesi: $sin(p)-sin(q)=2\cdot sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$, ottenendo così:

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\cdot cos\left(\frac{2x+h}{2}\right).$$

Otteniamo la tesi richiesta ricordando il limite notevole: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}=1$.

Allo stesso modo abbiamo:

Teorema 11

La funzione $f(x) = cos(x)$ è derivabile per ogni x reale e si ha: $f'(x) = -sin(x)$.

Dimostrazione per esercizio

Nei successivi paragrafi calcoleremo derivate di altre funzioni più complesse, utilizzando altre tecniche.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare la derivata della funzione $\sqrt[3]{x}$ applicando la formula determinata nel teorema 7. Abbiamo: $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, quindi $D\left(\sqrt[3]{x}\right) = D\left(x^{1/3}\right) = \frac{1}{3} \cdot x^{1/3-1} = \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

Determinare le derivate delle seguenti funzioni, usando la formula stabilita dal teorema 7

Livello 1

1. x^{72} $[72x^{71}]$ $x^{\sqrt{2}}$ $\left[\sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}-1}\right]$ x^e $[ex^{e-1}]$ $\sqrt{x^5}$ $\left[\frac{5}{2} \cdot \sqrt{x^3}\right]$ $\sqrt[7]{x^3}$ $\left[\frac{3}{7 \cdot \sqrt[7]{x^4}}\right]$

2. $\sqrt[3]{x^{\sqrt{2}}}$ $\left[\frac{\sqrt{2} \cdot x^{\frac{\sqrt{2}-3}{3}}}{3}\right]$ $1/x^4$ $[-4/x^5]$ $1/x^{e+1}$ $[-(e+1) \cdot x^{-e-2}]$ $1/x^{\pi}$ $[-\pi \cdot x^{-\pi-1}]$

3. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\left[\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^3}}\right]$ $\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}$ $\left[-\frac{5}{6 \cdot \sqrt[6]{x^{11}}}\right]$ $\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}$ $\left[-\frac{1}{6 \cdot \sqrt[6]{x^7}}\right]$

Livello 2

4. $\frac{x^e}{x^{\sqrt{2}}}$ $\left[\left(e-\sqrt{2}\right) \cdot x^{e-\sqrt{2}-1}\right]$ $\frac{x^{\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{x}}$ $\left[\frac{3 \cdot \sqrt{2}-1}{3} \cdot x^{\frac{3\cdot\sqrt{2}-4}{3}}\right]$

5. $\frac{x^{e+\sqrt{2}}}{\sqrt{x^{1-\pi}}}$ $\left[\frac{2e+\pi+2 \cdot \sqrt{2}-1}{2} \cdot x^{\frac{2e+\pi+2\sqrt{2}-3}{2}}\right]$ $\frac{\sqrt[e-1]{x^{e+1}}}{\sqrt{x^{e-1}}}$ $\left[\frac{e^2-4e-1}{2 \cdot (1-e)} \cdot x^{\frac{e^2-2e-3}{2-2e}}\right]$

6. $\sqrt{x^n}$ $\left[\frac{n}{2} \cdot \sqrt{x^{n-2}}\right]$ $\sqrt[m]{x^n}$ $\left[\frac{n}{m} \cdot \sqrt[m]{x^{n-m}}\right]$

7. $\frac{1}{\sqrt{x^n}}$ $\left[-\frac{n}{2 \cdot \sqrt{x^{n+2}}}\right]$ $\frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$ $\left[-\frac{n}{m \cdot \sqrt[m]{x^{n+m}}}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare la derivata della funzione $log_4(x^3)$ applicando la formula determinata nel teorema 9. Intanto applichiamo le proprietà dei logaritmi, scrivendo $3 \cdot log_4(x)$, quindi abbiamo:

$$D\left[log_4\left(x^3\right)\right] = D\left[3 \cdot log_4\left(x\right)\right] = \frac{3}{x \cdot ln(4)}$$

Determinare le derivate delle seguenti funzioni, usando le formule stabilite dai teoremi 8 e 9

Livello 1

8. $4e^x$ $[4e^x]$ e^{x+1} $[e^{x+1}]$ e^{x-2} $[e^{x-2}]$ 2^{x-1} $[2^{x-1} \cdot ln(2)]$ $3^{x+\sqrt{2}}$ $\left[3^{x+\sqrt{2}} \cdot ln(3)\right]$

9. $1/3^x$ $[-ln(3)/3^x]$ $log_3(1/x^4)$ $[-4/(x \cdot ln(3))]$ $log_5\left(\sqrt{x}\right)$ $[1/(2x \cdot ln(5))]$ $ln(1/x^e)$ $[-e/x]$

10. $log_3(x) + log_3(5x)$ $[2/(x \cdot ln(3))]$ $log_7(3x) - log_7(x^2)$ $[-1/(x \cdot ln(7))]$

Livello 2

11. $2^x/4^{x-1}$ $[-2^{2-x} \cdot ln(2)]$ $3^x/9^{x-1}$ $[-3^{2-x} \cdot ln(3)]$ $4^x/8^{x+1}$ $[-2^{-x-3} \cdot ln(2)]$ $25^x/5^{x-2}$ $[5^{2+x} \cdot ln(5)]$

12. $log_2(x) \cdot log_x(4)$, $x > 0$, $x \neq 1$ $[0]$ $log_2(x) / log_4(x^2)$, $x > 0$ $[0]$ $ln^2(x) \cdot log_x(3)$, $x>0$, $x \neq 1$ $[ln(3)/x]$

13. $log_5{}^2(x^3) \cdot log_x(3)$, $x > 0$, $x \neq 1$ $[9log_5(3)/(x \cdot ln(5))]$ e^{x+n} $[e^{x+n}]$ a^{x+n} $[a^{x+n} \cdot ln(a)]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare la derivata della funzione $\frac{x+1}{x-1}$. Non sappiamo ancora come fare, quindi dobbiamo calcolare il limite del rapporto incrementale.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h+1}{x+h-1}-\frac{x+1}{x-1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h+1)\cdot(x-1)-(x+1)\cdot(x+h-1)}{h\cdot(x+h-1)\cdot(x-1)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x}+\cancel{hx}-h+\cancel{x}-\cancel{1}-\cancel{x^2}-\cancel{hx}+\cancel{x}-\cancel{x}-h+\cancel{1}}{h\cdot(x+h-1)\cdot(x-1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}\cdot(x+h-1)\cdot(x-1)}=-\frac{2}{(x-1)^2}$$

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

Livello 1

14. $f(x)=\frac{3x^2-5x}{7x+1}$ $\left[\frac{21x^2+6x-5}{(7x+1)^2}\right]$; $f(x)=\frac{5x^2-3}{9x^2+7x}$ $\left[\frac{35x^2+54x+21}{x^2\cdot(9x+7)^2}\right]$

15. $f(x)=\frac{7x-5}{6x^2+3x+1}$ $\left[\frac{-42x^2+60x+22}{(6x^2+3x+1)^2}\right]$; $f(x)=\frac{2x}{3x+1}$ $\left[\frac{2}{(3x+1)^2}\right]$

16. $f(x)=\frac{ax+b}{ax-b}$ $\left[\frac{-2ab}{(ax-b)^2}\right]$; $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ $\left[\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}\right]$

17. $f(x) = sin(3x)$ $[3cos(3x)]$; $f(x) = cos(x/2)$ $\left[-\frac{sin(x/2)}{2}\right]$

18. $f(x) = (2x + 5)^3$ $[6 \cdot (2x + 5)^2]$; $f(x) = [sin(x) + cos(x)]^2$ $[4cos^2(x) - 2]$

19. $f(x) = sin^2(17x) + cos^2(17x)$ $[0]$; $f(x) = sec(25x) \cdot cos(25x)$ $[0]$

Livello 2

20. $f(x) = sin(nx)$ $[n \cdot cos(nx)]$; $f(x) = cos(nx)$ $[-n \cdot sin(nx)]$

21. Trovare l'errore nella seguente procedura di calcolo della derivata della funzione $sin(2x)$

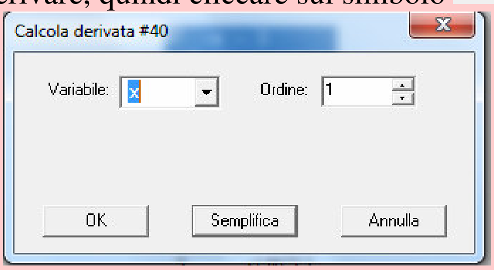
$$\lim_{h\to 0}\frac{sin(2x+h)-sin(2x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cdot sin\left(\frac{2x+h-2x}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{2x+h+2x}{2}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{sin\left(\frac{hx}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{4x+h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=\lim_{h\to 0}\frac{sin\left(\frac{hx}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}cos\left(\frac{4x+h}{2}\right)=\lim_{h\to 0}cos\left(\frac{4x+h}{2}\right)=cos(2x)$$

L'angolo di Derive

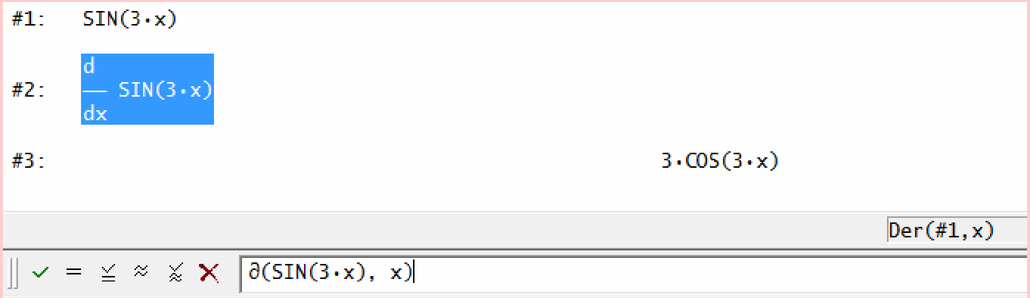
In Derive la derivazione ha un apposito comando e simbolo.

Possiamo scrivere la funzione da derivare, quindi cliccare sul simbolo ∂, si apre la finestra seguente



Cliccando su OK abbiamo solo l'immissione del comando, non il calcolo, che invece otteniamo cliccando su

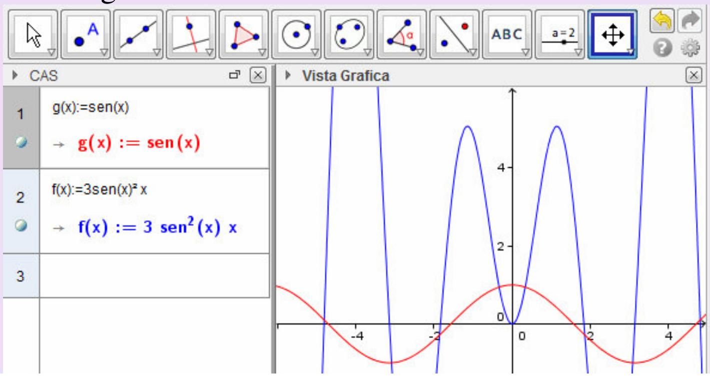
Semplifica.



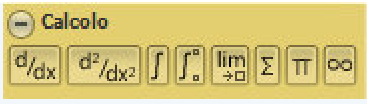
Vediamo anche la sintassi del comando, che può anche scriversi come **Dif(funzione,variabile)**.
Attività Con Derive verificare gli esercizi svolti

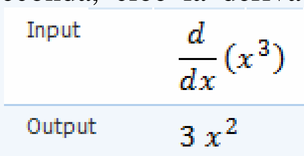
L'angolo di Geogebra

Anche Geogebra, nelle sue più recenti versioni, permette il calcolo delle derivate delle funzioni, mediante la modalità CAS. In questo caso Geogebra non solo calcola la derivata ma anche la rappresenta.



L'angolo di Microsoft Mathematics

I comandi per la derivata sono presenti nel menu **Calcolo**  , in particolare i primi due comandi. Il primo è la derivata prima, l'altro la derivata seconda, cioè la derivata della derivata.



Cliccando sui detti pulsanti si ottiene quanto di seguito visualizzato.

Operazioni aritmetiche elementari con le derivate

Il problema

Sappiamo derivare la funzione *sin*(x) e la funzione *ln*(x). Queste sole conoscenze ci permettono di calcolare la derivata delle funzioni *sin*(x) + *ln*(x), *sin*(x) – *ln*(x), *sin*(x) · *ln*(x), *sin*(x) / *ln*(x). Ma soprattutto, siamo sicuri che le dette funzioni sono sicuramente derivabili?

La prima idea che ci viene per risolvere il problema posto è che certamente tutte le funzioni che si ottengono mediante le quattro operazioni aritmetiche elementari sono derivabili e che le derivate si ottengono semplicemente derivando e poi applicando l'operazione. Cioè che sia per esempio D[*sin*(x) + *ln*(x)] = *cos*(x) + 1/x, D[$sin(x) - ln(x)$] = $cos(x) - 1/x$, D[$sin(x) \cdot ln(x)$] = $cos(x)/x$, D[$sin(x)/ln(x)$] = $cos(x)\cdot x$. Ovviamente se le regole dette valgono devono valere qualunque siano le funzioni, quindi controlliamo su esempi particolari dei quali sappiamo il risultato.

Esempio 21

- Abbiamo $5x = 2x + 3x$. È vero che D[$5x$] = D[$3x$] + D[$2x$]? Sì infatti abbiamo D[$5x$] = 5 e D[$3x$] + D[$2x$] = 3 + 2.
- Allo stesso modo si ha: D[$5x$] = D[$7x$] – D[$2x$], dato che D[$7x$] = 7 e D[$5x$] – D[$2x$] = 7 – 2.
- Abbiamo $x^2 = x \cdot x$. Ma stavolta non è vero che D[x^2] = D[x] · D[x], dato che D[x^2] = $2x$, mentre D[x] · D[x] = 1 · 1.
- Analogamente non vale la "pretesa" regola per il quoziente, dato che si ha $x = x^2/x$, Ma D[x] = 1 e D[x^2] / D[x] = $2x/x = 2$.

L'esempio precedente ci fa quindi immediatamente escludere la validità delle regole intuitive per il prodotto e per la divisione, mentre ci fa pensare che possa essere valido il seguente risultato.

Teorema 12

Se n funzioni $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, sono derivabili in un certo insieme X, e $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sono n numeri reali, allora anche la funzione **combinazione lineare**, $a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x) + \ldots + a_n \cdot f_n(x)$ è derivabile in X e la sua derivata è la combinazione lineare delle derivate, cioè $a_1{\cdot}f'_1(x) + a_2{\cdot}f'_2(x) + \ldots + a_n{\cdot}f'_n(x)$.

Dimostrazione

Per ipotesi esistono finiti i limiti di tutti i rapporti incrementali in un generico punto x_0 di , cioè

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_1(x_0+h)-f_1(x_0)}{h} = f_1'(x);\lim_{h\to 0}\frac{f_2(x_0+h)-f_2(x_0)}{h} = f_2'(x);\ldots;\lim_{h\to 0}\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h} = f_n'(x)$$

Del resto già sappiamo che D[$a\cdot f(x)$] = $a\cdot f'(x)$, quindi, dato che il denominatore è comune, immediatamente segue la tesi.

Esempio 22

- Abbiamo quindi effettivamente D[$sin(x) + ln(x)$] = $cos(x) + 1/x$, D[$sin(x) - ln(x)$] = $cos(x) - 1/x$.
- Abbiamo anche D[$7sin(x) + 5ln(x)$] = $7cos(x) + 5/x$, D[$sin(x)/5 - 4ln(x)$] = $cos(x)/5 - 4/x$.

Dobbiamo adesso cercare una regola per il calcolo della derivata di un prodotto.

Teorema 13

Se n funzioni $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, sono derivabili in un certo insieme X, allora anche la funzione **prodotto**: $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$ è derivabile in X e la sua derivata è la somma dei prodotti i cui fattori sono la derivata di ciascuna funzione per le rimanenti funzioni, cioè

$$f'_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) + f_1(x) \cdot f'_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) + \ldots + f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f'_n(x)$$

Dimostrazione

Dimostriamo il caso $n = 2$, lasciando per esercizio il caso generale. Per ipotesi si ha, per un generico punto di ascissa x_0 appartenente a X: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f_1(x_0+h)-f_1(x_0)}{h} = f_1'(x_0);\lim\limits_{h\to 0}\frac{f_2(x_0+h)-f_2(x_0)}{h} = f_2'(x_0)$. Noi dobbiamo invece calcolare $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f_1(x_0+h)\cdot f_2(x_0+h)-f_1(x_0)\cdot f_2(x_0)}{h}$ (*). Cerchiamo di sfruttare le ipotesi, e per far ciò, al numeratore aggiungiamo e togliamo il fattore $f_1(x_0+h)\cdot f_2(x_0)$ o, che è lo stesso, il fattore $f_2(x_0+h)\cdot f_1(x_0)$. Ciò serve a ottenere, dal limite (*) termini simili a quelli delle ipotesi. Infatti abbiamo:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_1(x_0+h)\cdot f_2(x_0+h)-f_1(x_0+h)\cdot f_2(x_0)+f_1(x_0+h)\cdot f_2(x_0)-f_1(x_0)\cdot f_2(x_0)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f_1(x_0+h)\cdot\left[f_2(x_0+h)-f_2(x_0)\right]+f_2(x_0)\cdot\left[f_1(x_0+h)-f_1(x_0)\right]}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0} f_1(x_0+h)\cdot\frac{f_2(x_0+h)-f_2(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0} f_2(x_0)\cdot\frac{f_1(x_0+h)-f_1(x_0)}{h}=$$
$$=f_1(x_0)\cdot f_2'(x_0)+f_2(x_0)\cdot f_1'(x_0)$$

Che è proprio la tesi.

Spesso il risultato del teorema precedente, per il caso di due fattori viene, erroneamente, trasposto nella formula: derivata della prima funzione per la *non derivata* della seconda e così via. Il termine *funzione non derivata* è privo di significato. Abbiamo le funzioni e, se sono derivabili, le loro derivate, ma non abbiamo le *non derivate*. In genere si cercano le proprietà che verifica un certo oggetto, matematico o no e non quelle che tale oggetto non verifica. Per esempio parliamo di esseri viventi e non di esseri non morenti.

Esempio 23

- Si ha: $D[sin(x) \cdot ln(x)] = D[sin(x)] \cdot ln(x) + sin(x) \cdot D[ln(x)] = cos(x) \cdot ln(x) + sin(x) \cdot 1/x$.
- Abbiamo anche $D(x^5) = D(x^2 \cdot x^3) = 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2 = 5x^4$.
- $D[x \cdot sin(x) \cdot e^x] = D[x] \cdot sin(x) \cdot e^x + x \cdot D[sin(x)] \cdot e^x + x \cdot sin(x) \cdot D[e^x] =$
  $= sin(x) \cdot e^x + x \cdot cos(x) \cdot e^x + x \cdot sin(x) \cdot e^x$.

Come applicazione immediata del Teorema precedente abbiamo la validità dei seguenti risultati.

Corollario 4

Ogni polinomio è derivabile in $\mathbb{R}$ e la sua derivata è un polinomio di grado a esso inferiore di una unità.

Dimostrazione immediata, tenendo anche conto del Corollario 1.

Esempio 24

Il polinomio di quinto grado: $2x^5 + x^4 - 3x^3 + x - 2$, è derivabile per ogni x, e la sua derivata è il polinomio di quarto grado $10x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 1$.

Corollario 5

Se la funzione $f(x)$ è derivabile in un certo insieme X, allora anche la funzione **potenza,** $[f(x)]^n$ è derivabile in X e la sua derivata è $n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$.

Dimostrazione

Nel caso in cui n è un numero naturale, basta tenere conto che, $[f(x)]^n = f(x) \cdot f(x) \cdot \ldots \cdot f(x)$, quindi applicando il Teorema 13, otterremo n addendi tutti uguali a $D[f(x)] \cdot f^{n-1}(x)$. Nel caso in cui n è un numero reale, invece, come già fatto in precedenza, non dimostriamo a tesi, ma ci limitiamo ad applicare il principio di generalizzazione.

Esempio 25

- Si ha: $D[sin^5(x)] = 5 \cdot D[sin(x)] \cdot sin^4(x) = 5 \cdot cos(x) \cdot sin^4(x)$.
- Per calcolare $D\left[\sqrt[3]{ln^4(x)}\right]$, scriviamo: $D\left[ln^{4/3}(x)\right]=\frac{4}{3}\cdot D\left[ln(x)\right]\cdot ln^{1/3}(x)=\frac{4}{3x}\cdot\sqrt[3]{ln(x)}$

Ci rimane solo da risolvere la questione del quoziente.

Teorema 14

Se la funzione $f(x)$ è derivabile in un certo insieme X, e si ha $f(x) \neq 0\ \forall\ x \in X$, allora anche la funzione **reci-**

proca, $1/f(x)$ è derivabile in X e la sua derivata è $-\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}$.

Dimostrazione

Per ipotesi si ha, per un generico punto di ascissa x_0 appartenente a X: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$. Noi dobbiamo invece calcolare $\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x_0+h)}-\frac{1}{f(x_0)}}{h}$. Effettuiamo il minimo comune denominatore: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{h\cdot f(x_0)\cdot f(x_0+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{h}\cdot\frac{1}{f(x_0)\cdot f(x_0+h)}$. In questo modo il primo fattore è l'opposto dell'ipotesi e quindi basta passare al limite per ottenere la tesi.

Esempio 26

Si ha: $D\left(\frac{1}{ln(x)}\right)=-\frac{D\left[ln(x)\right]}{\left[ln(x)\right]^2}=-\frac{1}{x\cdot ln^2(x)}$.

Come applicazione immediata del Teorema precedente abbiamo la validità del seguente risultato.

Corollario 6

Se le funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono derivabili in un certo insieme X, e si ha $f_2(x) \neq 0\ \forall\ x \in X$, allora anche la funzione **quoziente,** $f_1(x)/f_2(x)$ è derivabile in X e la sua derivata è $\frac{f_1'(x)\cdot f_2(x)-f_1(x)\cdot f_2'(x)}{\left[f_2(x)\right]^2}$.

Dimostrazione

Basta applicare i risultati dei teoremi 13 e 14, infatti possiamo scrivere $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=f_1(x)\cdot\frac{1}{f_2(x)}$. Quindi, per il teorema 13 si ha:

$$\begin{array}{l} D\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]=D\left[f_1(x)\cdot\frac{1}{f_2(x)}\right]=D\left[f_1(x)\right]\cdot\frac{1}{f_2(x)}+f_1(x)\cdot D\left[\frac{1}{f_2(x)}\right]= \\ =\frac{f_1'(x)}{f_2(x)}+f_1(x)\cdot\frac{-f_2'(x)}{\left[f_2(x)\right]^2}=\frac{f_1'(x)\cdot f_2(x)-f_1(x)\cdot f_2'(x)}{\left[f_2(x)\right]^2} \end{array}.$$

Esempio 27

Si ha:

$$\begin{array}{l} D\left[tan(x)\right]=D\left[\frac{sin(x)}{cos(x)}\right]=\frac{D\left[sin(x)\right]\cdot cos(x)-sin(x)\cdot D\left[cos(x)\right]}{\left[cos(x)\right]^2}= \\ =\frac{cos(x)\cdot cos(x)-sin(x)\cdot(-sin(x))}{cos^2(x)}=\frac{cos^2(x)+sin^2(x)}{cos^2(x)} \end{array}$$

. Il risultato possiamo scriverlo nei tre modi equivalenti seguenti:

$$\frac{cos^2(x)+sin^2(x)}{cos^2(x)}=\prec\begin{array}{l} \frac{1}{cos^2(x)}=sec^2(x) \\ \frac{cos^2(x)}{cos^2(x)}+\frac{sin^2(x)}{cos^2(x)}=1+tan^2(x) \end{array}$$

Prima di chiudere il paragrafo accenniamo al fatto, citato nelle notizie storiche che la derivata viene inventata da Newton per risolvere problemi fisici. In effetti la derivata della funzione spazio rispetto al tempo altri non è che la cosiddetta *velocità istantanea*. Analogamente possiamo dire che l'accelerazione istantanea è la derivata prima della velocità.

Esempio 28

Consideriamo la legge di un moto uniformemente accelerato $s(t) = 2t^2 - 3t + 1$, se volessimo determinare il valore della velocità nell'istante $t = 1$, basta calcolare $v(t) = s'(t) = 4t - 3$ e poi calcolarne il valore per $t = 1$, quindi $v(1) = 4 - 3 = 1$. Mentre l'accelerazione in questo caso è ovviamente costante ed è $a(t) = v'(t) = 4$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare la derivata della funzione $\left(\sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x^7}\right) \cdot \left(4x^6 + 2\,ln(x)\right)$. Applichiamo la regola del prodotto, scrivendo prima in modo diverso l'espressione: $\left(x^{5/3} - 2x^{-7}\right) \cdot \left(4x^6 + 2ln(x)\right)$. Quindi:

$$D = \left(\frac{5}{3}x^{5/3-1} - 2\cdot(-7)x^{-8}\right) \cdot \left(4x^6 + 2ln(x)\right) + \left(x^{5/3} - 2x^{-7}\right) \cdot \left(4 \cdot 6x^5 + \frac{2}{x}\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{3}x^{2/3} + 14x^{-8}\right) \cdot \left(4x^6 + 2ln(x)\right) + \left(x^{5/3} - 2x^{-7}\right) \cdot \left(24x^5 + \frac{2}{x}\right) =$$

$$= \frac{20}{3}x^{20/3} + \frac{10}{3}x^{2/3} \cdot ln(x) + 56x^{-2} + 28x^{-8} \cdot ln(x) + 24x^{20/3} + 2x^{2/3} - 48x^{-2} - 4x^{-8} =$$

$$= \frac{92}{3}x^{20/3} + \frac{10}{3}x^{2/3} \cdot ln(x) + 8x^{-2} + 28x^{-8} \cdot ln(x) + 2x^{2/3} - 4x^{-8} =$$

$$= \frac{92}{3}\sqrt[3]{x^{20}} + \frac{10}{3}\sqrt[3]{x^2} \cdot ln(x) + \frac{8}{x^2} + \frac{28}{x^8} \cdot ln(x) + 2\sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^8}$$

Determinare la derivata delle seguenti funzioni

Livello 1

1. $e^x \cdot (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)$ $[x^4 \cdot e^x]$ $\qquad e^x \cdot (sin(x) - cos(x))$ $[2\, sin(x) \cdot e^x]$
2. $2x \cdot sin(x) - x^2 \cdot cos(x) + 2cos(x)$ $[x^2 \cdot sin(x)]$ $\qquad sin(x) - x \cdot cos(x)$ $[x \cdot sin(x)]$
3. $x^3 \cdot [3ln(x) - 1]$ $[9x^2 \cdot ln(x)]$ $\qquad x^2/4 \cdot [2ln(x) - 1]$ $[x \cdot ln(x)]$
4. $x \cdot ln^3(x) - 3\,x \cdot ln^2(x) + 6x \cdot ln(x) - 6x$ $[ln^3(x)]$ $\qquad x - sin(x) \cdot cos(x)$ $[2 \cdot sin^2(x)]$
5. $sin(x) \cdot (2x^5 - x^3 + 2x^2 - 1)$ $[cos(x) \cdot (2x^5 - x^3 + 2x^2 - 1) + sin(x) \cdot (10x^5 - 3x^2 + 4x)]$
6. $cos(x) \cdot (2x^3 - x^4 + x^2 - 3x)$ $[cos(x) \cdot (6x^2 - 4x^3 + 2x - 3) - sin(x) \cdot (2x^3 - x^4 + x^2 - 3x)]$
7. $7x^3 \cdot [cos(x) - 2ln(x)]$ $[21x^2 \cdot [cos(x) - 2ln(x)] + 7x^3 \cdot [- sin(x) - 2/x]]$
8. $-2x^6 \cdot [4sin(x) + 6ln(x)]$ $[-12x^5 \cdot [4sin(x) + 6ln(x)] - 2x^6 \cdot [4cos(x) + 6/x)]]$
9. $x^3/9 \cdot [3ln(x) - 1]$ $[x^2 \cdot ln(x)]$ $\qquad (2 - x^2) \cdot cos(x) + 2x \cdot sin(x)$ $[x^2 \cdot sin(x)]$
10. $3 \cdot (x^2 - 2) \cdot cos(x) + (x^3 - 6x) \cdot sin(x)$ $[x^3 \cdot cos(x)]$ $\qquad 5e^x \cdot \left(\frac{1}{x^{23}} + 3 \cdot \sqrt{x^7}\right)$ $\left[e^x \cdot \left(15 \cdot \sqrt{x^7} + \frac{5}{x^{23}} + \frac{105}{2}\sqrt{x^5} - \frac{115}{x^{24}}\right)\right]$
11. $2cos(x) \cdot \left(\frac{12}{x^4} - 5 \cdot \sqrt[4]{3x}\right)$ $\left[cos(x) \cdot \left(\frac{96}{x^5} - \frac{15}{2 \cdot \sqrt[4]{27x^3}}\right) + sin(x) \cdot \left(10 \cdot \sqrt[4]{3x} - \frac{24}{x^4}\right)\right]$

12. $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot[-cos(x)+2ln(x)]$ $\left[\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^4}}\cdot[cos(x)-2ln(x)+6]+\frac{sin(x)}{\sqrt[3]{x}}\right]$

13. $\left(3x+\sqrt[5]{x^3}\right)\cdot[sin(x)+ln(x)]$ $\left[\left(3x+\sqrt[5]{x^3}\right)\cdot cos(x)+\sqrt[3]{x^2}+3+\left(\frac{5}{3}\cdot\sqrt[3]{x^2}+3\right)(\sin(x)+ln(x))\right]$

14. $(x+1)\cdot[ln(x)+x^2]$ $[ln(x)+3x^2+2x+1+1/x]$ $(x^2-2x+1)\cdot(x^3-x^2+x-1)$ $[5x^4-12x^3+12x^2-8x+3]$

15. $\left(x^3+x-1\right)\cdot\left[ln(x)+\frac{1}{x^2}\right]$ $\left[ln(x)\cdot\left(3x^2+1\right)+x^2+2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right]$ $(e^x+1)\cdot(e^x-4)$ $[2\cdot e^{2x}-3\cdot e^x]$

Livello 2

16. $x\cdot sin(x)\cdot e^x$ $[e^x\cdot(x\cdot sin(x)+x\cdot cos(x)+sin(x))]$ $x^2\cdot ln(x)\cdot e^x$ $[x\cdot e^x\cdot[(x+2)\cdot ln(x)+1]$

17. $x^2\cdot cos(x)\cdot ln(x)$ $[x\cdot[2cos(x)\cdot ln(x)-x\cdot sin(x)\cdot ln(x)+cos(x)]]$ $(e^x+1)^4$ $[4\cdot e^{4x}+12\cdot e^{3x}+12\cdot e^{2x}+4\cdot e^x]$

18. $2\cdot\sqrt[3]{x}\cdot cos(x)\cdot e^x$ $\left[2\cdot e^x\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\left[\frac{cos(x)}{3x}+cos(x)-sin(x)\right]\right]$ $(e^x+1)\cdot(e^x-2)\cdot e^x$ $[3\cdot e^{3x}-2\cdot e^{2x}-2\cdot e^x]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare la derivata della funzione $cos^3(x)$. Basta considerare il risultato del corollario 5, ottenendo: $D[cos^3(x)]=3\cdot cos^2(x)\cdot D[cos(x)]=-3cos^2(x)\cdot sin(x)$.

Calcolare le derivate delle seguenti potenze

Livello 1

19. $sin^5(x)$ $[5sin^4(x)cos(x)]$ $cos^7(x)$ $[-7sin(x)cos^6(x)]$ $ln^6(x)$ $[6ln^5(x)/x]$ e^{4x} $[4e^{4x}]$

20. $\sqrt{cos(x)}$ $\left[\frac{-sin(x)}{2\cdot\sqrt{cos(x)}}\right]$ $ln^{\pi}(x)$ $[\pi ln^{\pi-1}(x)/x]$ $\sqrt{4x+1}$ $\left[\frac{2}{\sqrt{4x+1}}\right]$ $\sqrt{9x+1}$ $\left[\frac{9}{2\cdot\sqrt{9x+1}}\right]$

21. $\sqrt[3]{x^2+x-1}$ $\left[\frac{2x+1}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^2+x-1\right)^2}}\right]$ $\sqrt[5]{cos^4(x)}$ $\left[-\frac{4\cdot sin(x)}{5\cdot\sqrt[5]{cos(x)}}\right]$ $\sqrt[8]{sec^3(x)}$ $\left[\frac{3\cdot sin(x)}{8\cdot\sqrt[8]{cos^{11}(x)}}\right]$

22. $\sqrt[3]{(sin(x)+2)^4}$ $\left[\frac{4\cdot\sqrt[3]{sin(x)+2}}{3}\cdot cos(x)\right]$ $\sqrt[4]{\left[e^x+ln(x)\right]^3}$ $\left[\frac{3\cdot\left(x\cdot e^x+1\right)}{4\cdot\sqrt[4]{e^x+ln(x)}}\right]$

Livello 2

23. $[x\cdot sin(x)]^8$ $[8x^7\cdot sin^7(x)\cdot[x\cdot cos(x)+sin(x)]]$ $\left[\sqrt{x}\cdot ln(x)\right]^{12}$ $[6x^5\cdot ln^{11}(x)\cdot(ln(x)+2)]$

24. $\left[\sqrt{x}\cdot\cos(x)\right]^5$ $\left[\frac{5}{2}\cdot\sqrt{x^3}\cdot cos^4(x)\cdot[cos(x)-2x\cdot sin(x)]\right]$ $[x^{14}\cdot ln(x)]^6$ $[6x^{83}\cdot ln^5(x)\cdot[14ln(x)+1]]$

25. $[sin(x)\cdot cos(x)]^5$ $[5sin^4(x)\cdot cos^4(x)\cdot cos(2x)]$ $[x^7\cdot cos(x)]^9$ $[9x^{62}\cdot cos^8(x)\cdot[7cos(x)-x\cdot sin(x)]]$

26. $\left(\sqrt[3]{x^4}\cdot e^x\right)^7$ $\left[\frac{7}{3}\cdot\sqrt[3]{x^{25}}\cdot e^{7x}(3\cdot x+4)\right]$ $[sin(x)\cdot e^x]^{13}$ $[13sin^{12}(x)\cdot e^{13x}\cdot[sin(x)+cos(x)]]$

27. $[cos(x)\cdot e^x]^{14}\cdot[ln(x)\cdot e^x]^4$ $\left[2\cdot e^{18x}\cdot ln^3(x)\cdot cos^{13}(x)\cdot[9\cdot ln(x)\cdot cos(x)-7\cdot sin(x)\cdot ln(x)+2\cdot cos(x)/x]\right]$

28. $-\frac{cos(x)}{3}\cdot\left[sin^2(x)+2\right]$ $[sin^3(x)]$ $e^{4x}/17\cdot[4sin(x)-cos(x)]$ $[e^{4x}\cdot sin(x)]$

29. $x\cdot ln^3(x)-3x\cdot ln^2(x)+6x\cdot ln(x)-6x$ $[-3\cdot ln^2(x)+3\cdot ln(x)+3]$ $-1/3cos(x)\cdot[sin^2(x)+2]$ $[sin^3(x)]$

30. $x\cdot ln^2(x)-2x\cdot ln(x)+2x$ $[ln^2(x)]$ $x\cdot ln^3(x)-3x\cdot ln^2(x)+6x\cdot ln(x)-6x$ $[ln^3(x)]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare la derivata della funzione $\frac{x+e^{3x}}{x-ln(x)}$. Basta applicare la regola per la derivata del quoziente, ottenendo:

$$\frac{D\left(x+e^{3x}\right)\cdot[x-ln(x)]-\left(x+e^{3x}\right)\cdot D[x-ln(x)]}{[x-ln(x)]^2}=\frac{\left(1+3\cdot e^{3x}\right)\cdot[x-ln(x)]-\left(x+e^{3x}\right)\cdot(1-1/x)}{[x-ln(x)]^2}=$$

$$=\frac{\cancel{x}-ln(x)+3\cdot x\cdot e^{3x}-3\cdot e^{3x}\cdot\ln(x)-\cancel{x}+1-e^{3x}\cdot(1-1/x)}{[x-ln(x)]^2}=$$

$$=\frac{e^{3x}\cdot\left(3\cdot x^2-3\cdot x\cdot\ln(x)-x+1\right)+x-x\cdot ln(x)}{x\cdot[x-ln(x)]^2}$$

Determinare la derivata delle seguenti funzioni

Livello 1

31. $cot(x)$ $\quad[-csc^2(x)]$ $\quad sec(x)$ $\quad[tan(x)\cdot sec(x)]$ $\quad csc(x)$ $\quad[-cot(x)\cdot csc(x)]$

32. $\frac{x+1}{x^2+1}$ $\left[\frac{-x^2-2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}\right]$ $\quad\frac{x^2-1}{x^2}$ $\left[\frac{2}{x^3}\right]$ $\quad\frac{11x+3}{4x^2-1}$ $\left[\frac{-44x^2-24x+11}{\left(4x^2-1\right)^2}\right]$ $\quad\frac{x^3}{1+x^2}$ $\left[\frac{x^2\cdot\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}\right]$

33. $\frac{x+sin(x)}{x-sin(x)}$ $\left[\frac{2x\cdot cos(x)-sin(x)}{[x-sin(x)]^2}\right]$ $\quad\frac{x+e^x}{x-e^x}$ $\left[\frac{2\cdot e^x\cdot(x-1)}{\left(x-e^x\right)^2}\right]$ $\quad\frac{x+ln(x)}{x-ln(x)}$ $\left[\frac{2\cdot[1+ln(x)]}{[x-ln(x)]^2}\right]$

34. $\frac{2x-1}{4x^2-91}$ $\left[\frac{2\cdot\left(-4x^2+4x-91\right)}{\left(4x^2-91\right)^2}\right]$ $\quad\frac{x-cos(x)}{x+sin(x)}$ $\left[\frac{(1-x)\cdot cos(x)+(1+x)\cdot sin(x)-1}{[x+sin(x)]^2}\right]$

35. $\frac{x^2+x-2}{x^2-x+2}$ $\left[\frac{2x\cdot(4-x)}{\left(x^2-x+2\right)^2}\right]$ $\quad\frac{e^x+x}{1+x^2}$ $\left[\frac{(x-1)\cdot\left[e^x\cdot(x-1)-x-1\right]}{\left(x^2+1\right)^2}\right]$ $\quad\frac{sin(x)+1}{sin(x)-1}$ $\left[-\frac{2\cdot cos(x)}{[sin(x)-1]^2}\right]$

36. $\frac{x^3+1}{x^2-2}$ $\left[\frac{x\cdot\left(x^3-6x-2\right)}{\left(x^2-2\right)^2}\right]$ $\quad\frac{x^4-x^2}{2x^2-3}$ $\left[\frac{2x\cdot\left(2x^4-6x^2+3\right)}{\left(2x^2-3\right)^2}\right]$ $\quad\frac{sin(x)+cos(x)}{sin(x)-cos(x)}$ $\left[-\frac{2}{[sin(x)-cos(x)]^2}\right]$

37. $\frac{e^x}{e^x-2}$ $\left[\frac{-2\cdot e^x}{\left(e^x-2\right)^2}\right]$ $\quad\frac{1+ln(x)}{1-log_2(x)}$ $\left[\frac{ln(2)\cdot[1+ln(2)]}{x\cdot ln^2(x/2)}\right]$ $\quad\frac{e^x+ln(x)}{e^x-log_3(x)}$ $\left[\frac{e^x\cdot ln(3)\cdot[1+ln(3)]\cdot[1-x\cdot ln(x)]}{x\cdot\left[e^x\cdot ln(3)-ln(x)\right]^2}\right]$

Livello 2

38. $\frac{x^2\cdot ln(x)}{ln(x)-1}$ $\left[\frac{x\cdot\left[2\cdot ln^2(x)-2\cdot ln(x)-1\right]}{[ln(x)-1]^2}\right]$ $\quad\frac{x\cdot ln(x)-2}{x}$ $\left[\frac{x+2}{x^2}\right]$ $\quad\frac{sin(x)\cdot cos(x)}{sin^2(x)+1}$ $\left[\frac{1-3\cdot sin^2(x)}{\left[sin^2(x)+1\right]^2}\right]$

39. $\frac{x\cdot e^x}{x\cdot e^x-1}$ $\left[-\frac{e^x\cdot(x+1)}{\left(x\cdot e^x-1\right)^2}\right]$ $\quad\frac{x^2\cdot e^x-1}{x\cdot e^x+1}$ $\left[\frac{e^x\cdot\left(x^2\cdot e^x+x^2+3x+1\right)}{\left(x\cdot e^x+1\right)^2}\right]$ $\quad\frac{sin^2(x)}{cos^3(x)}$ $\left[\frac{sin(x)\cdot\left[1+sin^2(x)\right]}{cos^4(x)}\right]$

40. $\frac{ax+b}{ax-b}$ $\left[\frac{-2ab}{(ax-b)^2}\right]$ $\quad\frac{ax^2+bx+c}{ax^2-bx+c}$ $\left[\frac{2b\cdot\left(c-ax^2\right)}{\left(ax^2-bx+c\right)^2}\right]$

41. $\frac{a+sin(x)}{b-cos(x)}$ $\left[\frac{b\cdot cos(x)-a\cdot sin(x)-1}{[b-cos(x)]^2}\right]$ $\quad\frac{a\cdot sin(x)+b\cdot cos(x)}{a\cdot cos(x)-b\cdot sin(x)}$ $\left[\frac{a^2+b^2}{[a\cdot cos(x)-b\cdot sin(x)]^2}\right]$

42. $\frac{a+e^x}{b-e^x}$ $\left[\frac{e^x\cdot(a+b)}{(b-e^x)^2}\right]$ $\frac{a+e^{ax}}{b+e^{bx}}$ $\left[\frac{e^{ax}\cdot\left[e^{bx}\cdot(a-b)+ab-ab\cdot e^{(b-a)\cdot x}\right]}{(b+e^{bx})^2}\right]$

43. $\frac{a+b\cdot ln(x)}{b-a\cdot ln(x)}$ $\left[\frac{a^2+b^2}{x\cdot[b-a\cdot ln(x)]^2}\right]$ $\frac{x\cdot ln(x)}{x+a\cdot ln(x)}$ $\left[\frac{a\cdot ln^2(x)+x}{[x+a\cdot ln(x)]^2}\right]$

Utilizzando le regole sulla derivazione del prodotto o del quoziente e opportune identità, calcolare le derivate delle seguenti funzioni

Livello 2

44. $sin(2x)$ $[2cos(2x)]$ $sin(3x)$ $[3cos(3x)]$ $sin(4x)$ $[4cos(4x)]$ $cos(2x)$ $[-2sin(2x)]$

45. $cos(3x)$ $[-3sin(3x)]$ $cos(4x)$ $[-4sin(4x)]$ $tan(2x)$ $\left[\frac{2}{cos^2(2x)}\right]$ $tan(3x)$ $\left[\frac{3}{cos^2(3x)}\right]$

46. $tan(4x)$ $\left[\frac{4}{cos^2(4x)}\right]$ $ln(2x)$ $[1/x]$ $ln(3x)$ $[1/x]$ $ln(4x)$ $[1/x]$

47. Tenuto conto degli esercizi precedenti, congetturare il valore delle seguenti derivate

D$[sin(nx)]$ $[n\cdot cos(nx)]$ D$[cos(nx)]$ $[-n\cdot sin(nx)]$ D$[tan(nx)]$ $\left[\frac{n}{cos^2(nx)}\right]$ D$[ln(nx)]$ $[1/x]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare l'equazione della tangente alla curva di equazione $f(x) = x^3 - 5x^2 + 1$, nel suo punto di ascissa 3. Già sappiamo che l'equazione richiesta è $y-f(3)=f'(3)\cdot(x-3)$. Dato che $f'(x) = 3x^2 - 10x$ e $f'(3) = 27 - 30 = -3$, la retta richiesta è $y - (27 - 45 + 1) = -3\cdot(x - 3)$, cioè $y = -3x - 9$.

Determinare l'equazione della tangente alla seguenti curve di cui è fornita l'equazione, nel punto di ascissa indicata

Livello 1

48. $y = x^2 + 4x + 1$, $x_A = -2$ $[y = -3]$ $y = 6x^3 + 4x + x$, $x_B = -2$ $[y = 77x + 96]$
49. $y = 3x^4 - x + 1$, $x_C = -1$ $[y = -13x - 8]$ $y = sin(x)$, $x_D = 0$ $[y = x]$
50. $y = sin(x) + cos(x)$, $x_E = \pi$ $[y = -x + \pi - 1]$ $y = sin(x)\cdot cos(x) - 3$, $x_F = \pi/2$ $[y = \pi/2 - x]$
51. $y = x\cdot e^x$, $x_G = 0$ $[y = x]$ $y = x\cdot ln(x)$, $x_H = 1$ $[y = x - 1]$
52. $y = x\cdot sin(x)$, $x_I = \pi$ $[y = -\pi x + \pi^2]$ $y = x^2\cdot sin(x)$, $x_J = \pi/2$ $[y = \pi x - \pi^2/4]$

Nelle seguenti famiglie di curve, determinare gli eventuali valori del parametro *m*, per cui la tangente nel punto di ascissa x_0, risulti parallela alla retta *r* indicata.

Livello 2

53. $y = m\cdot x^3 - 5x^2 + 13$, $x_0 = 3$, $r: x - 5y + 2 = 0$ [151/135]
54. $y = 3x^3 + m\cdot x^2 - 3$, $x_0 = 2$, $r: 7x - 2y + 1 = 0$ [– 65/8]
55. $y = m + x^3\cdot sin(x)$, $x_0 = -1$, $r: 8x + 3y - 1 = 0$ [$\emptyset$]
56. $y = x^3 - m\cdot x\cdot e^x$, $x_0 = 4$, $r: 7x - 5y + 2 = 0$ $[233/(25e^4)]$
57. $y = x + m\cdot x\cdot ln(x)$, $x_0 = -1$, $r: 8x + y + 2 = 0$ [Il problema non ha senso, perché?]
58. $y=\frac{mx+1}{mx-1}$, $x_0 = 2$, $r: 4x - y + 1 = 0$ [$\emptyset$] $y=\frac{x+m}{x-m}$, $x_0 = 3$, $r: 3x + 5y + 2 = 0$ $\left[\frac{14\pm\sqrt{115}}{3}\right]$
59. $y=\frac{x+sin(x)}{mx}$, $x_0 = 0$, $r: 2x - 3y + 2 = 0$ $[cos(3)/2 - sin(3)/6]$
60. $y=\frac{e^x+m}{e^x-m}$, $x_0 = -2$, $r: 7x + y + 2 = 0$ $\left[\frac{8\pm\sqrt{15}}{7e^2}\right]$

Livello 3

Studiare al variare del parametro reale *k*, quante tangenti orizzontali hanno le seguenti curve

61. $y = x^3 + kx^2 + x - 1$ [0 per $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$, 1 per $k = \pm\sqrt{3}$, 2 per $k < -\sqrt{3} \vee k > \sqrt{3}$]
62. $y = x^4 + kx^2 - 1$ [1 per ogni k]
63. $y = x^4 - (k + 1) \cdot x^3 + 1$ [1 per ogni k, 2 per $k = -1$]
64. $y = \dfrac{x^2 + k}{x - k}$ [0 per $-1 < k < 0$, 1 per $k = -1 \vee k = 0$, 2 per $k < -1 \vee k > 0$]

Livello 3

22. Data la legge del moto uniformemente accelerato: $s(t) = s_0 + v_0\,t + ½\,at^2$, determinare il valore della velocità. [$s'(t) = v_0 + at$]
23. L'equazione oraria di un punto materiale è $s(t) = 4t^2 - 3t + 5$, determinare la velocità del punto dopo $4s$. [$29m/s$]
24. Con riferimento al problema precedente, dopo quanti secondi quando la velocità si annulla? [0,375]
25. L'equazione oraria della velocità di un punto materiale è $v(t) = t^3/3 - 3t^2 + 8t - 1$, determinare l'accelerazione del punto dopo $3s$. [$-1m/s^2$]
26. Con riferimento al problema precedente, quando l'accelerazione è negativa? [Fra 2 e 4 secondi]
27. Una particella si muove nel piano seguendo le leggi orarie $\begin{cases} x(t) = 2t^3 - 3t \\ y(t) = 4 - 3t^2 \end{cases}$, determinare il modulo della sua velocità dopo 3 s. (Si ricorda che il modulo del vettore $(a; b)$ è $\sqrt{a^2 + b^2}$) $\left[3 \cdot \sqrt{65} m/s\right]$
28. Con riferimento al precedente quesito determinare il modulo dell'accelerazione dopo $2s$. Ci sono istanti in cui l'accelerazione è nulla? Giustificare la risposta. $\left[6 \cdot \sqrt{17} m/s^2; no\right]$

L'angolo di Derive

Derive applica le regole sulle derivate delle funzioni, anzi mostra tali regola se si opera con funzioni generiche, come mostriamo in figura.

#1: $f(x) :=$

#2: $g(x) :=$

#3: $\left[\dfrac{d}{dx}(f(x) + g(x)),\ \dfrac{d}{dx}(f(x) - g(x)),\ \dfrac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)),\ \dfrac{d}{dx}\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$

#4: $\left[f'(x) + g'(x),\ f'(x) - g'(x),\ g(x)\cdot f'(x) + f(x)\cdot g'(x),\ \dfrac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}\right]$

Come si vede però dobbiamo prima definire che f e g indicano funzioni, diversamente avremo risultati errati.

#1: $\left[\dfrac{d}{dx}(f\cdot x + g\cdot x),\ \dfrac{d}{dx}(f\cdot x - g\cdot x),\ \dfrac{d}{dx}(f\cdot x\cdot g\cdot x),\ \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f\cdot x}{g}\cdot x\right)\right]$

#2: $\left[f + g,\ f - g,\ 2\cdot f\cdot g\cdot x,\ \dfrac{2\cdot f\cdot x}{g}\right]$

Attività

Con Derive verificare gli esercizi svolti

L'angolo di Microsoft Mathematics

In questo software non è possibile operare con funzioni generiche. In figura è mostrato che la derivata è considerata come quella della funzione fgx^2, con f e g generici numeri reali.

Input	$\dfrac{d}{dx}(f(x)\,g(x))$
Output	$2\,f\,g\,x$

Derivate delle funzioni composte e delle funzioni inverse

Il problema

Abbiamo calcolato, usando opportune identità ed artifici le derivate di alcune funzioni composte, come per esempio $sin(2x)$ o $\sqrt{e^x+1}$. Vogliamo adesso risolvere il problema per la generica funzione composta.

Cominciamo a cercare di risolvere il problema in modo intuitivo, riprendendo quelle derivate che abbiamo calcolato.

Esempio 29

Nel Corollario 5 abbiamo visto che $D[f(x)]^n = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$; negli esercizi che $D[sin(nx)] = n \cdot cos(nx)$. Questi esempi ci fanno pensare che per derivare una funzione composta utilizziamo una regola di derivazione del "tipo" di funzione, cioè la derivata di un seno è un coseno, per esempio, e poi andiamo a moltiplicare per la derivata della stessa funzione.

In vista delle osservazioni precedenti enunciamo il seguente risultato.

Teorema 15

Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni derivabili in X ed esista la funzione composta $f[g(x)]$ in X, allora possiamo dire che $f[g(x)]$ è derivabile in X e che $D[f[g(x)]] = f'[g(x)] \cdot g'(x)$.

Dimostrazione omessa

Esempio 30

Tenuto conto del precedente risultato abbiamo per esempio che

$$D\left[sin\left[\ln(x)\right]\right] = cos\left[\ln(x)\right] \cdot D\left[\ln(x)\right] = \frac{cos\left[\ln(x)\right]}{x}$$

Ovviamente la regola precedente può applicarsi anche alla composizione di più di due funzioni.

Esempio 31

Vogliamo derivare la funzione $\sqrt{ln\left[cos\left(3x^2+1\right)\right]}$, prima di potere applicare la generalizzazione della regola determiniamo quante sono le funzioni componenti. Possiamo scrivere: $f\left\{g\left[h\left(m(x)\right)\right]\right\}$, in cui le funzioni componenti sono: $m(x) = 3x^2+1; h(x) = cos(x), g(x) = \ln(x), f(x) = \sqrt{x}$, quindi dobbiamo avere: $D\left[f\left\{g\left[h\left(m(x)\right)\right]\right\}\right] = f'\left\{g\left[h\left(m(x)\right)\right]\right\} \cdot g'\left[h\left(m(x)\right)\right] \cdot h'\left(m(x)\right) \cdot m'(x)$, per cui:

$$D\left[\sqrt{ln\left[cos\left(3x^2+1\right)\right]}\right] = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{ln\left[cos\left(3x^2+1\right)\right]}} \cdot \frac{1}{cos\left(3x^2+1\right)} \cdot \left[-sin\left(3x^2+1\right)\right] \cdot 6x = \frac{-3x \cdot tan\left(3x^2+1\right)}{\sqrt{ln\left[cos\left(3x^2+1\right)\right]}}$$

La regola si applica anche a particolari funzioni.

Esempio 32

Vogliamo derivare la funzione $x^{sin(x)}$, non possiamo applicare la derivata delle potenze, perché l'esponente non è costante, né la regola dell'esponenziale perché la base non è costante. Quindi dobbiamo operare una trasformazione. Possiamo scrivere $a^b = e^{b \cdot ln(a)}$, quindi $x^{sin(x)} = e^{sin(x) \cdot ln(x)}$, quindi $D[x^{sin(x)}] = D[e^{sin(x) \cdot ln(x)}] =$ $= x^{sin(x)} = e^{sin(x) \cdot ln(x)} \cdot D[sin(x) \cdot ln(x)] = e^{sin(x) \cdot ln(x)} \cdot [cos(x) \cdot ln(x) + sin(x)/x] = x^{sin(x)} \cdot [cos(x) \cdot ln(x) + sin(x)/x]$

Vale quindi il seguente risultato.

Corollario 7

Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni derivabili in X e sia $f(x) > 0$ in X, allora $f(x)^{g(x)}$ è derivabile in X e si ha:

$$D[f(x)^{g(x)}] = f(x)^{g(x)} \cdot [g'(x) \cdot ln[f(x)] + g(x) \cdot f'(x)/f(x)]$$

Dimostrazione per esercizio

Adesso vogliamo risolvere il problema della derivazione delle funzioni inverse.

Esempio 33

La funzione $f(x) = x^3$ è sicuramente invertibile perché è non decrescente, dato che si ha $f'(x) = 3x^2$, che è sempre non negativa. La sua funzione inversa è $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Mettiamo a raffronto le due derivate:

$$D\left(x^3\right) = 3x^2; D\left(\sqrt[3]{x}\right) = D\left(x^{1/3}\right) = \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}.$$

Tenuto conto dell'esempio precedente, apparentemente non si vede una regola, però se scriviamo nel seguente modo: $\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3 \cdot \left[f^{-1}{}'(x)\right]^2}$, la regola risulta essere quella di seguito enunciata.

Teorema 16

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in X ed invertibile in $Y \subseteq X$, e sia $f'(x) \neq 0\ \forall\ x \in X$, allora anche la funzione inversa $f^{-1}(y)$ è derivabile in Y, e $\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Dimostrazione Omessa

Facciamo molta attenzione ad applicare il precedente teorema.

Esempio 34

La funzione $f(x) = sin(x)$ è invertibile nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ e la sua funzione inversa si indica con $f(x) = sin^{-1}(x)$. Possiamo allora dire che: $D\left[sin^{-1}(x)\right] = \frac{1}{D\left[sin(x)\right]} = \frac{1}{cos(x)}$? No, perché quando passiamo da una funzione alla propria inversa scambiamo anche le variabili, quindi in effetti dovremmo scrivere: $D\left[sin^{-1}(x)\right] = \frac{1}{D\left[sin(y)\right]} = \frac{1}{cos(y)}$. Ma non ha senso che la derivata di una funzione contenga una variabile diversa. Quindi dobbiamo stabilire la relazione che c'è fra x e y. Si ha: $y = sin^{-1}(x) \Rightarrow x = sin(y)$. Del resto sappiamo che si ha: $sin^2(y) + cos^2(y) = 1 \Rightarrow cos(y) = \sqrt{1 - sin^2(y)} = \sqrt{1 - x^2}$. Quindi possiamo dire che si ha: $D\left[sin^{-1}(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Poiché le funzioni goniometriche inverse sono particolarmente importanti, enunciamo il seguente risultato.

Corollario 8

Le funzioni goniometriche inverse sono derivabili nel loro dominio e si ha:

$$D\left[sin^{-1}(x)\right]=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};D\left[cos^{-1}(x)\right]=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};D\left[tan^{-1}(x)\right]=\frac{1}{1+x^2};$$
$$D\left[cot^{-1}(x)\right]=-\frac{1}{1+x^2};D\left[sec^{-1}(x)\right]=\frac{1}{|x|\cdot\sqrt{x^2-1}};D\left[csc^{-1}(x)\right]=\frac{-1}{|x|\cdot\sqrt{x^2-1}};$$

Dimostrazione per esercizio

Concludiamo con un esempio.

Esempio 35

Vogliamo derivare la funzione $sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$. Prima dobbiamo stabilire il dominio della funzione. Dato che si ha $-1\le\sqrt{1-x^2}\le 1$, il dominio è pari a quello del radicando, cioè [–1; 1]. Possiamo quindi derivare, tenendo conto che abbiamo a che fare con una funzione composta. Abbiamo:

$$D\left[sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-1+x^2}}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{|x|}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-segno(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Dove la funzione $segno(x)=\begin{cases}1 & se\, x>0\\ 0 & se\, x=0\\ -1 & se\, x<0\end{cases}$. Il risultato ottenuto ci permette anche di dire che $sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ non è derivabile per $x = 0, \pm 1$.

Può essere utile, talvolta, effettuare derivate successive, per esempio in fisica sappiamo che la derivata della funzione spazio rispetto al tempo rappresenta la velocità istantanea. E poiché la derivata della velocità rispetto al tempo rappresenta l'accelerazione istantanea, ciò significa che l'accelerazione istantanea può interpretarsi come la derivata seconda della funzione spazio rispetto al tempo.

Definizione 7

Data una funzione $y = f(x)$, derivabile in un insieme X, se anche la sua funzione derivata prima è derivabile diciamo che $f(x)$ è dotata di **derivata seconda**. In generale se una funzione è derivabile e le sue derivate sono a loro volta funzioni derivabili fino all'ordine n, diciamo che $f(x)$ è dotata di **derivata *n*–esima**.

Notazione 3

La derivata ennesima di una funzione si indica con uno dei seguenti simboli $f^n(x),\frac{df(x)}{dx^n},D^n\left[f(x)\right]$.

A volte si possono anche usare i numeri romani, per esempio può scriversi $f^{IV}(x)$.

Esempio 36

Sappiamo che $D[sin(x)] = cos(x)$ e $D[cos(x)] = -sin(x)$; quindi possiamo dire che $D^2[sin(x)] = -sin(x)$. Possiamo anche continuare dicendo che $D^3[sin(x)] = -cos(x)$, $D^4[sin(x)] = sin(x)$. A questo punto siamo ritornati alla funzione di partenza, pertanto avremo un "periodo" formato da quattro soli risultati, che possiamo racchiudere nel seguente schema: $D^n\left[sin(x)\right]=\begin{cases} sin(x) & n=4k \\ cos(x) & n=4k+1 \\ -sin(x) & n=4k+2 \\ -cos(x) & n=4k+3 \end{cases}$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo derivare ½ · [x^2 – $ln(x^2 + 1)$]. Riconosciamo la funzione composta $ln(x^2 + 1)$, composta dalle funzioni $ln(x)$ e $x^2 + 1$. Abbiamo allora: D[½ · [x^2 – $ln(x^2 + 1)$]] = ½ · [D(x^2) – D[$ln(x^2 + 1)$]] =

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(2x-\frac{2x}{x^2+1}\right)=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\left(\frac{\cancel{2}x^3+\cancel{2x}-\cancel{2x}}{x^2+1}\right)=\frac{x^3}{x^2+1}.$$

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

***Livello* 1**

1. $3x\cdot[2-ln(x^3-2x+1)]$ $\left[-3ln\left(x^3-2x+1\right)-3\cdot\frac{x^3+2x-2}{x^3-2x+1}\right]$ $ln\left[\sqrt{x-2}\right]$ $\left[\frac{1}{2(x-2)}\right]$
2. $x\cdot[cos^2(x^2-1)]$ $[cos^2(x^2-1)-2x^2\cdot[sin^2(x^2-1)]$ $ln\left[ln\left(\sqrt{sin(x)}\right)\right]$ $\left[\frac{cot(x)}{ln[sin(x)]}\right]$
3. $ln[sin(x^2)]$ $[2x\,cot(x^2)]$ $\frac{sin(2x^2-2)+2x^2}{8}$ $\left[\frac{x\cdot cos(2x^2-2)+x}{2}\right]$
4. $\frac{2x^3-sin(2x^3-2)}{12}$ $\left[\frac{x^2\cdot[1-cos(2x^3-2)]}{2}\right]$ $ln[ln(x+1)]$ $\left[\frac{1}{(x+1)\cdot ln(x+1)}\right]$
5. $sin\left[cos\left(\sqrt{x}\right)\right]$ $\left[\frac{-sin\left(\sqrt{x}\right)\cdot cos\left[cos\left(\sqrt{x}\right)\right]}{2\cdot\sqrt{x}}\right]$ $sin[ln(x^2)]$ $\left[\frac{2\cdot cos\left[ln\left(x^2\right)\right]}{x}\right]$
6. e^{x^2+3x-1} $\left[e^{x^2+3x-1}\cdot(2x+3)\right]$ $2^{x+ln\left(x^2\right)}$ $\left[2^{x+ln\left(x^2\right)}\cdot(2/x+1)\cdot ln(2)\right]$
7. $sin\left(x^3+x^2-x+1\right)$ $\left[cos\left(x^3+x^2-x+1\right)\cdot\left(3x^2+2x-1\right)\right]$ $e^{cos(x)}$ $\left[-e^{cos(x)}\cdot sin(x)\right]$
8. $log_4\left(x+\sqrt{x}\right)$ $\left[\frac{2\cdot\sqrt{x}+1}{4x\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)\cdot ln(2)}\right]$ $ln\{sin[cos(x)]\}$ $[-sin(x)\cdot cot[cos(x)]]$
9. $sin\{ln[cos(x)]\}$ $[-tan(x)\cdot cos\{ln[cos(x)]\}]$ $sin\{cos[ln(x)]\}$ $\left[-\frac{sin[ln(x)]\cdot cos\{cos[ln(x)]\}}{x}\right]$

***Livello* 2**

10. $[sin(3x)\cdot cos(4x)]^5$ $[5sin^4(3x)\cdot cos^4(4x)\cdot(3cos(4x)\cdot cos(3x)-4sin(3x)\cdot sin(4x))]$
11. $\left[e^{x^2}\cdot sin(x)\right]^6$ $\left[6\cdot e^{6x^2}\cdot sin^5(x)\cdot\left[cos(x)+2\cdot x\cdot sin(x)\right]\right]$ $\left[\sqrt[4]{x^3}\cdot ln\left(x^3\right)\right]^4$ $[3x^2\cdot ln^3(x^3)\cdot(ln(x)+4)]$
12. $[ln(x^2)\cdot sin(x)]^4$ $\left[\frac{4\cdot sin^3(x)\cdot ln^3\left(x^2\right)\left[x\cdot cos(x)\cdot ln\left(x^2\right)+2\cdot sin(x)\right]}{x}\right]$ $ln\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$ $\left[\frac{1-x}{2x\cdot(x+1)}\right]$

13. $(x^2 - 1) \cdot [x + ln(x^2 - 2x)]$ $\left[2x \cdot ln\left(x^2-2x\right)+\dfrac{3x^4-4x^3-3x^2+2}{x^2-2x}\right]$ $\left[\sqrt{x \cdot e^{2x}}\right]^3$ $\left[\dfrac{3e^{3x} \cdot \sqrt{x} \cdot (2x+1)}{2}\right]$

14. $-\dfrac{cos(4x)}{12} \cdot \left[sin^2(4x)+2\right]$ $[sin^3(4x)]$ $\dfrac{sin(6x)}{48} \cdot \left[2cos^2(3x)+3\right]+\dfrac{3}{8}x$ $[cos^4(3x)]$

15. $ln\left[ln\left(\dfrac{3x}{5x+1}\right)\right]$ $\left[\dfrac{1}{\left(5x^2+x\right) \cdot ln\left(\dfrac{3x}{5x+1}\right)}\right]$ $ln\left[sin\left(\dfrac{x^2+3}{x+1}\right)\right]$ $\left[\dfrac{\left(x^2+2x-3\right) \cdot cot\left(\dfrac{x^3+2}{x+1}\right)}{(x+1)^2}\right]$

16. $ln\left[tan\left(\dfrac{3x-1}{x^2+2}\right)\right]$ $\left[\dfrac{6x^2-4x-12}{\left(x^2+2\right)^2 \cdot sin\left(\dfrac{6x-2}{x^2+2}\right)}\right]$ $tan\left[ln\left(\dfrac{x+3}{2x-5}\right)\right]$ $\left[\dfrac{11 \cdot tan\left[ln\left(\dfrac{x+3}{2x-5}\right)\right]}{(x+3) \cdot (5-2x)}\right]$

17. $\sqrt{\left[ln\left(\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}\right)\right]^3}$ $\left[\dfrac{9x \cdot \sqrt{ln\left(\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}\right)}}{\left(1-x^2\right) \cdot \left(2x^2+1\right)}\right]$ $sin\left(e^{\frac{x+1}{x-1}}\right)$ $\left[\dfrac{-2 \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot cos\left(e^{\frac{x+1}{x-1}}\right)}{(x-1)^2}\right]$

18. $\dfrac{x+e^{nx}}{x-e^{nx}}, n \in \mathbb{N}$ $\left[\dfrac{2e^{nx} \cdot (nx-1)}{\left(e^{nx}-x\right)^2}\right]$ $sin(x^n) \cdot cos(nx), n \in \mathbb{N}$ $[n \cdot x^{n-1} \cdot cos(x^n) \cdot cos(nx) - n \cdot sin(x^n) \cdot sin(nx)]$

Lavoriamo insieme

Sia $f(x)$ continua e derivabile e sia $f(2) = 1, f'(2) = 3$; $h(x) = [f(x)]^3$. Vogliamo sapere quanto vale $h'(2)$. Intanto osserviamo che anche $h(x)$ è continua e derivabile e inoltre si ha: $h'(x) = 3 \cdot [f(x)]^2 \cdot f'(x)$, quindi si avrà anche $h'(2) = 3 \cdot [f(2)]^2 \cdot f'(2) = 3 \cdot 1^2 \cdot 3 = 9$.

Livello 2

Sia $f(x)$ derivabile per ogni x reale, che verifica le seguenti proprietà, $h(x)$ composta mediante $f(x)$ calcolare quanto richiesto

19. $f(0) = 1, f'(0) = 2$; $h(x) = 1/f(x)$, $h'(0) = ?$ $[-2]$

20. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $f(1) = 0, f'(1) = 1$; $h(x) = ln[f(x)]$, $h'(1) = ?$ [Funzione non derivabile in $x = 1$]

21. $f(2) = \pi/3, f'(2) = 2$; $h(x) = sin[f(x)]$, $h'(2) = ?$ [1]

22. $f(0) = 2, f'(0) = 1$; $h(x) = e^{f(x)}$, $h'(0) = ?$ $[e^2]$

Livello 3

23. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 3, f'(0) = 1, f''(0) = 2$; $h(x) = \sqrt{f(x)}$, $h''(0) = ?$ $\left[\dfrac{11 \cdot \sqrt{3}}{36}\right]$

24. $f(1) = \pi/4, f'(1) = ½, f''(1) = ¼$; $h(x) = cos\left[f(x)\right]$, $h''(1) = ?$ $\left[-\dfrac{9 \cdot \sqrt{2}}{8}\right]$

25. $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $f(4) = 1, f'(4) = -2$; $h(x) = sin\left\{ln\left[f(x)\right]\right\}$, $h'(4) = ?$ $[-2]$

26. $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(0) = 2, f'(0) = 1$; $h(x) = ln[f(x)]$, $g(x) = e^{h(x) + x}$, $g'(0) = ?$ [3]

27. Provare che la forza è la derivata della quantità di moto ($p = mv$) rispetto al tempo.
28. L'intensità di corrente può considerarsi come la derivata della carica elettrica al variare del tempo. Sapendo che la carica elettrica che attraversa la sezione di un conduttore è $q(t) = 1 - e^{3-t}$, determinare dopo quanti secondi nel conduttore passano 2 A. [$\approx 2{,}3\ s$]
29. La legge del moto armonico semplice è $x(t) = r \cdot cos(\omega t + \phi)$. Determinare la legge della velocità e dell'accelerazione. [$x'(t) = -\omega r \cdot sin(\omega t + \phi)$; $x''(t) = -\omega^2 r \cdot cos(\omega t + \phi)$]
30. Un punto si muove di moto armonico seguendo la legge oraria del moto $x(t) = 1{,}35 \cdot cos(5{,}8t)$. Determinare la velocità e l'accelerazione dopo 4 s. [$\approx 7.3\ m/s$; $\approx 16{,}1\ m/s^2$]
31. Con riferimento al precedente problema, per quali valori del tempo la velocità si annulla? Per quali l'accelerazione è positiva? [$t = 5\pi k/29\ s,\ k \in \mathbb{N}_0$; $5\pi(4k + 1)/58 < t < 5\pi(4k+ 3)/58\ s,\ k \in \mathbb{N}_0$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare la derivata di x^x. Riscriviamo nella forma $e^{x \cdot ln(x)}$ e deriviamo, ottenendo:

$$e^{x \cdot ln(x)} \cdot [ln(x) + x \cdot 1/x] = e^{x \cdot ln(x)} \cdot [ln(x) + 1]$$

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

Livello 1

32. $tan(x)^{ln(x+1)}$ $\left[tan(x)^{ln(x+1)} \cdot \left\{\frac{ln[tan(x)]}{x+1} + \frac{2 \cdot ln(x+1)}{sin(2x)}\right\}\right]$ $ln(x)^{ln(x)}$ $\left[ln(x)^{ln(x)} \cdot \frac{ln[ln(x)]+1}{x}\right]$

33. $sin(x)^{cos(x)}$ $\left[sin(x)^{cos(x)-1} \cdot \left\{cos^2(x) - sin^2(x) \cdot ln[sin(x)]\right\}\right]$ x^{3x+1} $[x^{3x} \cdot [3x \cdot ln(x) + 3x + 1]]$

34. $ln(x)^{sin(x)}$ $\left[ln(x)^{sin(x)-1} \cdot \frac{x \cdot cos(x) \cdot ln(x) \cdot ln[ln(x)] + sin(x)}{x}\right]$

35. $sin(x)^{ln(x)}$ $\left[sin(x)^{ln(x)-1} \cdot \frac{sin(x) \cdot ln[sin(x)] + x \cdot cos(x) \cdot ln(x)}{x}\right]$

36. $sin(x)^x$ [$sin(x)^{x-1} \cdot \{sin(x) \cdot ln[sin(x)] + x \cdot cos(x)\}$] $ln(x)^x$ [$ln(x)^{x-1} \cdot \{ln(x) \cdot ln[ln(x)] + 1\}$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare la derivata di $tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$. Abbiamo a che fare con una funzione inversa, ma dobbiamo anche applicare le regole per la derivata delle funzioni composte. Quindi si ha:

$$D\left[tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\right] = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2} \cdot D\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \frac{1}{\frac{(x^2+1)^2+(x^2-1)^2}{\cancel{(x^2+1)^2}}} \cdot \frac{2x \cdot (\cancel{x^2}+1) - 2x \cdot (\cancel{x^2}-1)}{\cancel{(x^2+1)^2}} =$$

$$= \frac{4x}{x^4 + \cancel{2x^2} + 1 + x^4 - \cancel{2x^2} + 1} = \frac{4x}{2x^4+2} = \frac{2x}{x^4+1}$$

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

Livello 2

37. $sec^{-1}(x)$ $\left[\frac{1}{|x| \cdot \sqrt{x^2-1}}\right]$ $csc^{-1}(x)$ $\left[\frac{-1}{|x| \cdot \sqrt{x^2-1}}\right]$ $\frac{x^3}{3} \cdot sin^{-1}(x) + \frac{\sqrt{1-x^2} \cdot (2+x^2)}{9}$ [$x^2 \cdot sin^{-1}(x)$]

38. $\frac{(1-x^4)}{4}\cdot tan^{-1}(x)+\frac{x\cdot(3\pi x^3+2x^2-6)}{24}$ [$x^3 \cdot cot^{-1}(x)$] $x\cdot cot^{-1}(x)+\frac{ln(x^2+1)}{2}$ [$cot^{-1}(x)$]

39. $-\frac{1}{9}\cdot\left[3\cdot\sqrt{3}\cdot tan^{-1}(\sqrt{3}\cdot x)+ln(3x^2+1)-3x^2\right]$ $\left[\frac{2x^3-1}{1+3x^2}\right]$ $x\cdot sin^{-1}(x)+\sqrt{1-x^2}$ [$sin^{-1}(x)$]

40. $\frac{(2x^2-1)\cdot sin^{-1}(x)+x\cdot\sqrt{1-x^2}}{4}$ [$x \cdot sin^{-1}(x)$] $\frac{x^3}{3}\cdot tan^{-1}(x)+\frac{ln(x^2+1)-x^2}{6}$ [$x^2 \cdot tan^{-1}(x)$]

41. $\frac{x^2+1}{2}\cdot tan^{-1}(x)-\frac{x}{2}$ [$x \cdot tan^{-1}(x)$] $\frac{x^5}{5}\cdot cos^{-1}(x)-\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot(3x^4+4x^2+8)}{75}$ [$x^4 \cdot cos^{-1}(x)$]

42. $sin^{-1}[sin(x)]$, $x \in[0, \pi/2]$ [1] $sin^{-1}[sin(x)]$, $x \in[\pi/2, \pi]$ [– 1]

43. $sin^{-1}[cos^{-1}(x)]$, $x \in[0, \pi/2]$ [– 1] $tan^{-1}[cot(x)]$, $x \in[0, \pi]$ [$\pi/2$]

Livello 3

44. $tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ $\left[\frac{-1}{1+x^2}\right]$ $tan^{-1}\left(\frac{x^2+3}{x^2-2}\right)$ $\left[\frac{-10x}{2x^4+2x^2+13}\right]$ $sin^{-1}\left(\frac{x^2-3}{x^2+5}\right)$ $\left[\frac{4x}{(x^2+5)\cdot\sqrt{x^2+1}}\right]$

45. $tan^{-1}\left(\frac{3x^2+2}{2x^2+3}\right)$ $\left[\frac{10x}{13x^4+24x^2+13}\right]$ $tan^{-1}(x)^{tan^{-1}(x)}$ $\left[tan^{-1}(x)^{tan^{-1}(x)}\cdot\frac{ln\left[tan^{-1}(x)\right]+1}{x^2+1}\right]$

46. $cos^{-1}\left(\frac{3x^2-x}{x+1}\right)$ $\left[\frac{3x^2+6x-1}{|x+1|\cdot\sqrt{-9x^4+6x^3+2x+1}}\right]$ $cot^{-1}\left(\frac{x+3}{5x^2-2}\right)$ $\left[\frac{5x^2+30x+2}{25x^4-19x^2+6x+13}\right]$

47. $sin^{-1}(x)^{sin^{-1}(x)}$ $\left[sin^{-1}(x)^{sin^{-1}(x)}\cdot\frac{ln\left[sin^{-1}(x)\right]+1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$ $sin^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $\left[\frac{-2}{x\cdot\sqrt{x^4-1}}\right]$

Lavoriamo insieme

La funzione $f(x) = x \cdot ln^2(x) - 2x \cdot ln(x) + 3x$ è certamente invertibile, poiché la sua derivata è

$$f'(x) = ln^2(x) + x \cdot 2ln(x) \cdot 1/x - 2 \cdot ln(x) - 2x \cdot 1/x + 3 = ln^2(x) + 2ln(x) - 2ln(x) - 2 + 3 = ln^2(x) + 1$$

È sempre positiva nel suo insieme di definizione. Risulta molto difficile però determinare tale inversa poiché dovremmo risolvere un'equazione complicata. Siamo però in grado di trovare facilmente la derivata della funzione inversa almeno in punti particolari. Per esempio possiamo determinare $D[f^{-1}(3)]$, infatti per il teorema 16 si ha: $\frac{d}{dy}f^{-1}(y)=\frac{1}{f'(x)}$, e quindi: $f'^{-1}(3)=\frac{1}{f'\left[f^{-1}(3)\right]}$. Dobbiamo quindi calcolare $f^{-1}(3)$, cioè dobbiamo risolvere l'equazione $x\cdot ln^2(x)-2x\cdot ln(x)+3x=3$, che facilmente si vede ha come soluzione x = 1. Quindi abbiamo: $f'^{-1}(3)=\frac{1}{f'[1]}=\frac{1}{ln^2(1)+1}=1$. Ovviamente non sappiamo risolvere il problema per qualsiasi valore, ma solo per quelli per cui l'equazione logaritmica ha una soluzione facilmente ottenibile.

Calcolare le derivate richieste

Livello 3

48. $f(-1) = 1, f'(-1) = 3$; $h(x) = tan^{-1}[f(x)]$, $h'(-1) = ?$ [3/2]

49. $f(x) = x^3 + x$; $D[f^{-1}(0)] = ?$ $D[f^{-1}(2)] = ?$ [1; ¼] $f(x) = x^5 + x$; $D[f^{-1}(0)] = ?$ $D[f^{-1}(-2)] = ?$ [1;1/6]

50. $f(x) = x^5+x^3$; $D[f^{-1}(2)] = ?$ $D[f^{-1}(0)] = ?$ [1/8; ∅] $f(x) = x^7+ x - 2$; $D[f^{-1}(0)] = ?$ $D[f^{-1}(-2)] = ?$ [1/8; 1]

51. $f(x) = x\cdot e^{2x}$, $x > 0$; $D[f^{-1}(e^2)] = ?$ [$e^{-2}/3$] $f(x) = x^3/3 + 3/2x - ¼ \cdot sin^2(2x)$; $D[f^{-1}(0)] = ?$ [2/3]

Lavoriamo insieme

Determinare la derivata di ordine 75 della funzione $sin^2(x)$. Abbiamo:

$D[sin^2(x)] = 2\cdot sin(x)\cdot cos(x) = sin(2x)$; $D^2[sin^2(x)] = D[sin(2x)] = 2\cdot cos(2x)$; $D^3[sin^2(x)] = D[2\cdot cos(2x)] = -4\cdot sin(2x)$; $D^4[sin^2(x)] = D[-4\cdot sin(2x)] = -8\cdot cos(2x)$; $D^5[sin^2(x)] = D[-8\cdot cos(2x)] = 16\cdot sin(2x)$.
Non è difficile trovare una regola generale. Notiamo infatti che alterniamo $sin(2x)$ e $cos(2x)$, inoltre alterniamo anche i segni con (+, + , – , –). Infine il coefficiente in valore assoluto è una potenza di 2 di esponente uno in meno dell'ordine della derivata. Quindi abbiamo: $D^n\left[sin^2(x)\right] = \begin{cases} -2^{n-1}\cdot cos(2x) & n = 4k \\ 2^{n-1}\cdot sin(2x) & n = 4k+1 \\ 2^{n-1}\cdot cos(2x) & n = 4k+2 \\ -2^{n-1}\cdot sin(2x) & n = 4k+3 \end{cases}$.
Poiché $75 = 4 \cdot 18 + 3$, avremo $D^{75}[sin^2(x)] = D^3[sin^2(x)] = -4\cdot sin(2x)$.
Osserviamo che la regola non vale per $n = 0$, infatti $-2^{-1}\cdot cos(2x) = -1/2\cdot[1 - 2\cdot sin^2(x)] = sin^2(x) - ½$

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni, senza effettuare tutte le derivazioni (nelle risposte $D_{n,k}$ indica le disposizioni di n oggetti a gruppi di k)

Livello 1

52. $D^{14}[sin(x) + e^x]$ $[e^x - sin(x)]$ $D^{20}[x \cdot cos(x)]$ $[x \cdot cos(x) + 20sin(x)]$ $D^5[x \cdot ln(x)]$ $[-6/x^4]$
53. $D^8[cos^2(x)]$ $[256 - 128 \cdot cos^2(x)]$ $D^{16}[sin(x) \cdot cos(x)]$ $[2^{16}sin(x) \cdot cos(x)]$
54. $D^{10}[x^2 \cdot sin(x)]$ $[20x \cdot cos(x) + (90 - x^2) \cdot sin(x)]$ $D^8(x \cdot e^x)$ $[e^x \cdot (x + 8)]$ $D^{104}(e^{4x})$ $[2^{208} \cdot e^{4x}]$
55. $D^{24}[sin(3x) + cos(3x)]$ $[3^{24} \cdot [sin(3x) + cos(3x)]]$ $D^{32}[cos(2x)]$ $[2^{32} \cdot cos(2x)]$

Livello 2

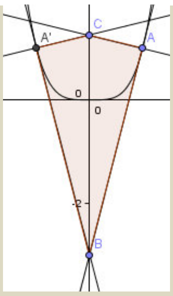
56. $D^{2014}(x^{2013})$ $[0]$ $D^{2014}(x^{2014})$ $[2014!]$ $D^{2014}(x^{2015})$ $[2015! \cdot x]$
57. $D^{2014}(x^{2016})$ $[2016!/2\cdot x^2]$ $D^{2014}(x^{2050})$ $[D_{2050,2014} \cdot x^{36}]$
58. $D^n[cos(x)]$ $\left[\begin{cases} cos(x) & n = 4k \\ -sin(x) & n = 4k+1 \\ -cos(x) & n = 4k+2 \\ sin(x) & n = 4k+3 \end{cases}\right]$ $D^n[cos(5x)]$ $\left[\begin{cases} 5^n\cdot cos(5x) & n = 4k \\ -5^n\cdot sin(5x) & n = 4k+1 \\ -5^n\cdot cos(5x) & n = 4k+2 \\ 5^n\cdot sin(5x) & n = 4k+3 \end{cases}\right]$
59. $D^n(e^{3x})$ $[3^n \cdot e^{3x}]$ $D^n(x \cdot e^x)$ $[e^x \cdot (x + n)]$ $D^n[sin(x) \cdot cos(x)]$ $\left[\begin{cases} 2^{n-1}\cdot sin(2x) & n = 4k \\ 2^{n-1}\cdot cos(2x) & n = 4k+1 \\ -2^{n-1}\cdot sin(2x) & n = 4k+2 \\ -2^{n-1}\cdot cos(2x) & n = 4k+3 \end{cases}\right]$
60. $D^n[x \cdot cos(x)]$ $\left[\begin{cases} x\cdot cos(x)+n\cdot sin(x) & n = 4k \\ n\cdot cos(x)-x\cdot sin(x) & n = 4k+1 \\ -n\cdot sin(x)-x\cdot cos(x) & n = 4k+2 \\ x\cdot sin(x)-n\cdot cos(x) & n = 4k+3 \end{cases}\right]$ $D^n(x \cdot e^{2x})$ $[2^n \cdot e^{2x} \cdot (x + n/2)]$
61. $D^n(x^{2014})$ $\left[\begin{cases} D_{2014,n}\cdot x^{2014-n} & 1\le n < 2014 \\ 0 & n \ge 2014 \end{cases}\right]$ $D^{2014}(x^n)$ $\left[\begin{cases} D_{2014,n}\cdot x^{2014-n} & n \ge 2014 \\ 0 & 1\le n < 2014 \end{cases}\right]$

Livello 3

62. $D^n [x \cdot ln(x)], n > 1$ $[-(1)^{n+1} \cdot n!/x^{n-1}]$ $D^n(x \cdot e^x)$ $[e^x \cdot (x^2 + 2nx + n^2 - n)]$
63. $D^n [x^2 \cdot ln(x)], n > 1$ $[-(1)^{n-1} \cdot 2(n - 3)!/x^{n-2}]$ $D^n\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $\left[\frac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}\right]$

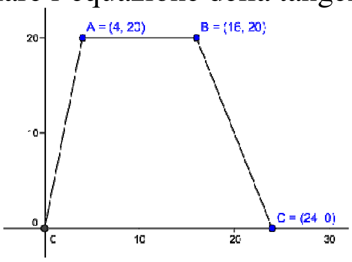
Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato agli HSMC del 2004. Una particella si muove lungo l'asse delle ascisse dall'origine alla velocità di 0,5 unità al secondo. Quando la particella si trova in $x = a$, costruiamo un quadrilatero prendendo le tangenti e le normali (perpendicolari alle tangenti) alla curva $y = x^4$ nei punti $(a; a^4)$ e $(-a; a^4)$. Quanto varia l'area del quadrilatero dopo un secondo?

Rappresentiamo il quadrilatero generico.  La tangente alla curva in $x = a$ ha equazione $y-a^4=\left[\frac{dx^4}{dx}\right]_{x=a}\cdot(x-a)\Rightarrow y=a^4+4a^3\cdot(x-a)$ e incontra l'asse y in $(0; -3a^4)$. La normale ha equazione $y-a^4=-\frac{1}{\left[\frac{dx^4}{dx}\right]_{x=a}}\cdot(x-a)\Rightarrow y=a^4-\frac{1}{4a^3}\cdot(x-a)$ e incontra l'asse y in $\left(0;\frac{1}{4a^2}+a^4\right)$. L'asse y divide il quadrilatero in 2 triangoli isometrici di area $\frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(\frac{1}{4a^2}+a^4+3a^4\right)=\frac{1}{8a}+2a^5$. Quindi l'area del quadrilatero è $\frac{1}{4a}+4a^5$, la sua variazione è ovviamente la sua derivata rispetto al tempo, tenendo conto che a è funzione del tempo t: $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4a}+4a^5\right)=-\frac{1}{4a^2}\frac{da}{dt}+20a^4\frac{da}{dt}$. Dopo 1 secondo si ha: $a=0,5;\frac{da}{dt}=0,5$, quindi $-\frac{1}{4a^2}\frac{da}{dt}+20a^4\frac{da}{dt}\Rightarrow-\frac{1}{4(0,5)^2}\cdot0,5+20\cdot(0,5)^4\cdot0,5=\frac{1}{8}$ unità quadrate al secondo.

Livello 3

64. $f(x)$ è definita in $\mathbb{R}$, derivabile fino al secondo ordine, con $f(0) = 2$, $f'(0) = -4$, $f''(0) = 3$. a) Sia $g(x)=e^{2x}+f(x),\forall x\in R$. Determinare $g'(0)$ e $g''(0)$. [–2; 7] b) Sia $h(x)=cos(x)\cdot f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Determinare l'equazione della tangente al grafico di $h(x)$ in $x = 0$. [$y = -4x + 2$]

65. In figura 

abbiamo rappresentato la velocità di una macchina, in m/s, per 24 secondi. Tenuto conto che l'accelerazione è la derivata della velocità al variare del tempo, scrivi una funzione per l'accelerazione. $\left[a(t)=\begin{cases}5 & 0<t<4\\0 & 4<t<16\\-2,5 & 16<t<24\end{cases}\right]$

66. La funzione $f(t)=3+cos\left(\frac{t}{8}\right)+4\cdot sin\left(\frac{6}{35}t\right)$, serve a fornire un modello matematico per la velocità di un piccolo aereo che vola in linea retta in Km al minuto, al variare del tempo t. Secondo questo modello quanto vale l'accelerazione dell'aereo per $t = 18$? [$\approx -0,782\ Km/min^2$]

67. Una particella si muove lungo l'asse y, in modo che la legge $v(t) = 1 - tan^{-1}(e^t)$ descriva la sua velocità. All'inizio del suo cammino la particella si trova in $y = -1$. Determina l'accelerazione della particella dopo 2 secondi. In quell'istante la velocità aumenta o diminuisce? [$\approx -0,133\ m/s^2$; aumenta]

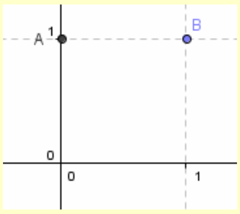
Teoremi del calcolo differenziale

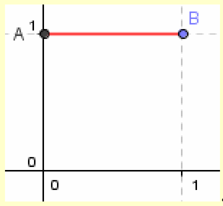
Il problema

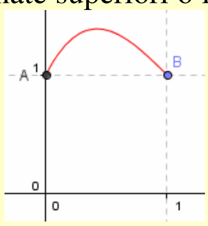
Abbiamo visto che la derivata di una funzione ha risolto il problema della crescenza e decrescenza di una funzione. Adesso ci chiediamo se riusciamo ad avere altre informazioni. Per esempio il fatto che due funzioni ammettano la stessa derivata, implica che le funzioni coincidono?

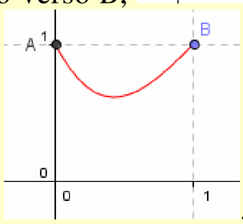
Cominciamo a considerare una semplice questione.

Esempio 37

Supponiamo di avere una funzione continua e derivabile nell'intervallo (0; 1) di cui sappiamo solo che $f(0) = f(1) = 1$. 

Cosa possiamo dire di questa funzione? Vi sono due possibilità. O tutte le ascisse comprese tra 0 e 1 hanno la stessa ordinata di A e di B, cioè la funzione è costante 

. Oppure per andare da A a B, la funzione "almeno una volta" deve assumere ordinate superiori o inferiori a 1, cioè deve salire, raggiungere un valore massimo e poi tornare indietro verso B, 

o viceversa scendere, raggiungere un valore minimo e poi tornare indietro verso B 

.

L'esempio precedente ci suggerisce di enunciare il seguente risultato.

Teorema 17 (di Rolle)

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a; b]$ e derivabile in $(a; b)$. Sia inoltre $f(a) = f(b)$. Allora esiste almeno un $c \in (a; b)$ tale che si abbia $f'(c) = 0$.

Dimostrazione

Se siamo nella prima ipotesi considerata nell'esempio, cioè in cui si ha $f(x) = k$, $\forall x \in (a; b)$, allora evidentemente i punti c cercati sono infiniti, dato che si ha $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a; b)$. Se invece ciò non accade allora se fosse $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a; b)$ la funzione dovrebbe essere crescente in $(a; b)$ e perciò $f(a) > f(b)$, che non è vero. Analogo ragionamento se fosse $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a; b)$. Quindi deve esserci almeno un punto in cui $f'(x) = 0$.

Da un punto di vista geometrico il precedente teorema implica che in almeno un punto la retta tangente alla funzione ha coefficiente angolare nullo, quindi è parallela all'asse x.

Esempio 38

La funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ verifica le ipotesi del Teorema di Rolle sia nell'intervallo (0; 1) che in (1; 2). Infatti è certamente continua e derivabile e inoltre $f(0) = f(1) = f(2) = 1$. Quindi possiamo dire con certezza che vi sono almeno due ascisse in (0; 2) per cui $f'(x) = 0$. Infatti si ha $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$. E si ha $3x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$ e abbiamo $0 < \frac{3-\sqrt{3}}{3} 1 < \frac{3+\sqrt{3}}{3} < 2$.

Possiamo dire che se una funzione continua e derivabile in un intervallo $(a; b)$ ha derivata che non si annulla mai in $(a; b)$, allora non sarà mai $f(a) = f(b)$. Invece se la funzione non è continua o non è derivabile in un intervallo $(a; b)$ **non possiamo dire** che la sua derivata non si annulla mai in $(a; b)$.

Esempio 39

- La funzione $f(x) = x^2 + 2x + 1$ non verifica le ipotesi del Teorema di Rolle in (–3/2; 0), perché $f(-3/2) \neq f(0)$ eppure si ha $f'(-1) = 0$, infatti $f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(-1) = -2 + 2 = 0$.
- La funzione $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$ non verifica le ipotesi del Teorema di Rolle in (–2; 1), perché non è continua per $x = 0$, eppure si ha $f'(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2}$, che si annulla per $x = -\sqrt{2} \in (-2; 1)$.

Dal precedente esempio e dal Teorema di Rolle, segue questo immediato risultato.

Corollario 9

Se $p(x)$ è un polinomio di grado almeno 2, allora se ha almeno due zeri a e b, $p'(x)$ ha almeno uno zero compreso in $(a; b)$.

I Protagonisti

Michel Rolle nacque il 21 Aprile 1652 ad Ambert, Basse–Auvergne. Non fu mai un matematico di prima grandezza e il suo risultato più noto è appunto il Teorema che porta il suo nome, pubblicato nel 1691 in un libriccino dalla scarsa diffusione scientifica, *Démonstration d'une Méthode pour résoudre les Egalitez de tous les degrez*. Il teorema fu associato al suo nome dall'italiano Giusto Bellavitis nel 1846. Del resto egli stesso aveva scarsa fiducia nel nascente calcolo infinitesimale, che definì *una raccolta di fallaci ingenuità*. Per lo più si interessò di problemi di teoria dei numeri. Morì l'8 Novembre 1719 a Parigi.

Possiamo generalizzare il Teorema di Rolle.

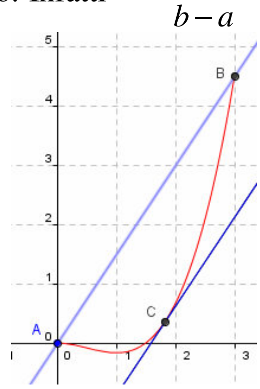
Teorema 18 (di Lagrange o della media)

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a; b]$ e derivabile in $(a; b)$. Allora esiste almeno un $c \in (a; b)$ tale che si abbia $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Dimostrazione

Consideriamo la funzione $g(x) = x \cdot [f(b) - f(a)] - f(x) \cdot (b - a)$, che è continua e derivabile in $(a; b)$ e inoltre $g(a) = a \cdot [f(b) - f(a)] - f(a) \cdot (b - a) = g(x) = a \cdot f(b) - b \cdot f(a)$; $g(b) = b \cdot [f(b) - f(a)] - f(b) \cdot (b - a) = a \cdot f(b) - b \cdot f(a)$; quindi verifica le ipotesi del teorema di Rolle. Pertanto esiste almeno un $c \in (a; b)$ per cui si ha $g'(c) = 0$. Poiché $g'(x) = f(b) - f(a) - f'(x) \cdot (b - a)$, si ha $g'(c) = f(b) - f(a) - f'(c) \cdot (b - a) = 0$, da cui, ricavando $f'(c)$, abbiamo la tesi cercata.

Geometricamente il Teorema di Lagrange implica l'esistenza di un punto della funzione in cui la tangente alla detta funzione è parallela alla retta che passa per gli estremi dell'intervallo. Infatti $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è proprio il coefficiente angolare della retta passante per i punti (a; $f(a)$) (b; $f(b)$).



Esempio 40

La funzione $f(x) = x^3 + x$ verifica le ipotesi del Teorema di Lagrange in qualsiasi intervallo, per esempio in (0; 2). Deve allora aversi $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow 3c^2+1=\frac{8+2-0}{2-0} \Leftrightarrow 3c^2=4 \Leftrightarrow c=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Dei due valori solo quello positivo rientra in (0; 2).

Anche il Teorema di Lagrange come quello di Rolle è una condizione sufficiente ma non necessaria. Quindi possono esserci funzioni non continue o non derivabili in un dato intervallo per le quali ugualmente si ha $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Il teorema è anche detto della media, poiché fornisce un valore medio della funzione nel dato intervallo. Infatti, come si calcola la media aritmetica di un numero finito di valori numerici? Sommando tutti i valori e dividendo per quanti sono. Questo ovviamente non può essere fatto per le funzioni, dato che i valori sono infiniti, allora considerare il rapporto fra la differenza delle ordinate e quella delle ascisse è una procedura simile a quella applicabile nel caso di insiemi numerici finiti.

I Protagonisti

Giuseppe Ludovico Lagrange nacque a Torino il 25 Gennaio 1736, quindi è da considerarsi a tutti gli effetti un matematico italiano, anche se erano appena sedici anni che Torino era diventata capitale del Regno di Sardegna e che la maggior parte dei suoi lavori furono scritti in francese e negli ultimi 26 anni della sua vita visse in Francia. Fu il maggiore di 11 figli, due soli dei quali arrivarono all'età adulta. Studiò a Torino senza amare molto la matematica, ma predisponendosi a una carriera giuridica. L'interesse scientifico gli fu stimolato dal suo insegnante in Collegio. Cominciò quindi uno studio da autodidatta, e già nel 1754 ottenne interessanti risultati di fisica–matematica, considerati fondanti per il cosiddetto Calcolo delle Variazioni. Anche per questo, ad appena 19 anni fu nominato professore di matematica presso la Scuola di Artiglieria Reale di Torino. Su proposta di Eulero fu eletto all'Accademia di Berlino il 2 Settembre 1756. Nel 1766 accettò la proposta di dirigere il settore matematico dell'Accademia di Berlino, dove rimase per 20 anni, interessandosi di astronomia, fluidomeccanica, probabilità, teoria dei numeri ed analisi matematica, ottenendo in ogni settore risultati fondamentali. Nel 1787 lasciò Berlino per Parigi, Nel 1788 fu pubblicato il suo importantissimo lavoro *Mécanique analytique*. Nel 1790 fu nominato membro dell'Académie des Sciences per standardizzare i pesi e le misure. Nel 1793, nei cosiddetti anni del Terrore, fu approvata una legge per imprigionare tutti gli stranieri nati in nazioni nemiche della Francia (il Piemonte lo era) e la confisca dei loro beni. Grazie all'interesse del grande chimico Lavoisier, si fece un'eccezione per Lagrange. Paradossalmente l'8 Maggio 1794, il tribunale rivoluzionario condannò a morte Lavoisier, ma lasciò indenne Lagrange, che al proposito disse: *è bastato un attimo per far cadere quella testa* (di Lavoisier), *ma ne bisogneranno un centinaio per produrne una simile.* Nel 1797 pubblicò il primo testo sulla teoria delle funzioni di una variabile reale: *Théorie des fonctions analytiques*. Napoleone gli conferì la Legion d' Onore e lo nominò Conte dell'Impero nel 1808. Morì il 10 Aprile 1813 a Parigi.

Il teorema di Lagrange ha delle immediate conseguenze.

Corollario 10

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a; b]$ e derivabile in $(a; b)$, con $f'(x) = 0$, $\forall\ x \in (a; b)$. allora $f(x)$ è costante in $(a; b)$.

Dimostrazione

Applicando il Teorema di Lagrange alla data funzione deve esistere un $c \in (a; b)$ tale che si abbia $f'(c) = 0 = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} \Rightarrow f(b) = f(a)$. Del resto il teorema possiamo applicarlo per ogni intervallo contenuto in $(a; b)$ e quindi la funzione assume in tutti punti di $(a; b)$ lo stesso valore, cioè è costante.

Esempio 41

La funzione $f(x) = tan(x) \cdot cot(x)$ è continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{k\pi/2\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre si ha: $f'(x) = \dfrac{1}{cos^{\cancel{2}}(x)} \cdot \dfrac{\cancel{cos(x)}}{sin(x)} - \dfrac{\cancel{sin(x)}}{cos(x)} \dfrac{1}{sin^{\cancel{2}}(x)} = 0$, quindi per il corollario precedente deve essere costante in ciascuno degli intervalli $(k\pi/2; k\pi)$. Ovviamente ciò non significa che è costante nel proprio dominio, poiché il corollario 10 ci assicura solo che è costante laddove è continua. In effetti però noi sappiamo che si ha $tan(x) \cdot cot(x) = 1$ in tutto il dominio.

Si faccia attenzione a controllare la validità di tutte le ipotesi.

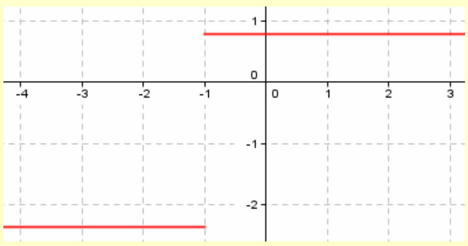
Esempio 42

Agli esami di stato di liceo scientifico del 2004/2005 fu assegnato il seguente testo: *Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione* $f(x) = tan^{-1}(x) - tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ *è costante, indi si calcoli il valore di tale costante*. Il quesito è errato, infatti si ha:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}{(x+1)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\dfrac{x^2+\cancel{2x}+1+x^2-\cancel{2x}+1}{\cancel{(x+1)^2}}} \cdot \frac{2}{\cancel{(x+1)^2}} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{2+2x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Ma la funzione non verifica le ipotesi del Corollario 10, poiché non è continua per $x = -1$. Quindi possiamo applicare il corollario 10 in $(-\infty; -1)$ e in $(-1; +\infty)$, perciò possiamo dire che la funzione è costante in ciascuno dei due intervalli, ma non in tutto il suo dominio. A differenza di quanto visto nell'esempio precedente, i valori costanti potrebbero essere fra loro diversi. Come facciamo a determinare il valore di tali costanti? Basta calcolare la funzione in valori a caso dei rispettivi intervalli. Ovviamente, se non vogliamo ricorrere alle calcolatrici cerchiamo di scegliere valori per cui sappiamo calcolare la funzione. Per esempio per $x = 0$ si ha: $f(0) = tan^{-1}(0) - tan^{-1}(-1) = 0 - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, questo valore è perciò assunto per ogni $x > -1$. Inoltre $f(-\sqrt{3}) = tan^{-1}(-\sqrt{3}) - tan^{-1}\left(\dfrac{-\sqrt{3}-1}{-\sqrt{3}+1}\right) = -\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{5\pi}{12} = -\dfrac{9\pi}{12} = -\dfrac{3\pi}{4}$. Quindi effettivamente i valori costanti sono diversi e la funzione è costante a tratti. Il grafico è il seguente



Un risultato più generale ancora è il seguente.

Corollario 11

Siano $f(x)$ e $g(x)$, continue in $[a; b]$ e derivabili in $(a; b)$, con $f'(x) = g'(x)$, $\forall\, x \in (a; b)$. allora $f(x)$ e $g(x)$ differiscono per una costante in $(a; b)$.

Dimostrazione Basta applicare il Corollario 10 alla funzione $f(x) - g(x)$.

Vediamo un esempio.

Esempio 43

Dato che si ha :

$$D\left[tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right]=\frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-\frac{x}{\cancel{2}\cdot\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(-\cancel{2}x\right)}{1-x^2}=$$

$$=\frac{1}{\frac{1-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}}{\cancel{1-x^2}}}\cdot\frac{\frac{1-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}}{\sqrt{1-x^2}}}{\cancel{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=D\left[sin^{-1}(x)\right]$$

, per il Corollario 11 possiamo dire che esiste un numero reale k, che adesso troveremo, per cui $tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=sin^{-1}(x)+k$. Per determinare k sostituiamo un qualsiasi valore a x, appartenente al dominio di entrambe le funzioni, per esempio $x = 0$. Abbiamo: $tan^{-1}(0)=sin^{-1}(0)+k\Rightarrow k=0$. Quindi $tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=sin^{-1}(x),\forall x\in(-1,1)$.

Generalizziamo anche il Teorema di Lagrange.

Teorema 19 (di Cauchy o della media)

Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni continue in $[a; b]$ e derivabili in $(a; b)$, tali che si abbia $g(a) \neq g(b)$, inoltre $f'(x)$ e $g'(x)$ non si annullano per lo stesso valore. Allora esiste almeno un $c \in (a; b)$ per cui $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Dimostrazione

Consideriamo la funzione $h(x)=f(b)-f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot\left[g(b)-g(x)\right]$, che verifica le ipotesi del Teorema di Rolle, dato che

$$h(a)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{g(b)-g(a)}}\cdot\left[\cancel{g(b)-g(a)}\right]=0;$$
$$h(b)=f(b)-f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot\left[g(b)-g(a)\right]=0$$

. Quindi possiamo dire che esiste $c \in (a; b)$: $h'(c)=0\Rightarrow -f'(c)+\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0\Rightarrow\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Consideriamo un esempio.

Esempio 44

- Le funzioni $f(x) = x^2 + x$ e $g(x) = x$, verificano le ipotesi del Teorema di Cauchy nell'intervallo $(-1; 1)$. Infatti entrambe le funzioni sono continue e derivabili addirittura in tutto $\mathbb{R}$; inoltre $g(-1) \neq g(1)$ e infine $f'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -½$, mentre $g'(x) = 1$. Possiamo allora dire che esiste $c \in (-1, 1)$ per cui si ha: $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)} \Rightarrow \frac{2c+1}{1} = \frac{2-0}{1-(-1)} \Rightarrow c = -\frac{1}{2} \in (-1;1)$.
- Invece il teorema non può applicarsi alle funzioni $f(x) = x^2 + x$ e $g(x) = cos(x)$ in $(-1, 1)$, perché $cos(-1) = cos(1)$.
- Né a $f(x) = x^2$ e $g(x) = sin(x)$ in $(-1, 1)$, perché $f'(x) = 2x$ e $g'(x) = -sin(x)$ e $f'(0) = g'(0) = 0$.

In questo caso la media determinata dal Teorema di Cauchy è quella delle due funzioni.

I Protagonisti

Augustin Louis Cauchy nacque il 21 Agosto 1789 a Parigi. Frequentò famose scuole in cui si distinse per le sue capacità scientifiche. Nel 1807 fu ammesso alla scuola ingegneristica École des Ponts et Chaussées. Nel 1810 gli fu assegnato il primo incarico: rafforzare le difese del porto di Cherbourg per contrastare un'eventuale invasione inglese. Nonostante questo impegno continuò a studiare matematica teorica, in particolare i poliedri. Nel 1814 pubblicò una memoria che è considerata la base della teoria delle funzioni complesse. Nel 1821 scrisse *Cours d'analyse*, che divenne libro di testo per gli studenti dell'École Polytechnique. A causa delle lotte del 1830 lasciò Parigi e andò prima in Svizzera e poi a Torino, dove insegnò fisica teorica. Nel 1833 si spostò a Praga come precettore del nipote di Carlo X. Ritornò a Paris nel 1838, dove per ragioni politiche e religiose non riuscì ad insegnare in Accademie o Università. In effetti ebbe sempre rapporti tormentati con le Istituzioni, ma la sua posizione nella Matematica è di primo piano. Scrisse 789 articoli quasi tutti di primo livello, le sue opere complete riempiono 27 volumi. Morì il 23 Maggio 1857 a Sceaux vicino Parigi.

Possiamo stabilire anche per le derivate un teorema simile a quello sull'esistenza dei valori intermedi.

Teorema 20 (di Darboux)

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in $[a; b]$ tale che $f'(a) = \alpha$, $f'(b) = \beta$. Allora per ogni γ: $\alpha < \gamma < \beta$ esiste almeno un $c \in (a; b)$ tale che si abbia $f'(c) = \gamma$.

Dimostrazione

Scelto un γ: $\alpha < \gamma < \beta$, consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - \gamma \cdot (x - a)$. Questa funzione è derivabile in $[a; b]$ e si ha: $g'(a) = f'(a) - \gamma = \alpha - \gamma < 0$ e $g'(b) = f'(b) - \gamma = \beta - \gamma > 0$. Quindi, per il teorema di esistenza degli zeri deve esistere $c \in (a; b)$ tale che si abbia $g'(c) = 0$, cioè $f'(c) - \gamma = 0$, ossia la tesi.

Esempio 45

La funzione $f(x) = x^3 + x + 1$ verifica le ipotesi del Teorema di Darboux nell'intervallo $(0; 1)$, quindi, poiché $f'(x) = 3x^2 + 1$, si ha $f'(0) = 0$ e $f'(1) = 3 + 1 = 4$, possiamo dire che l'equazione $f'(x) = m$, ha soluzioni reali per ogni $0 \leq x \leq 1$ e ogni $0 \leq m \leq 4$.

I Protagonisti

Jean Gaston Darboux nacque il 14 Agosto 1842 a Nimes. Sin da studente mostrò le sue attitudini matematiche, pubblicando un primo lavoro sulle superfici ortogonali. Dopo il dottorato conseguito nel 1866, cominciò a insegnare nei licei. A partire dal 1873 cominciò a insegnare, da supplente, alla Sorbonne. Fra il 1887 e il 1896 scrisse un'importante opera in quattro volumi sulla geometria infinitesimale: *Leçons sur la théorie général des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal.*

Morì il 23 Febbraio 1917 a Parigi.

Adesso vogliamo considerare un importante risultato che permette di risolvere alcune forme indeterminate.

Teorema 21 (di de L'Hôpital – Bernoulli)

Siano $f(x)$ e $g(x)$ continue e derivabili in X, con $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in X$. Sia $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \vee \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \infty$, $c \in X \cup \{-\infty; \infty\}$. Allora se esiste $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, si ha: $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Dimostrazione omessa

Noi abbiamo enunciato un solo Teorema di de L'Hôpital – Bernoulli, racchiudendo in esso i diversi casi possibili. In pratica questo teorema permette la risoluzione di forme indeterminate del tipo 0/0 oppure ∞/∞.

Esempio 46

- Sappiamo calcolare facilmente $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{3x^2+1}$ con il principio di sostituzione degli infiniti. Vogliamo invece calcolarlo con il Teorema di de L'Hôpital – Bernoulli. Verifichiamo le ipotesi. Entrambe le funzioni sono continue e derivabili per ogni x, dobbiamo quindi solo vedere se esiste il limite del rapporto delle derivate (*non della derivata del rapporto*). Abbiamo $\lim_{x\to\infty}\frac{D\left[x^2-3x+2\right]}{D\left[3x^2+1\right]} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{6x}$, che è ancora una forma indeterminata ∞/∞, alla quale possiamo applicare il teorema. Abbiamo perciò $\lim_{x\to\infty}\frac{D[2x-3]}{D[6x]} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Possiamo quindi concludere che $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{3x^2+1} = \frac{1}{3}$.
- Possiamo calcolare $\lim_{x\to 1}\frac{sin(x)}{x}$ con il teorema di de L'Hôpital – Bernoulli? No, perché non abbiamo a che fare con una forma indeterminata. Semplicemente abbiamo $\lim_{x\to 1}\frac{sin(x)}{x} = sin(1)$. Cosa accade se invece applichiamo il teorema? $\lim_{x\to 1}\frac{D\left[sin(x)\right]}{D[x]} = \lim_{x\to 1}\frac{cos(x)}{1} = cos(1)$. Un risultato ovviamente sbagliato.

Abbiamo appena visto che il teorema di de L'Hôpital – Bernoulli, come ogni teorema, può applicarsi, fornendo risultati corretti, solo se sono verificate tutte le ipotesi.

Esempio 47

Non possiamo applicare il teorema di de L'Hôpital – Bernoulli per calcolare $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, anche se abbiamo una forma indeterminata ∞/∞ e se numeratore e denominatore sono entrambe continue e derivabili per ogni x. Infatti il limite del rapporto delle derivate è $\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, che è ancora una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, e se riapplichiamo il teorema otteniamo di nuovo $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, cioè il limite di partenza. Entriamo quindi in un circolo vizioso. Del resto usando il principio di sostituzione degli infiniti avremmo facilmente calcolato: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$.

Il Teorema di de L'Hôpital – Bernoulli si applica solo a forme indeterminate 0/0 o ∞/∞, se abbiamo quindi altre forme indeterminate dobbiamo cercare di ricondurle a una di queste, per potere applicare il teorema.

Esempio 48

- Per calcolare $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-csc(x)\right)$ non possiamo applicare il teorema di de L'Hôpital – Bernoulli perché abbiamo a che fare con una forma indeterminata + ∞ – ∞. Però possiamo scrivere:
$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-csc(x)\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sin(x)}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{sin(x)-x}{x\cdot sin(x)}$$
In questo modo il limite adesso è una forma indeterminata 0/0, possiamo quindi applicare il teorema: $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{D\left[x-sin(x)\right]}{D\left[x\cdot sin(x)\right]}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-cos(x)}{sin(x)+x\cdot cos(x)}$, che è ancora una forma indeterminata 0/0, a cui possiamo applicare ancora il teorema 21: $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{D\left[1-cos(x)\right]}{D\left[sin(x)+x\cdot cos(x)\right]}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{sin(x)}{cos(x)+cos(x)-x\cdot sin(x)}=0$, che è il limite cercato.
- Per calcolare $\lim\limits_{x\to0^+}\left[x\cdot cot(x)\right]$ non possiamo applicare il teorema di de L'Hôpital – Bernoulli perché abbiamo a che fare con una forma indeterminata 0 · ∞. Però possiamo scrivere: $\lim\limits_{x\to0^+}\left[x\cdot cot(x)\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{tan(x)}$ che adesso è forma indeterminata 0/0. Adesso possiamo applicare il teorema: $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{D(x)}{D\left[tan(x)\right]}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{1+tan^2(x)}=1$.

Quanto visto nell'esempio precedente può essere proposto in forma generale.

Teorema 22

Valgono le seguenti identità $f-g=\dfrac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f\cdot g}}$; $f\cdot g=\dfrac{f}{\frac{1}{g}}=\dfrac{g}{\frac{1}{f}}$, purché le espressioni abbiano significato.

Dimostrazione per esercizio

I Protagonisti

Guillaume François Antoine, Marchese de L'Hôpital nacque a Parigi nel 1661, dove morì nel 1704. Essendo un nobile ricco per passare il tempo, dalla fine del 1691 al Luglio del 1692 assunse il grande matematico Johann Bernoulli, facendogli sottoscrivere un bizzarro contratto, in cui quest ultimo era obbligato a comunicargli qualsiasi risultato avesse scoperto nel periodo. Del risultato il marchese poteva disporre a proprio piacere. Vi è da precisare che de L'Hôpital non era però del tutto digiuno di matematica. Ma fu soprattutto grazie alle lezioni e ai risultati di Bernoulli che poté pubblicare, nel 1696, il libro *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, che fu il primo libro di testo sul calcolo differenziale. In tale libro è presente il teorema che porta il suo nome e che, nonostante fosse stato scoperto da Bernoulli, viene presentato come una sua opera.

Johann Bernoulli nacque a Basilea il 27 Luglio 1667. La sua famiglia è probabilmente quella più "prolifica" nell'ambito scientifico. Decine di suoi familiari raggiunsero brillanti risultati nella varie branche matematico–scientifiche. In particolare suo fratello Jacob, di dodici anni maggiore, con il quale, nonostante egli fosse iscritto a Medicina, studiò matematica all'Università di Basilea. Solo nel 1922 si stabilì che il libro pubblicato dal marchese de L'Hôpital era per gran parte opera sua. Durante la sua vita fu spesso in competizione con il fratello Jacob. Parecchi importanti risultati in matematica e fisica gli sono dovuti. Morì a Basilea il 01/01/ 1748.

Concludiamo l'unità considerando un risultato che ci permette di capire come sia possibile che una calcolatrice o un software, che sanno solo effettuare somme, riescano a calcolare valori ottimamente approssimati di funzioni trascendenti come gli esponenziali, i logaritmi e così via.
Fra tutte le funzioni le più semplici da trattare, almeno sotto certi punti di vista, sono i polinomi. Quindi se ogni funzione potesse essere ricondotta a un polinomio riusciremmo a studiarla più facilmente. In effetti vale il seguente fondamentale risultato.

Teorema 23 (Formula di Taylor)

Sia $f(x)$ continua e derivabile fino all'ordine n in $(a; b)$, sia $c \in (a; b)$ ed esista $f^n(c)$, allora si ha:
$$f(x) = f(c) + f'(c)\cdot(x-c) + f''(c)\cdot\frac{(x-c)^2}{2!} + \ldots + f^{n-1}(c)\cdot\frac{(x-c)^{n-1}}{(n-1)!} + \left[f^n(c) + h(x)\right]\cdot\frac{(x-c)^n}{n!},$$ con $h(x)$ infinitesimo dello stesso ordine di x^n.

Grazie al precedente risultato le calcolatrici riescono a ricondurre ogni operazione matematica solo a somme e prodotti, e poiché i prodotti sono particolari somme solo a somme, calcolando in pochissimo tempo complicate espressioni.
Vi è da dire che la scelta del punto c riesce spesso a semplificare i calcoli, e non è difficile capire che $c = 0$ è spesso la migliore scelta.

Definizione 8

Data una funzione $y = f(x)$, alla quale può applicarsi il Teorema 23, allora il polinomio presente nella tesi del teorema si chiama **polinomio di Taylor della funzione**. Se $c = 0$, il detto polinomio si chiama **polinomio di Mac Laurin della funzione**.

Esempio 49

La funzione $f(x) = e^x$ è esprimibile mediante un polinomio di Taylor, o meglio di Mac Laurin? Sì poiché la funzione è dotata di derivate di qualsiasi ordine. Quindi possiamo scrivere
$$\begin{aligned} e^x &= e^0 + e^0\cdot x + e^0\cdot\frac{x^2}{2} + e^0\cdot\frac{x^3}{3!} + \ldots + e^0\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \left[e^0 + h(x)\right]\cdot\frac{x^n}{n!} = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \left[1 + h(x)\right]\cdot\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + h(x)\cdot\frac{x^n}{n!}\end{aligned}.$$

Come possiamo quindi calcolare un valore approssimato del numero e? Usando il suo polinomio di Mac Laurin, ovviamente più termini sommiamo e migliore è il risultato ottenuto.

Esempio 50

Abbiamo $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$, costruiamo una tabella, con Derive o con altro software o calcolatrice, dello sviluppo di e con diversi valori di n.

```
                         n    1
#1:   maclaurin(n) := 2 + ∑  ──
                         k=2  k!

#2:   VECTOR(maclaurin(n), n, 2, 10)

#3:   [2.5, 2.666666666, 2.708333333, 2.716666666, 2.718055555, 2.718253968, 2.718278769, 2.718281525, 2.718281801]
```

Osserviamo che man mano che calcoliamo più addendi i valori si "assomigliano" sempre di più, le cifre decimali tendono così a stabilizzarsi. Possiamo perciò dire per esempio che un'approssimazione di e con 5 cifre decimali esatte è 2,71828.

Di seguito forniamo gli sviluppi di Mac Laurin di alcune funzioni.

Teorema 24

Valgono i seguenti sviluppi di Mac Laurin:

$$sin(x) \approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

$$cos(x) \approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^{n}\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\cdot\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$ln(1+x) \approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{n}}{n}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot\frac{x^{k}}{k},\ con\ |x|<1$$

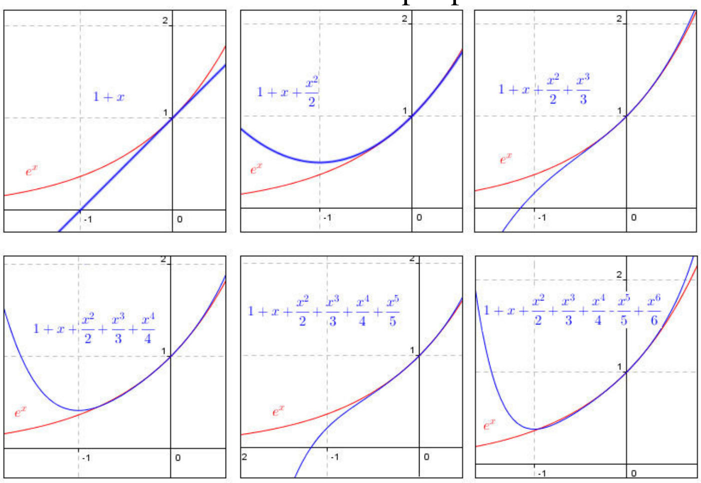
$$tan^{-1}(x) \approx x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot\frac{x^{2k-1}}{2k-1}$$

$$\frac{1}{1-x}\approx 1+x+x^2+...+x^n=\sum_{k=0}^{n}x^k$$

$$(1+x)^h \approx 1+k\cdot x+\binom{k}{2}\cdot x^2+\binom{k}{3}\cdot x^2+...+\binom{k}{n}\cdot x^n;\binom{k}{n}=\frac{k\cdot(k-1)\cdot...\cdot(k-n+1)}{n!}$$

Dimostrazione per esercizio

Il risultato precedente, da un punto di vista grafico, come mostrato di seguito per e^x, implica che per ogni successiva approssimazione si ottiene una curva che è sempre più simile alla funzione da sviluppare.



Possiamo usare lo sviluppo di Taylor anche per il calcolo dei limiti.

Esempio 51

Vogliamo calcolare il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}$, sviluppando $sin(x)$ con il polinomio di Mac Laurin possiamo scrivere: $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...}{x}$, ma ovviamente fra tutti gli infiniti addendi x è l'infinitesimo di ordine superiore, pertanto possiamo scrivere semplicemente: $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$, che è ciò che già sapevamo.

I Protagonisti

Brook Taylor nacque il 18 Agosto 1685 a Edmonton in Inghilterra. Si laureò in matematica nel 1709. Nel 1712 fu eletto alla Royal Society. Nel 1715 pubblicò un importante testo di analisi: *Methodus incrementorum directa et inversa*, in cui, fra le altre cose, comparve la serie associata al suo nome, anche se James Gregory, prima di lui aveva scoperto che $tan^{-1}(x) = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \ldots$ Solo nel 1772 Lagrange proclamò che questo era il principio base del calcolo differenziale. Il termine serie di Taylor fu usato per la prima volta da Lhuilier nel 1786. Morì il 29 Dicembre 1731 a Somerset House nei pressi di Londra.

Colin Maclaurin nacque nel 1698 a Kilmodan in Scozia. Ad appena 11 anni fu ammesso all'Università di Glasgow, in quei tempi, in Scozia, anche le Università educavano studenti così giovani non per forza geniali. Comunque egli mostrò ben presto le sue attitudini matematiche ed a 14 anni conseguì la laurea. Rimase nell'Università a studiare religione, con l'intenzione di entrare nella chiesa presbiteriana. Ma nel 1717 fu nominato professore di matematica al Marischal College dell'Università di Aberdeen. Passò poi all'Università di Edimburgo nel 1725. Si occupò di parecchie cose, molto importante è il suo trattato del 1742 in 2 volumi: *Treatise of fluxions*, in cui presentò le idee di Newton sul calcolo differenziale. In tale testo è presente lo sviluppo in serie che porta il suo nome. Morì il 14 Giugno 1746 a Edimburgo

Consideriamo un polinomio, vogliamo stabilire delle relazioni fra i suoi zeri e le sue derivate.

Esempio 52

- Sia $p(x) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 3)$, che ha ovviamente i 3 zeri: 0, – 1, + 3. Cosa possiamo dire della sua derivata prima? $p'(x) = (x + 1) \cdot (x - 3) + x \cdot (x - 3) - x \cdot (x + 1)$. Ovviamente non si annulla per alcuno dei tre zeri di $p(x)$, dato che annulla due dei tre addendi ma non il terzo.
- Sia adesso $p(x) = x \cdot (x - 1)^3$, che ha ovviamente i 2 zeri: 0, + 1 (con molteplicità 3). Abbiamo $p'(x) = (x - 1)^3 + 3x \cdot (x - 1)^2 = (x - 1)^2 \cdot (x - 1 + 3x) = (x - 1)^2 \cdot (4x - 1)$. Stavolta la derivata prima si annulla nello zero triplo di $p(x)$, anzi si annulla 2 volte in questo valore. Il che significa che anche la derivata seconda si annullerà per $x = 1$. Infatti $p''(x) = 2 \cdot (x - 1) \cdot (4x - 1) + 4 \cdot (x - 1)^2 = (x - 1) \cdot (8x - 2 + 4) = (x - 1) \cdot (7x + 2)$. Invece non si annulla la derivata terza: $P'''(x) = -(7x + 2) + 7 \cdot (x - 1)$.

I risultati dell'esempio precedente ci convincono della validità del seguente risultato.

Teorema 25

Sia $p(x)$ un polinomio di grado n e si abbia $p(a) = p'(a) = p''(a) = \ldots = p^{k-1}(a) = 0$ e $p^k(a) \neq 0$, $k \leq n$. Allora a è uno zero di $p(x)$ di molteplicità esattamente k e viceversa.

Dimostrazione Per esercizio

Esempio 53

Di un polinomio $p(x)$ sappiamo che $p(1) = p'(1) = p''(1) = 0$. possiamo dire che $p(x) = (x - 1)^3 \cdot q(x)$, dove $q(x)$ è un polinomio.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Possiamo applicare il teorema di Rolle alla funzione $y = x^2 - \sqrt{-3x^2+1}, x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$? La funzione è continua se $-3x^2+1 \ge 0 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{3}}$, e derivabile se $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, poiché $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, le prime due ipotesi sono verificate. La funzione è pari, quindi assume lo stesso valore per ascisse opposte, quindi è verificata anche la terza ipotesi. Determiniamo allora i valori in cui la derivata prima si annulla. Poiché $y' = 2x - \frac{-\cancel{6}^3 x}{\cancel{2}\sqrt{-3x^2+1}} = \frac{2x\cdot\sqrt{-3x^2+1}+3x}{\sqrt{-3x^2+1}}$, deve aversi

$$2x\cdot\sqrt{-3x^2+1}+3x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee 2\cdot\sqrt{-3x^2+1}+3 = 0$$

la seconda equazione non ha soluzioni reali. Quindi l'ascissa cercata è $x = 0$.

Verificare la validità del teorema di Rolle per le seguenti funzioni, nell'intervallo a lato indicato, determinando i valori in cui la derivata prima si annulla

***Livello* 1**

1. $y = 1+\sqrt{-x^2-2x+3}$, $x \in[-3; 1]$ [– 1] $y = 4-\sqrt{-x^2+5x+6}$, $x \in[2; 3]$ [5/2]
2. $y = 5+\sqrt{-x^2+7x-10}$, $x \in[2; 5]$ [7/2] $y = -5+\sqrt{-x^2-2x+8}$, $x \in[-4; 2]$ [– 1]
3. $y = \sqrt{3x^2-15x+21}$, $x \in[1; 4]$ [5/2] $y = \sqrt{-x^2+x+1}$, $x \in[0; 1]$ [½]
4. $y = x+\sqrt{-x^2-x+2}$, $x \in[-½; 1]$ $\left[\frac{3\cdot\sqrt{2}-2}{4}\right]$ $y = \frac{x^2+4}{x^2+1}, x \in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ [0]
5. $y = sin(x) + cos(x)$, $x \in[0; \pi/2]$ [π/4] $y = sin(x) - cos(x)$, $x \in[0; 3\pi/2]$ [3π/4]

***Livello* 2**

6. Se una funzione è pari, continua in [$-a$, a] e derivabile in ($-a$, a), il teorema di Rolle può sempre applicarsi. Questa affermazione è corretta? Giustificare la risposta. [Sì]
7. Se una funzione è dispari, continua in [$-a$, a] e derivabile in ($-a$, a), il teorema di Rolle non può mai applicarsi. Questa affermazione è corretta? Giustificare la risposta. [Sì]

Trovare i valori dei parametri reali, se esistono, per i quali possa applicarsi il teorema di Rolle, alle seguenti funzioni negli intervalli indicati

8. $f(x) = ax^3 + x^2$, $x \in [0; 1]$ [$a = -1$; $c = 2/3$] $f(x) = x^2 + 1$, $x \in [0; a]$ [$\varnothing$]
9. $f(x) = ax^2 + x + 1$, $x \in [0; 1]$ [$a = -1$; $c = ½$] $f(x) = e^{ax}$, $x \in [0; 1]$ [$\varnothing$]
10. $f(x) = x^3 + ax^2 - x + 1$, $x \in [0; 1]$ $\left[a = 0; c = \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ $f(x) = x^4 + x^2 + a$, $x \in [-1; 1]$ [$\forall a\in\mathbb{R}$; $c = 0$]

Stabilire per quali motivi alle seguenti funzioni non può applicarsi il teorema di Rolle, quindi stabilire se, ciononostante, esiste *c* interno all'intervallo indicato in cui *f ′*(*c*)= 0. Nelle risposte N.C. = non continua; N.D. = non derivabile

***Livello* 2**

11. $y = x+\sqrt{x^2-x}, x \in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ [N.C.; non esiste c] $y = \sqrt{x^2-x}, x \in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ [N.C., c = ½]
12. $y = |x|$, $x \in [-1; 1]$ [N.D. in $x = 0$; no c] $y = sin(x)$, $x \in [-2; 2]$ [$y(-2) \ne y(2)$, $c = \pi/2$]
13. $y = x \cdot |x|$, $x \in [-1; 1]$ [$y(-1) \ne y(1)$; $c = 0$] $y = \sqrt[3]{x^2}, x \in[-1;1]$ [N.D. in $x = 0$; non esiste c]
14. $y = cot(x)$, $x \in [\pi/2; 3/2\pi]$ [N.C. in $x = \pi$; no c] $y = ln(x)$, $x \in [0; 1]$ [N.C. in $x = 0$; no c]

Verificare la validità del teorema di Lagrange per le seguenti funzioni, nell'intervallo a lato indicato, determinando i valori per i quali si trova il valore medio

Livello 1

15. $y=\frac{x+1}{x-1}, x\in[2;3]$ $\left[c=\sqrt{2}+1\right]$ $y=\frac{x^2+1}{x+1}, x\in[0;1]$ $\left[c=\sqrt{2}-1\right]$

16. $y=e^x, x\in[-1;2]$ $\left[c=ln\left(\frac{e^3-1}{3}\right)-1\right]$ $y = ln(x)$, $x \in [1; e]$ $[c = e - 1]$

17. $y=sin(x), x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ $\left[c=sin^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)\vee cos^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)\right]$ $y=\sqrt{x}, x\in[0;1]$ $[c = ¼]$

18. $y = x^2 + x$, $x \in [-1; 1]$ $[c = 0]$ $y = x^3 + x + 1$, $x \in [-1; 0]$ $\left[c=-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

19. $y=\frac{x}{x^2-1}, x\in[2;3]$ $\left[c=\sqrt{\frac{4\cdot\sqrt{30}+19}{7}}\right]$ $y=\frac{x+\sqrt{x}}{x}, x\in[1;2]$ $\left[c=\sqrt[3]{\frac{2\cdot\sqrt{2}+3}{2}}\right]$

20. $y=\frac{sin(x)}{cos(x)+1}, x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ $\left[c=sin^{-1}\left(\frac{\pi-2}{2}\right)\vee cos^{-1}\left(\frac{\pi-2}{2}\right)\right]$

Livello 2

21. $y = sin^{-1}(x)$, $x\in[-1,1]$ $\left[c=\pm\frac{\sqrt{\pi^2-4}}{\pi}\right]$

22. $y = ax^2 + bx + d$, $x\in[m, p]$, $a; b, c, m, p \in \mathbb{R}$ $\left[c=\frac{m+p}{2}, a\neq 0\right]$

23. $y = ax^3 + x + b$, $x\in[m, p]$, $a; b, m, p \in \mathbb{R}$ $\left[c=\pm\frac{\sqrt{3\cdot(m^2+mp+p^2)}}{3}, a\neq 0\right]$

Livello 3

24. $y=\frac{a^2+x}{x-a^2}, x\in[0;1], a^2\neq 1$ $\left[c=\begin{cases}a^2+|a|\cdot\sqrt{a^2-1} & se\ |a|>1\\ a^2-|a|\cdot\sqrt{a^2-1} & se\ |a|<1\end{cases}\right]$

Trovare i valori dei parametri reali, se esistono, per i quali possa applicarsi il teorema di Lagrange, alle seguenti funzioni negli intervalli indicati

25. $f(x) = ax^3 + x$, $x \in [0; 1]$ $\left[\forall a\in\mathbb{R}, c=\sqrt{3}/3\right]$ $f(x) = ax^2 + x + 1$, $x \in [0; 1]$ $[\forall a \in\mathbb{R}; c = ½]$

26. $f(x) = x^2 + 1$, $x \in [0; a]$ $[\forall a \in\mathbb{R}, c = (a - 1)/2]$ $f(x) = e^{ax}$, $x \in [0; 1]$ $\left[a\neq 0; c=\frac{1}{a}\cdot ln\left(\frac{a-1}{a}\right)\right]$

27. $f(x) = x^3 + ax^2 - x + 1$, $x \in [0; 1]$ $\left[\forall a\in\mathbb{R}; c=\frac{\sqrt{a^2+3a+1}-a}{3}\right]$

28. $f(x) = x^4 + x^2 + a$, $x \in [-1; 1]$ $[\forall a\in\mathbb{R}; c = 0 \vee c = -½]$

Stabilire per quali motivi alle seguenti funzioni non può applicarsi il teorema di Lagrange, quindi stabilire se, ciononostante, esiste *c* interno all'intervallo indicato in cui si ha la media

Livello 2

29. $y=x+\sqrt{x}, x\in[-1;0]$ [N.C.; no c] $y=\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}, x\in[0;1]$ [N.C.; no c]

30. $y = |x - 2|$, $x \in [0; 3]$ [N.D. in $x = 2$] $y = cot(x)$, $x \in [\pi/3; 4/3\pi]$ [N.C. in $x = \pi$; no c]

Livello 3

31. Sia $f(x)$ una funzione derivabile in (1; 2) tale che $f(0) = 1$, $f(2) = e$. Stimare la media della funzione $h(x) = ln[f(x)]$, nell'intervallo (1; 2). [½]
32. Sia $f(x)$ una funzione derivabile in (0; 1) tale che $f(0) = 0$, $f(1) = \pi/6$. Stimare la media della funzione $h(x) = sin[f(x)]$, nell'intervallo (0; 1). [½]
33. Sia $f(x)$ una funzione derivabile in (1; 2) tale che $f(3) = 1$, $f(5) = 1/2$. Stimare la media della funzione $h(x) = sin^{-1}[f(x)]$, nell'intervallo (3; 5). [$-\pi/6$]
34. Sia una funzione derivabile fino al secondo ordine tale che si abbia $f(2) = 5$ e $f(5) = 2$. Sia $g(x) = f[f(x)]$. Dimostrare che esiste $c \in (2; 5)$ per cui si ha $f'(c) = -1$. Dimostrare che $g'(2) = g'(5)$ e usare tale fatto per dimostrare che esiste almeno un $k \in (2; 5)$ per cui si ha $g''(k) = 0$. Sia poi $h(x) = f(x) - x$, dimostrare che esiste $m \in (2; 5)$ per cui $h(m) = 0$.
35. Nella seguente tabella indichiamo alcune informazioni relative a due funzioni continue e derivabili su tutto $\mathbb{R}$, con g strettamente crescente.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	6	4	2	5
2	9	2	3	1
3	10	–4	4	2
4	–1	3	6	7

Definiamo la funzione $h(x) = f[g(x)]$.
a) Dimostrare che esiste c: $1 < c < 3$, $h(c) = -5$; b) Dimostrare che esiste c: $1 < c < 3$, $h'(c) = -5$; c) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = g^{-1}(x)$, per $x = 2$. [$x - 5y + 3 = 0$]

Lavoriamo insieme

Possiamo dire che la funzione $sin^{-1}[cos(x)]$ è costante? Intanto determiniamo il suo insieme di esistenza. Deve essere $-1 \le cos(x) \le 1$, che è sempre vera. Adesso calcoliamo la derivata, che sappiamo esserci: $D\left\{sin^{-1}\left[cos(x)\right]\right\} = \frac{1}{\sqrt{1-cos^2(x)}} \cdot (-sin(x)) = \frac{-sin(x)}{|sin(x)|} = \begin{cases} 1 & se \ \ sin(x) < 0 \\ -1 & se \ \ sin(x) > 0 \end{cases}$, che non è zero, quindi possiamo dire che la funzione $sin^{-1}[cos(x)]$ non è costante.

Stabilire quali delle seguenti funzioni sono costanti e, nel caso, calcolarne il valore

Livello 2

36. $sin^{-1}(x) + cos^{-1}(x)$ [$\pi/2$] $sin^{-1}[cos(x)] - x$ [No] $tan^{-1}(x) + cot^{-1}(x)$ [$\pi/2$]
37. $sin^{-1}[cos(x)] - x,\ x \in [-\pi; 0]$ [$\pi/2$] $tan^{-1}[cot(x)]$ [No] $sin^{-1}[cos(x)] - x,\ x \in [0; \pi]$ [No]
38. $sin^{-1}[cos(x)] + x,\ x \in [0; \pi]$ [$\pi/2$] $sin^{-1}[cos^{-1}(x)]$ [No]

Mostrare che si ha la validità delle seguenti uguaglianze, determinando il valore del parametro *k*.

39. $sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = cos^{-1}(x) + k$ [0] $sin^{-1}(x) = cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) + k$ [0]
40. $tan^{-1}[cot(x)] = k - x$ [0] $tan[cot^{-1}(x)] = ln(x) + k$ [0]
41. $tan^{-1}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot tan^{-1}(x) + k$ [$-\pi/4$] $tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right) = sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) + k$ [0]
42. $tan^{-1}(x) = cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + k$ [0] $2 \cdot tan^{-1}(x) = tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) + k$ [0]

Livello 3

43. $tan^{-1}\left(\frac{2x \cdot \sqrt{1-x^2}}{2x^2 - 1}\right) = sin^{-1}\left(2x \cdot \sqrt{1-x^2}\right) + k$ [0] $tan^{-1}(x) + tan^{-1}(x^2) = tan^{-1}\left(\frac{x + x^2}{1 - x^3}\right) + k$ [0]

Lavoriamo insieme

Possiamo applicare il Teorema di Cauchy alle funzioni $f(x) = x^2 + x - 1; g(x) = \frac{x+1}{x-1}$, nell'intervallo [0, 1]? No, perché la funzione $g(x)$ non è continua per $x = 1$. E nell'intervallo [–1,0]? Sì, perché entrambe le funzioni sono continue e derivabili. Inoltre $g(-1)=0, g(0)=-1$. Calcoliamo la derivata di $g(x)$: $g'(x)=\frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-1}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}\neq 0, \forall x\neq 1$. Quindi possiamo applicare il teorema:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(0)-f(-1)}{g(0)-g(-1)}\Rightarrow \frac{2c+1}{\frac{-2}{(c-1)^2}}=\frac{-1-(-1)}{-1-0}\Rightarrow \frac{(2c+1)\cdot(c-1)^2}{-2}=0\Rightarrow c=-\frac{1}{2}\vee c=1$$

Solo il primo valore è accettabile perché compreso in (–1,0) .

Verificare la validità del teorema di Cauchy per le seguenti coppie di funzioni, nell'intervallo indicato, determinando i valori per i quali si trova il valore medio

Livello 1

44. $f(x) = x^2 + x$; $g(x) = 2x - 1$;[0; 1] [$c = ½$] $f(x) = x^2 - x$; $g(x) = x^2 + 1$; [–1; 1] [$c = 0$]
45. $f(x)=\frac{x}{x+1}; g(x)=x$; [0; 1] $\left[c=\sqrt{2}-1\right]$ $f(x)=x; g(x)=\frac{x}{x+1}$; [0; 1] $\left[c=\sqrt{2}-1\right]$
46. $f(x) = ln(x)$; $g(x) = 2x + 1$; [1; e] [$c = e - 1$] $f(x) = ln(x^2)$; $g(x) = x^2 + 1$; [1; e] $\left[c=\sqrt{\frac{e^2-1}{2}}\right]$
47. $f(x) = ln(x)$; $g(x) = ln^2(x)$; [e; e^2] $\left[c=\sqrt{e^3}\right]$ $f(x) = e^x$; $g(x) = x$; [0; 1] [$c = ln(e - 1)$]
48. $f(x) = x^2 + x$; $g(x) = x^3 - x$; [–2; 1] [$c = - ½$] $f(x)=\frac{x}{x-1}; g(x)=\frac{x-1}{x}$; [2; 3] $\left[c=\frac{\sqrt{3}+3}{2}\right]$

Livello 2

49. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}; g(x)=x$; [0;2] $\left[c=\sqrt{\frac{\sqrt{65}-7}{2}}\right]$ $f(x)=\frac{x}{x^2+1}; g(x)=\frac{x^2+1}{x}$; [1;2] $\left[c=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$
50. $f(x) = sin(x)$; $g(x) = cos(x)$; [π/6; π/3] [$c = π/4$]
51. $f(x) = tan(x)$; $g(x) = cot(x)$; [π/6; π/4] $\left[c=tan^{-1}\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2\right)\right]$

Livello 3

52. $f(x) = ax^2 + bx + c$; $g(x) = mx^2 + nx + p$;[0;2] [$c = 1$] $f(x) = ax^2 + bx + c$; $g(x) = mx + n$;[–4;2] [$c = –2$]

53. Se possiamo applicare il teorema di Cauchy alle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sia scegliendo f come funzione al numeratore, sia come funzione al denominatore, possiamo dire che il valore c trovato è sempre lo stesso? Giustificare la risposta. [Sì]
54. Se $g(x)$ è una funzione pari il teorema di Cauchy non può applicarsi in nessun intervallo simmetrico (–a; a). l'affermazione è corretta? giustificare la risposta. [Sì]

Stabilire per quali motivi alle seguenti coppie di funzioni non può applicarsi il teorema di Cauchy, quindi determinare se, ciononostante, esiste *c* interno all'intervallo indicato in cui si ha la media

Livello 2

55. $f(x)=\frac{x}{x^2-1}; g(x)=x$; [0;2] [$f$ NC, $x = 1$, no c] $f(x) = x^3$; $g(x) = x^2$;[–1; 1] [$g(–1) = g(1)$, no c]
56. $f(x) = x^2$; $g(x) = |x|$;[–1; 2] [g ND, $x = 0$, no c] $f(x) = x^2$; $g(x) = x^3$;[–2; 1] [$g'(0) = 0$, $c = - 2/9$]
57. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}; g(x)=x; [-1;2]$ [f non è derivabile in $x = 0$, non esiste c]

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare il seguente $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+x^2}}{4+x^2}$, che risulta una forma indeterminata ∞/∞. Piuttosto che applicare il principio di sostituzione degli infiniti, possiamo applicare il teorema di de L'Hôpital–Bernoulli? Le funzioni sono continue e derivabili entrambe, vediamo se esiste il limite del rapporto delle derivate. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\cancel{2x}}{2\cdot\sqrt{4+x^2}}}{\cancel{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2\cdot\sqrt{4+x^2}}=0$. Possiamo allora dire che anche il limite di partenza vale zero.

Utilizzando, dove possibile, il teorema di de L'Hôpital – Bernoulli calcolare i seguenti limiti

Livello 1

58. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{sin(x)+sin(2x)}{1-cos(4x)}$ [$+\infty$] $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+ln(x)}{e^x+1}$ [0] $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^3+x^2}$ [0, No F.I.]

59. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{2x+ln(x)}$ [0] $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^4-2x^3+2x-1}$ [1] $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{x^5}+4\cdot\sqrt{x^3}+4\cdot\sqrt{x}}{x^3-6x^2+12x-8}$ [0, No F.I.]

60. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x+ln(x)}{x+sin(x)}$ [$-\infty$] $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+}\frac{ln(x^2-2)}{cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)}$ [∞] $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{ln(x^2-4)}{tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)}$ [0] $\lim\limits_{x\to3}\frac{cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)}{tan\left(\frac{\pi}{3}x\right)}$ [½]

61. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{ln(x^2)}{e^x-e}$ [0] $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{sin(x)}{sin^{-1}(\pi-x)}$ [1] $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{3\cdot tan^{-1}(x)-\pi}{x^2-3}$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{8}\right]$ $\lim\limits_{x\to e}\frac{ln(x^2)-2}{sin(x-e)}$ [$2e^{-1}$]

62. $\lim\limits_{x\to e}\frac{1-ln(x)}{e^x-\sqrt{e}}$ [0, No F.I.] $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+ln(x)}{e^{2x}-ln(x^2)}$ [0] $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\cdot tan^{-1}(x)-\pi}{e^{-4x}+1}$ [0]

63. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{tan^{-1}(x^2)}$ [$+\infty$, No F.I.] $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{2x}}{x+\ln(x^2)}$ [0, No F.I.] $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x+ln(x^2)}$ [$+\infty$]

64. $\lim\limits_{x\to2}\frac{e^x-e^2}{tan(x-2)}$ [e^2] $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{sin(x^4-2x+1)}$ [–1] $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin^{-1}(x)}{x}$ [1] $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin^{-1}(x)}{sin(x)}$ [1]

Livello 2

65. $\lim\limits_{x\to0}\frac{ln[cos(3x)]}{4\cdot sin(3x)-6\cdot sin(8x)}$ [0] $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x+ln(x^2)}{5x+ln(3x^3)}$ [7/5]

66. $\lim\limits_{x\to0}\frac{ln(2+x)}{sin(x+1)+(x+1)\cdot cos(x)}$ $\left[\frac{ln(2)}{sin(1)+1}, \text{No F.I.}\right]$ $\lim\limits_{x\to3}\frac{ln(10-x^2)}{1-cos(x-3)+2x\cdot sin(x^2-9)}$ [–1/6]

67. $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{ln\left(1+\sqrt{x-2}\right)}{(x-1)\cdot sin(x^3-8)}$ [$+\infty$] $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cdot ln(x+3)}{\sqrt{x^3-17x+1}}$ [0] $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{e^{-x}+1}}{5x^4-x-12}$ [$+\infty$]

68. $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{tan\left(x+\frac{\pi}{2}-1\right)}$ [$-\infty$] $\lim\limits_{x\to4^-}\frac{cot\left(1-\sqrt{x-3}\right)}{e^{\frac{x}{x-4}}}$ [∞] $\lim\limits_{x\to5}\frac{sin\left(\sqrt{x-4}-1\right)}{x\cdot ln(x^2-24)}$ [1/100]

69. $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x\cdot ln(x^2)}{sin\left(\sqrt{2x-1}-1\right)}$ [6] $\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-1)^5-1}{ln(x^2-3)}$ [5/4] $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{sin\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{(x^2-1)^2}$ [$+\infty$]

70. $\lim\limits_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)}{sin(x^2-x-6)}$ [1/20] $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin^{-1}(x)-x}{x-tan^{-1}(x)}$ [½] $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^3-1}{sin(2x)}$ [3/2]

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare il seguente $\lim_{x\to 0^+} x^x$, che risulta una forma indeterminata 0^0. Non possiamo applicare il teorema di de L'Hôpital–Bernoulli. Però possiamo scrivere $\lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\cdot ln(x)}$. In questo modo dobbiamo calcolare un limite del tipo $0 \cdot \infty$, che può anche scriversi: $\lim_{x\to 0^+} x\cdot ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{\frac{1}{x}}$, che è forma indeterminata a cui può applicarsi il teorema. Si ha perciò: $\lim_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\cancel{x}}}{-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$. Infine $\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$.

Trasformando le forme indeterminate in modo da utilizzare il teorema di de L'Hôpital – Bernoulli calcolare i seguenti limiti

Livello 2

71. $\lim_{x\to -\infty} e^{-x}\cdot x$ [–∞] $\quad lim_{x\to 0} sin^{-1}(x)\cdot ln(x)$ [0] $\quad lim_{x\to 0^+} ln(x)\cdot sin(x)$ [0]

72. $lim_{x\to +\infty}\left[e^x - \sqrt{x}\right]$ [+∞] $\quad lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+2}\right)^{5x+3}$ [e^5] $\quad lim_{x\to 0^+}\left[sin(x)\right]^{ln(x)}$ [+∞]

73. $lim_{x\to 2^+}\left[\sqrt{x-2}\cdot tan\left(\frac{\pi}{x}\right)\right]$ [+∞] $\quad lim_{x\to 1} sin^{-1}(x)\cdot tan^{-1}(\pi x)$ [π·tan^{-1}(π)/2 No F.I.]

74. $lim_{x\to 0^+}\left[ln(x)\right]^{sin(x)}$ [1] $\quad \lim_{x\to +\infty} x^x$ [+∞, No F.I.] $\quad lim_{x\to\infty}\frac{e-(1+1/x)^x}{ln(x)}$ [0]

75. $lim_{x\to \pi/2^+}\left[\sqrt{2x-\pi}\cdot tan(x)\right]$ [–∞] $\quad lim_{x\to 0^+} cot(x)\cdot ln(x)$ [–∞] $\quad lim_{x\to 1^+}\left(\frac{5x^2+3x-1}{x^2+x+5}\right)^{ln(x-1)}$ [1]

76. $lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sin(x)}-\frac{1}{x}\right)$ [0] $\quad lim_{x\to 1^+}\left(x^2-1\right)\cdot tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ [–4/π] $\quad lim_{x\to 2^+} ln(x-1)\cdot ln(x-2)$ [0]

77. $lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ [1] $\quad lim_{x\to 1^+}\left[\left(\frac{1}{sin(x-1)}-\frac{1}{ln(x)}\right)\right]$ [– ½] $\quad lim_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}-1}$ [*ln*(2)/*ln*(3)]

78. Usando il teorema di de L'Hôpital–Bernoulli provare che e^x è infinito di ordine superiore a x^n, per x che tende a + ∞ e per ogni n reale.

79. Usando il teorema di de L'Hôpital–Bernoulli provare che x è infinito di ordine superiore a $ln(x)$, per x che tende a + ∞.

Livello 3

80. $lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}, n\neq 0, a\neq 0$ $\left[\frac{m}{n}\cdot a^{m-n}\right]$ $\quad lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}, m\neq 0$ [m] $\quad lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{b^{\frac{1}{x}}-1}$ $\left[\frac{ln(a)}{ln(b)}\right]$

81. $lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x^2}, m\neq 0$ $\left[\begin{cases}+\infty & m>0\\ -\infty & m<0\end{cases}\right]$ $\quad lim_{x\to +\infty} x^n\cdot sin\left(\frac{a}{x}\right), n>0, a\neq 0$ $\left[\begin{cases}+\infty & n>0, a>0\\ -\infty & n>0, a<0\\ 0 & n<0\end{cases}\right]$ $\quad lim_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{n}{x}}-1}$ $\left[\frac{1}{n}\right]$

Stabilire se possiamo calcolare i seguenti limiti usando il teorema di de L'Hôpital–Bernoulli. Giustificare le risposte, calcolando in ogni caso il limite.

82. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)}{sin(x)}$ [No; 0] $\lim_{x\to\infty}\frac{x-sin(x)}{x+sin(x)}$ [No; 1]

83. Se non esiste il limite del rapporto delle derivate possiamo dire che non esiste neanche il limite del rapporto delle funzioni? Giustificare la risposta. [No]

Lavoriamo insieme

Vogliamo sviluppare e^{2x} in forma polinomiale di Mac Laurin. Noi conosciamo quella di e^x, che è $e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$. Possiamo semplicemente sostituire $2x$ al posto di x? Sì perché e^{2x} è continua e derivabile, così come lo è $2x$. Abbiamo quindi:

$$e^{2x}\approx 1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3!}+...+\frac{(2x)^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2x)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k x^k}{k!}$$

Quindi possiamo trovare un valore approssimato con una precisione per esempio di 10^{-3}, cioè con 3 cifre decimali esatte.

Abbiamo: $e^2\approx\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k}{k!}$ costruiamo la tabella seguente

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
e^2	3	5	≈6,3333	7	≈7,2666	≈7,3555	≈7,3809	≈7,3873	≈7,3887	≈7,3889

Poiché al decimo passo le prime 3 cifre decimali possiamo dire con alta probabilità che esse siano esatte, quindi $e^2 \approx 7{,}388$.

Sviluppare con i polinomi di Mac Laurin le seguenti funzioni

Livello 2

84. e^{-x}; e^{3x}; $e^{\sqrt{x}}$; e^{x^2}; $sin(2x)$; $sin(3x)$; $sin(x/2)$; $sin\left(\sqrt{x}\right)$

85. $cos(2x)$; $cos(x/3)$; $cos(x^2)$; $cos\left(\sqrt[3]{x}\right)$; $ln(2x)$; $ln(x/4)$; $ln(x^2)$; $ln\left(\sqrt{x}\right)$

86. $tan^{-1}(2x)$; $tan^{-1}(x/2)$; $tan^{-1}(x^3)$; $tan^{-1}\left(\frac{x^2+1}{2}\right)$; e^x+e^{-x}; $sin(x)-cos(x)$

Livello 3

87. $sinh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ (Seno iperbolico) $cosh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ (Coseno iperbolico)

Determinare approssimazioni dei seguenti numeri usando il polinomio di Mac Laurin con una precisione di 10^{-3}

Livello 2

88. e^3 [20,085] $\sqrt{e}$ [1,648] e^{-1} [0,367] $sin(1)$ [0,841]

89. $sin(2)$ [0,909] $sin\left(\sqrt{2}\right)$ [0,987] $cos(2)$ [–0,416] $cos\left(\sqrt{3}\right)$ [–0,160]

90. $cos(½)$ [0,887] $ln(2)$ [0,693] $ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ [0,881] $ln(1/5)$ [–1,609]

91. $tan^{-1}(3)$ [1,249] $tan^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$ [0,955] $tan^{-1}(2/3)$ [0,588]

Livello 3

92. $\sqrt{3}$ [1,732] $\sqrt[3]{2}$ [1,259] $\sqrt[5]{17}$ [1,762] $2^{\sqrt{2}}$ [2,665] π^2 [9,869] $\left(\sqrt{3}\right)^{1,2}$ [1,933]

Usando il polinomio di Mac Laurin calcolare i seguenti limiti.

93. $\lim_{x\to 0}\frac{sin(2x)}{3x}$ [2/3] $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x^2}$ [+∞] $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+4x)}{3x}$ [4/3] $\lim_{x\to 0}\frac{tan^{-1}(x)}{2x}$ [½] $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x^2)}{ln(1+3x^2)}$ [1/3]

94. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{tan^{-1}(2x)}$ [3/2] $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{sin(3x^2)}$ [1/3] $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+\sqrt{x})}{tan^{-1}(1+\sqrt[3]{x})}$ [0] $\lim_{x\to 1}\frac{tan^{-1}(1-x)}{e^x-e}$ [–1]

Determinare i polinomi $p(x)$ di grado n tale che valga quanto detto. Suggerimento: scrivere il polinomio con coefficienti generici, quindi applicare le condizioni e risolvere il sistema ottenuto

Livello 2

95. $n = 2; p(0) = 1, p'(0) = 1, p''(0) = 1$ [$1/2x^2 + x + 1$]

96. $n = 3; p(0) = 1, p'(0) = 1, p''(0) = 1, p'''(0) = 1$ [$1/6x^3 + 1/2x^2 + x + 1$]

97. $n = 3; p(0) = 0, p'(1) = 1, p''(-1) = 1, p'''(0) = 1$ [$1/6x^3 + x^2 - 3/2x + 1$]

98. $n = 4; p(0) = 1, p'(0) = 0, p''(0) = -1, p'''(0) = 0, p^{IV}(0) = 1$ [$1/24x^4 - 1/2x^2 + 1$]

Determinare il grado di molteplicità degli zeri dati, rispetto ai polinomi P(x)

99. $x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1; x = 1$ [2]
100. $x^6 - 3x^5 + 10x^3 - 15x^2 + 9x - 2, x = 1$ [5]
101. $x^7 - x^6 - 21x^5 + 5x^4 + 160x^3 + 72x^2 - 432x - 432, x = 3$ [3]
102. $x^7 - x^6 - 21x^5 + 5x^4 + 160x^3 + 72x^2 - 432x - 432, x = -2$ [4]
103. $x^6 + 10x^5 + 41x^4 + 88x^3 + 104x^2 + 64x + 16, x = -1$ [2]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Possiamo dire che se $f(x)$ è una funzione continua in $[a; b]$ tale che si abbia $f(x_0) = 0$, per $x_0 \in [a; b]$, allora $|f(x)|$ non è derivabile in x_0? Giustificare la risposta. [Sì]
2. Osserviamo che $sin(x)$ è una funzione dispari e la sua derivata, $cos(x)$ è una funzione pari. Analogamente la derivata della funzione pari $cos(x)$ è la funzione dispari – $sin(x)$. Possiamo dire che è sempre vero che la derivata di una funzione pari è dispari e viceversa? Giustificare la risposta. [Sì]
3. Sempre con riferimento all'esercizio precedente sia $sin(x)$ che $cos(x)$ sono funzioni periodiche. Possiamo dire che la derivata di una funzione periodica e derivabile è ancora periodica? E il periodo della derivata è lo stesso della funzione? Giustificare la risposta. [Sì]
4. Sia f una funzione che verifica le proprietà: $f(1) = 3$, $f(3) = 1$, $f'(1) = -4$ e $f'(3) = 2$. Determinare la pendenza della retta tangente alla funzione $g(x)=\frac{1}{f^{-1}(x)}$, per $x = 1$. [–1/18]
5. Calcolare la derivata ennesima di $x^3 \cdot e^x$. [$e^x \cdot [x^3 + 3n \cdot x^2 + 3n \cdot (n-1) \cdot x + n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$]
6. Calcolare la derivata ennesima di $x^2 \cdot sin(x)$. $\left[\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}+1}\cdot\left\{\left(n^2-n-x^2\right)\cdot sin(x)+2n\cdot x\cdot cos(x)\right\} & n\ pari\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\left\{\left(x^2-n^2+n\right)\cdot cos(x)+2n\cdot x\cdot cos(x)\right\} & n\ dispari\end{cases}\right]$
7. A una classe di funzioni continue e derivabili dappertutto non è possibile applicare il teorema di Rolle in nessun intervallo, dire quali sono e motivare la risposta. [Funzioni iniettive]
8. Per quali funzioni il teorema della media di Lagrange ha come valore medio il punto medio dell'intervallo $(a; b)$? [Polinomi di II grado]
9. Per quali funzioni il teorema della media di Cauchy ha come valore medio il punto medio dell'intervallo $(a; b)$?
[Uno almeno dei due polinomio di II grado, l'altro polinomio al massimo di II grado]
10. Una massa di 1 Kg è sospesa all'estremo di una molla ed oscilla seguendo la legge $x = 2\ cos(\omega t)$, sapendo che la costante elastica della molla è 0,25 N/m, determinare ω. Un dato non è necessario, quale?
[$\omega = 0{,}5\ rad/s$; l'ampiezza di oscillazione (2)]

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi
I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito
http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

1. (Liceo scientifico 1992/93) Sia $f(x)=\begin{cases} -3x^2+Hx & x\le 1 \\ \dfrac{K}{x^2} & x>1 \end{cases}$. Determinare le costanti H e K in modo che la funzione $y = f(x)$ e la sua derivata siano continue in $x = 1$. [$H = 4$, $K = 1$]
2. (Liceo Scientifico 2000/2001) Si consideri la funzione $\dfrac{x+sin(x)}{x-cos(x)}$. Stabilire se si può calcolarne il limite per $x\to+\infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di de L'Hôpital. [1; No, perché non esiste il limite del rapporto delle derivate]
3. (Liceo Scientifico 2001/2002) In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva k di equazione $y = f(x)$, dove è: $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^3+2}$. a) determinare per quali valori di x essa è situata nel semipiano $y > 0$ e per quali nel semipiano $y < 0$. $\left[+: x>-\sqrt[3]{2}; -: x<-\sqrt[3]{2}\right]$ b) Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, sapendo che essa incide ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa –1. (*N.B. : si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti le due curve in quel punto sono perpendicolari*). [$y = -34/11x^2 - 67/11x$] c) Stabilire se la retta tangente alla curva k nel punto di ascissa –1 ha in comune con k altri punti oltre a quello di tangenza. [No] d) Determinare per quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x. [2] e) Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione $f(x)$ assegnata, relativamente all'intervallo $-\sqrt{2}\le x\le 0$. [No]
4. (Liceo Scientifico 2001/2002) La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato [1; 3] e derivabile nell'intervallo aperto (1; 3). Si sa che $f(1) = 1$ e inoltre $0\le f'(x)\le 2$ per ogni x dell'intervallo (1; 3). Spiegare in maniera esauriente perché risulta $1\le f(3)\le 5$. (Sugg. Usare il T. di Lagrange)
5. (Liceo Scientifico PNI 2001/2002) Utilizzando il teorema di Rolle, si verifichi che il polinomio x^n+px+q $(p,q\in\mathbb{R})$, se n è pari ha al più due radici reali, se n è dispari ha al più tre radici reali.

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente problema, assegnato agli esami di stato del Liceo scientifico nell' a.s. 2003/2004. Dimostrate che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione reale.
Se consideriamo la derivata prima essa è ovviamente sempre positiva, dato che è $e^x + 3$. Del resto si ha per esempio $e^{-1} - 3 < 0$ e $e^0 = 1 > 0$, quindi per il teorema di esistenza degli zeri l'equazione ha almeno una soluzione compresa tra – 1 e 0. Per quanto detto prima la soluzione è unica. Con un metodo a piacere, per esempio quello di bisezione si trova che la detta soluzione è ≈ –0,257

6. (Liceo Scientifico PNI 2001/2002) Verificare che la funzione $3x + log(x)$ è strettamente crescente. Detta g la funzione inversa, calcolare $g'(3)$. [¼]
7. (Liceo Scientifico PNI 2002/2003) Dare un esempio di polinomio $P(x)$ il cui grafico tagli la retta $y = 2$ quattro volte. [$(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)\cdot(x-d)+2$, a; b, c, d reali distinti]
8. (Liceo Scientifico PNI 2002/2003) Dimostrare, usando il teorema di Rolle, che se l'equazione: $x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1} + \ldots + a_1\cdot x + + a_0 = 0$, ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione: $n\cdot x^{n-1} + (n-1)\cdot a_{n-1}\cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 = 0$.
9. (Liceo Scientifico PNI 2002/2003) Si vuole che l'equazione $x^3 - b\cdot x - 7 = 0$ abbia tre radici reali.

Quale è un possibile valore di b? $\left[b < -3\cdot\sqrt[3]{\frac{49}{4}}\right]$

10. (Liceo Scientifico PNI 2002/2003) Verificare che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati. [≈ 0,347]
11. (Liceo Scientifico 2002/2003) La funzione $2x^3 - 3x^2 + 2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo. [Negativa]
12. (Liceo Scientifico 2002/2003) È assegnata la funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+m+|m|}$, dove m è un parametro reale. a) Determinare il suo dominio di derivabilità. [$x \neq 0$, $m \leq 0$] b) Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x = 1$. [$m = 1$]
13. (Liceo Scientifico 2003/2004) Verificate che le due funzioni $f(x) = 3ln(x)$ e $g(x) = ln(2x)^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date? [Differiscono di una costante]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il problema assegnato agli esami di stato del Liceo Scientifico nell' a.s. 2004/2005.

Si consideri la funzione f definita sull'intervallo $[0;+\infty[$ da: $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\frac{1}{2}x^2\cdot[3-2ln(x)]+1 \quad se \quad x>0 \end{cases}$ e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico. Si stabilisca se f è *continua* e *derivabile* in 0.

Verifichiamo la continuità, come si nota dal grafico. $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2}x^2\cdot[3-2ln(x)]+1\right)$ abbiamo una forma indeterminata 0 · ∞, trasformiamola in una ∞/∞, in modo da potere applicare il Teorema di De L'Hôpital: $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3-2ln(x)}{\frac{2}{x^2}}+1\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-\frac{\cancel{2}}{\cancel{x}}}{-\frac{\cancel{4}^{2}}{x^{\cancel{3}^{2}}}}+1\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{2}+1\right) = 1 = f(0)$. La funzione è continua in 0.

Passiamo alla derivabilità. $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{2}x^2\cdot[3-2ln(x)]+\cancel{1}-\cancel{1}}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}x\cdot[3-2ln(x)] = 0$, abbiamo usato il precedente limite. Quindi la funzione è anche derivabile a destra per $x = 0$ e la sua derivata è 0.

14. (Liceo scientifico 2004/2005) Si consideri la funzione f definita sull'intervallo [0; + ∞[da: $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\frac{1}{2}x^2[3-2log(x)]+1 \quad se\, x>0 \end{cases}$ e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, su [0, +∞) un'unica radice reale. [≈ 4,69]
15. (Liceo scientifico PNI 2006/2007) Si dimostri che l'equazione $2x^3-3x^2+6x+6=0$ ha un'unica radice reale e si trovi il valore con una precisione di due cifre significative. [–0,69]
16. (Liceo Scientifico 2004/2005) Si dimostri che la curva $y = x \cdot sin(x)$ è tangente alla retta $y = x$ quando $sin(x) = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $sin(x) = -1$.
17. (Liceo Scientifico 2004/2005) Se $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$ per quanti numeri reali k è $f(k) = 2$? Si illustri il ragionamento seguito. [0]
18. (Liceo Scientifico PNI 2004/2005) Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni pa-

rametriche $x = e^t + 2$ e $y = e^{-t} + 3$ nel suo punto di coordinate (3; 4). [$x = 3 + t$, $y = 4 - t$]

19. (Liceo Scientifico 2005/2006) La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di Lagrange nell'intervallo [0,1]? Se si, trova il punto che compare nella formula. [1/3]

20. (Liceo Scientifico PNI 2005/2006) Si dimostri che l'equazione $sin(x) = x - 1$ ha una e una sola radice α e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare α con la precisione voluta. [≈ 1,93]

21. (Liceo Scientifico 2006/2007) Si mostri che la funzione $y = x^3 + 8$ soddisfa le condizioni del teorema del valor medio (o teorema di Lagrange) sull'intervallo [–2; 2]. Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico. [4]

22. (Liceo Scientifico suppletiva 2006/2007) Sia la funzione: $f(x) = \begin{cases} x \cdot tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Si dica se essa `e continua e derivabile nel punto di ascissa 0. [Continua, non derivabile]

23. (Liceo Scientifico PNI 2007/2008) Si esponga la regola del marchese de L'Hôpital (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^{2008}}{2^x} = 0$.

24. (Liceo scientifico PNI 2007/2008) Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$. [$\mathbb{R}^+, f', f'' > 0$]

25. (Liceo Scientifico 2008/2009) Per quale o quali valori di k la curva d'equazione $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale? [$k = \pm 3$]

26. (Liceo scientifico 2008/2009) Si provi che l'equazione: $x^{2009} + 2009x + 1 = 0$ ha una sola radice compresa fra –1 e 0.

27. (Liceo scientifico 2010/2011) Si provi che l'equazione $x^{2011} + 2011x + 12 = 0$ ha una sola radice compresa tra –1 e 0.

28. (Liceo scientifico PNI 2010/2011) Sia $f(x) = x + ln(4) + \dfrac{2}{e^x + 1}$. Si provi che, per tutti i reali m, l'equazione $f(x) = m$ ammette una e una sola soluzione in $\mathbb{R}$. Sia α soluzione dell'equazione $f(x) = 3$; per quale m, $(-\alpha)$ è soluzione dell'equazione $f(x) = m$? [$2ln(4) - 1$]

29. (Liceo Scientifico PNI 2010/2011) Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da: $f(x) = x^3 - 16x$, $g(x) = sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di f e g sull'intervallo [0; 4]. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di R con le rette $y = -15$ e $y = -5$, l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie dell'acqua. Si calcolino le ascisse di tali punti (è sufficiente un'approssimazione a meno di 10^{-1}). $\left[\left(1; \dfrac{\sqrt{61}-1}{2}\right), (0,3; 3,8)\right]$

30. (Liceo Scientifico 2010/2011) Si calcoli $\lim_{x \to a} \dfrac{tan(x) - tan(a)}{x - a}$. $\left[\dfrac{1}{cos^2(a)}\right]$

31. (Liceo Scientifico 2011/2012) Si scrivano le equazioni delle rette r e s tangenti, rispettivamente, a $f(x) = |27x^3|$ e $g(x) = sen(3/2\pi x)$ nel punto di ascissa $x = 1/3$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da r e da s? [$y = 9x - 2$; $y = 1$; ≈ 83°39'35"]

32. (Liceo Scientifico 2011/2012) Cosa rappresenta $\lim_{h \to 0} \dfrac{5 \cdot \left(\dfrac{1}{2} + h\right)^4 - 5 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^4}{h}$ e qual è il suo valore?
[Derivata della funzione $5x^4$ in $x = ½$; 5/2]

33. (Liceo Scientifico 2011/2012) La posizione di una particella è data da $s(t) = 20 \cdot \left(2 \cdot e^{-\frac{t}{2}} + t - 2\right)$. Qual

è la sua accelerazione al tempo $t = 4$? [$a(4) = 10 \cdot e^{-2}$]

34. (Liceo Scientifico 2011/2012) Si calcoli $f'(x)$, per $f(x) = 5sin(x) \cdot cos(x) + cos^2(x) - sin^2(x) - 5/2sin(2x) - cos(2x) - 17$. [0]

35. (Liceo Scientifico 2011/2012) Qual è il valor medio di $f(x) = 1/x$ da $x = 1$ a $x = e$? $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$

36. (Liceo Scientifico PNI 2011/2012) Sia $f(x) = 3^x$. Per quale valore di x, approssimato a meno di 10^{-3}, la pendenza della retta tangente alla curva nel punto $(x, f(x))$ è uguale a 1? [≈ –0,0856]

37. (Liceo Scientifico PNI 2012/2013) Se la funzione $f(x) - f(2x)$ ha derivata 5 in $x = 1$ e derivata 7 in $x = 2$, qual è la derivata di $f(x) - f(4x)$ in $x = 1$? [19]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

AK = Arkansas State University

HSMC = University High School Mathematics Contest

CEEB = College Entrance Examination Board

RICE = Rice University Mathematics Tournament

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato agli HSMC del 2004.

Supponiamo che f sia una funzione derivabile tale che si abbia $f(x + y) = f(x) + f(y) + 5xy$ per ogni x e y reali inoltre sia $f'(0) = 3$. Trovare $f'(x)$.

Possiamo scrivere $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) + 5(0)(0) = 2 \cdot f(0)$, ciò significa che si ha $f(0) = 0$.

Calcoliamo $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 3$.

Adesso calcoliamo $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) + \cancel{f(x)} + 5 \cdot x \cdot h - \cancel{f(x)}}{h}$. Abbiamo sostituito ad $f(x + h)$ la sua espressione mediante quanto detto nel testo del quesito, in cui $y = h$.

Possiamo allora scrivere: $f'(0) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(h)}{h} + \frac{5x \cdot \cancel{h}}{\cancel{h}} \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(h)}{h} + 5x \right) = 3 + 5x$.

1. (HSMC 2003) Determinare il minimo valore di k per cui la retta di equazione $y = x$, incontra la curva di equazione $y = e^{\frac{x^2}{k}}$. [$2e$]

2. (HSMC 2003) Determinare le ascisse di tutti i punti della funzione $f(x) = \frac{x}{x+1}$, la cui tangente passa anche per (1; 2). $\left[-2 \pm \sqrt{3}\right]$

3. (HSMC 2004) Sia f una funzione derivabile tale che $f(x + y) = f(x) + f(y) + 5xy$ $\forall$ x e y e $f'(0) = 3$. Calcolare $f'(x)$. [$3 + 5x$]

4. (HSMC 2005) Se gonfiamo una palla sferica a un tasso di 16 cm^3 al secondo, a che tasso aumenta il raggio quando è 4 cm? [$1/(4\pi)$]

5. (Rice 2006) Chiamiamo tangente iperbolica la funzione $tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, calcolare $\frac{d}{dx} tanh^{-1}\left[tan(x)\right]$. [$sec(2x)$]

6. (Rice 2008) Determinare il valore della n–esima derivata di $f(x) = sin^n(x)$, in $x = 0$. [$n!$]

7. (HSMC 2008) Sia una funzione f che verifica $f(x + y) = f(x) + f(y) + 3x^2y + 3xy^2 + 2xy$ e $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. Calcolare $f'(x)$. [$3x^2 + 2x$]

Lavoriamo insieme

Ecco un quesito degli HSMC del 2002.
Sia la funzione $f(x) = (x^2 + 4x + 5)^2$, qual è il minimo intero positivo n per cui $f'(n) > 2002$?
La richiesta equivale alla risoluzione della seguente disequazione
$2 \cdot (2n + 4) \cdot (n^2 + 4n + 5) > 2002 \Rightarrow 2 \cdot (n + 2) \cdot [(n + 2)^2 + 1] > 1001 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \cdot (n + 2)^3 + 2 \cdot (n + 2) > 1001 \Rightarrow (n + 2)^3 + (n + 2) > 500{,}5$
Deve perciò essere $(n + 2)^3 > 500$, dato che $n + 2$ è piccolo in confronto con $(n + 2)^3$. Il minimo n per cui accade è 6 (dato che $8^3 = 512$); verifichiamo che 5 non verifica la richiesta, quindi il minimo è proprio 6.

8. (Rice 2008) Calcolare $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!}$. Sugg. Moltiplicare per 2 e osservare che il termine generale è derivata ennesima di …. [½ · e^2]
9. (HSMC 2008) Trovare la derivata di ordine 2008 di $f(x) = x^{2007} \cdot ln(x)$. [$2007!/x$]
10. (AK 2008) Se $x^n + y^n = 1$, per qualche numero reale non nullo n, calcolare y''. $\left[(1-n)\cdot\frac{x^{n-2}}{y^{2n-1}}\right]$
11. (HSMC 2009) Sia una funzione tale che si abbia $f(1) = 3$, $f(3) = 1$, $f'(1) = -4$ e $f'(3) = 2$. Determinare la pendenza della tangente a $\frac{1}{f^{-1}(x)}$ in $x = 1$. [–1/18]
12. (HSMC 2009) Calcolare la derivata 50–esima di $f(x) = \frac{x^{50}}{1-x}$ in $x = 0$. [50!]
13. (Rice 2010) Calcolare $\lim_{t\to 0}\left[tan^{-1}\left(\frac{1}{x+t}\right) - tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$. $\left[-\frac{1}{1+x^2}\right]$
14. (AK 2010) $y(x)$ verifica l'equazione $ln(x + y) - e^{2xy} + 1 = 0$. Calcolare $y'(0)$. [1]
15. (HSMC 2011) Determinare la somma di tutti i numeri c che rendono la seguente funzione derivabile in $x = 1$: $f(x) = \begin{cases} x^2 + c^2 \cdot x - 1 & x \le 1 \\ c \cdot x^2 + 5x + 1 & x > 1 \end{cases}$. [3]

Questions in english

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2002.
Suppose that f and g are differentiable[1] functions such that $f(0) = 3$, $f'(0) = 2$, $g(0) = 7$, and $g'(0) = -1$. Assuming that the function h given by $h(x) = f(x)=g(x)$ is well–defined and differentiable everywhere, what is the value of $h'(0)$?
By the Quotient Rule, we have $h'(0) = \frac{f'(0)\cdot g(0) - f(0)\cdot g'(0)}{[g(0)]^2} = \frac{2\cdot 7 - 3\cdot(-1)}{7^2} = \frac{17}{49}$.

16. (HSMC 2000) Let $f(x)$ be a differentiable function and suppose a is a real number such that $f(a) > 0$ and $f'(a) > 0$: Let P be the point $(a; f(a))$; let Q be the point $(a; 0)$ and let R be the point where the tangent line to the graph of $f(x)$ at P intersects the x–axis. Give a formula for the area of the triangle with vertices PQR. $\left[\frac{[f(a)]^2}{2\cdot f'(a)}\right]$
17. (HSMC 2001) Find $f'(0)$ if $f(x) = x + f(-x)$ for all x. [½]

[1] derivabili

18. (HSMC 2001) Let f be infinitely differentiable and suppose that $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n^2}{n^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Find $f^{IV}(0)$. [24]

19. (HSMC 2001) Suppose that $g(x)=f\left\{x^3+f\left[x^2+f(x)\right]\right\}$, where $f(1) = 1$; $f(2) = 2$; $f'(1) = 1$; $f'(2) = 2$ and $f'(3) = 3$. Then $g'(1)$ is? [27]

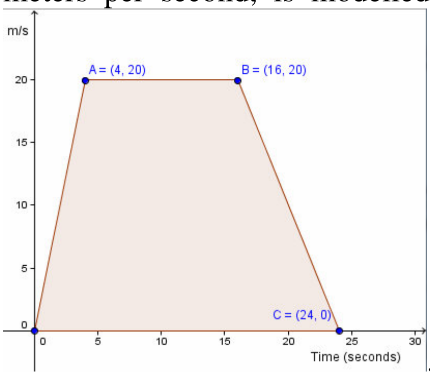
20. (HSMC 2002) The tangent line to the graph of the equation $y = x^2 + 7x + 11$ at the point (3; 41) crosses the y-axis at the point (0; a), where a is a real number. What is the value of a? [2]

21. (HSMC 2002) Define a function f by $f(x)=\frac{x^{2002}-1}{x-1}$, for all $x \neq 1$. Compute the limit $\lim_{x\to 1} f'(x)$. [2003001]

22. (HSMC 2003) Let f and g be differentiable functions with some values of the functions and their derivatives given in the chart below. What is the derivative of $f[g(x)]$ at $x = 2$? [16]

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	4	3	1
$f'(x)$	4	3	2	1
$g(x)$	3	1	4	2
$g'(x)$	2	4	1	3

23. (CEEB 2005) A car is travelling on a straight road. For $0 \le t \le 24$ seconds, the car's velocity $v(t)$, in meters per second, is modelled by the piecewise-linear function defined by the following graph



. a) For each of $v'(4)$ and $v'(20)$, find the value or explain why it does not exist. [$v'(4)$ does not exist; $v'(20) = -5/2\ m/s^2$] b) Let $a(t)$ be the car's acceleration at time t, in m/s^2, For $0 < t < 24$, write a piecewise-defined function for $a(t)$. $\left[a(t)=\begin{cases}5 & 0<t<4\\ 0 & 4<t<16\\ -5/2 & 16<t<24\end{cases}\right]$ c) Find the average rate of change of v over the interval $8 \le t \le 20$. Does the Mean Value Theorem guarantee a value of c, for $8 < c < 20$, such that $v'(c)$ is equal to this average rate of change?

[– 5/6 m/s^2; The MVT does not apply in [8,20]]

24. (HSMC 2006) Find all values of the parameter a, if any, such that the smallest value of the function $y = x^2 + (a + 4)x + 2a + 3$ in the interval [0,2] is equal to –4. [–3,5]

25. (AK 2008) If $f(x)=\frac{2}{x}, g(x)=\frac{x}{x^2+1}$, compute D[$f[g(x)]$]. $\left[\frac{2x^2-2}{x^2}\right]$

26. (AK 2009) Let y be a function of x which satisfies $ln(x + y) - 2xy = 0$ and $y(0) = 1$. Find $y'(0)$. [1]

27. (AK 2010) For what values of a and b will $f(x)=\begin{cases}ax & x<2\\ ax^2-bx+3 & x\ge 2\end{cases}$ be differentiable for all values of x? [a = ¾; b = 9/4]

28. (Rice 2011) Tangent lines are drawn at the points of injection for the function $f(x) = cos(x)$ on [0; 2π]. The lines intersect with the x–axis so as to form a triangle. What is the area of this triangle? [$\pi^2/4$]

29. (HSMC 2011) Let $h(x) = x \cdot f^{-1}(x)$. Use the table of values below to find $h'(5)$. [11/2]

x	$f(x)$	$f'(x)$
2	4	–1
3	5	2
5	1	3

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Odontoiatria 1997) La derivata prima della funzione $f(x)= x \cdot (3x - 2)$ è:
   A) $3x - 2$ B) $6x - 2$ C) $-2x$ D) x E) nessuna delle risposte proposte e' corretta
2. (Medicina 1997) La derivata della funzione $f(x)= 5x + 2ln(x)$ è:
   A) $5 + 2x$ B) $2/x$ C) $5 + 2 \cdot ln(x)/x$ D) $5+2/x$ E) nessuna di quelle delle precedenti risposte

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_3_2.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**
B	**D**

10. Il calcolo differenziale

10.2 Rappresentazione grafica delle funzioni

Prerequisiti
- Sistema di riferimento cartesiano ortogonale
- Rappresentazione grafica di semplici funzioni
- Concetto di dominio e codominio di una funzione
- Concetto di infinito
- Gli insiemi numerici fondamentali e le loro proprietà
- Concetto di derivabilità
- Regole del calcolo differenziale

Obiettivi
- Riuscire a rappresentare in modo qualitativo una funzione
- Riuscire a stabilire l'andamento di una curva anche in punti singolari
- Risolvere problemi di massimo e minimo

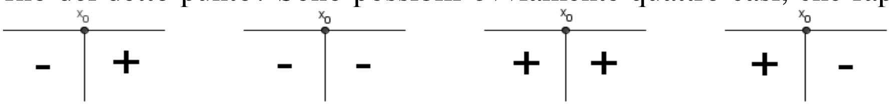
Contenuti
- Estremi relativi di una funzione
- Rappresentazione grafica di una funzione

Parole chiave
Asintoto obliquo – Concavità – Convessità – Estremo relativo – Flesso

Estremi relativi di una funzione

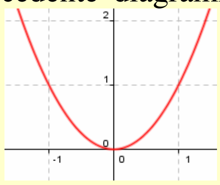
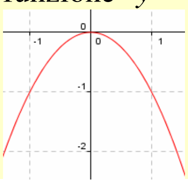
Il problema

Abbiamo visto che laddove la derivata prima è positiva la funzione cresce, dove è negativa decresce. Cosa accade dove è nulla?

Il Teorema 2 dell'unità 10.1 ci dice cosa accade quando la derivata di una funzione è positiva o negativa. Cosa potrebbe accadere quando la derivata prima è nulla? Dobbiamo distinguere due casi. Se la derivata prima è nulla in un intero intervallo, il Corollario 10 della citata unità afferma che la funzione è costante. Cosa accade invece se la funzione ha derivata prima solo in $x = x_0$ ed è diversa da zero e ovviamente esiste in un intorno del detto punto? Sono possibili ovviamente quattro casi, che rappresentiamo nei seguenti diagrammi 

Cosa accade in ciascuno di questi casi?

Esempio 1

Consideriamo la funzione $y = x^2$, la sua derivata prima è $2x$, che si annulla per $x = 0$, è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. Siamo quindi nel caso rappresentato per quarto nel precedente diagramma. Poiché abbiamo a che fare con una parabola facilmente rappresentiamo la curva. 
Il punto è ovviamente il vertice ed è anche il minimo assoluto della funzione. Noi però dobbiamo concentrarci solo nell'intorno di zero. Localmente il punto di ascissa zero è perciò il minimo nel suo intorno. Non è difficile capire che ciò accade per tutte le funzioni che hanno questo diagramma del segno della derivata prima.
Così come non è difficile capire che il caso rappresentato dal diagramma, che ovviamente si ha per la funzione $y = -x^2$, è esattamente il contrario, cioè il punto stavolta è un massimo nell'intorno.


Sulla base del precedente esempio poniamo alcune definizioni.

Definizione 1

Un punto $P \equiv (x_0; f(x_0))$, per la funzione $y = f(x)$, si dice di
- **minimo relativo** se esiste $I_r(P)$, in cui $f(x_0) \le f(x)$, $\forall\, x \in I_r(P)$;
- **massimo relativo** se esiste $I_r(P)$in cui $f(x_0) \ge f(x)$, $\forall\, x \in I_r(P)$;
- **estremo relativo** se è di massimo o di minimo relativo.

Se la funzione è derivabile in x_0 e in un suo intorno, è ovvio che deve accadere quanto riportato dal seguente risultato.

Teorema 1 (di Fermat)

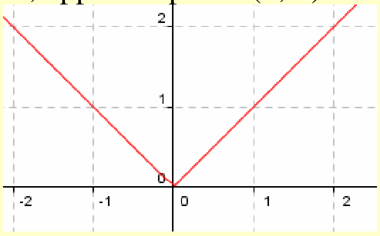
Condizione necessaria affinché la funzione derivabile $y = f(x)$, abbia in $P \equiv (x_0; f(x_0))$ un punto di estremo relativo è che si abbia $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione
Ovvia, dato che un punto di estremo relativo è un punto di cambiamento della crescenza della funzione, che così passa dalla crescenza alla decrescenza (massimo relativo) o dalla decrescenza alla crescenza (minimo).

Prima di far vedere che la precedente condizione non è sufficiente, osserviamo che essa vale ovviamente solo per funzioni derivabili.

Esempio 2

Abbiamo già considerato la funzione $y = |x|$, come esempio di funzione continua ma non derivabile in $x = 0$. Quindi non possiamo applicare il criterio di Fermat, eppure il punto (0; 0) è ovviamente di minimo relativo, addirittura assoluto, per la funzione.



I protagonisti

Pierre de Fermat, nacque il 17 Agosto 1601 a Beaumont-de-Lomagne. Di ricca famiglia, pur studiando legge, si interessò sempre di matematica, tanto da esser definito dallo storico Bell come *il principe dei dilettanti*. Nel 1631 divenne avvocato e ufficiale governativo a Tolosa e perciò, aggiunse il prefisso nobiliare *de* al proprio cognome che era solo *Fermat*. Nonostante la propria attività professionale continuò a effettuare ricerche matematiche autonomamente, corrispondendo con matematici professionisti come Carcavi o Mersenne. In particolare in una lettera a quest'ultimo del 26 Aprile 1636 proponeva due problemi sui massimi delle funzioni (anche se il concetto di funzione non era ancora stabile, non essendo, come abbiamo visto, stabilizzata neanche la geometria analitica). Dato che nessuno riuscì a risolvere i problemi proposti, Fermat mandò loro la propria opera: *Methodus ad disquierendam maximam et minimam*. Questo lavoro non era stato pubblicato e fu causa di molte dispute fra l'autore e parecchi matematici importanti, come Descartes. Nel seguito della sua vita si occupò soprattutto di teoria dei numeri in cui ottenne importanti risultati e propose forse il più noto problema della matematica moderna, chiamato ultimo Teorema di Fermat, secondo il quale l'equazione $x^n + y^n = z^n$ non ha soluzioni intere non nulle per $n > 2$. Solo nel 1994 l'inglese Andrew Wiles riuscì a pubblicare una dimostrazione completa e complicatissima. Dobbiamo ricordare anche la sua corrispondenza con Blaise Pascal, in cui i due posero le basi del moderno Calcolo delle Probabilità. Morì il 12 Gennaio 1665 a Castres.

Il criterio di Fermat non è una condizione sufficiente, dato che possono accadere anche il secondo e terzo caso mostrati nel diagramma. Enunciamo invece una condizione sufficiente.

Teorema 2

Condizione sufficiente affinché la funzione derivabile $y = f(x)$, abbia in $P \equiv (x_0; f(x_0))$ un punto di estremo relativo è che esista un intorno di x_0, in cui la derivata prima è diversa da zero e cambia di segno passando dall'intorno destro al sinistro. In simboli, $\exists\, \delta > 0: f'(x^*)\cdot f'(x°) < 0,\ \forall\, x^* \in (x_0-\delta; x_0),\ \forall\, x° \in (x_0; x_0+\delta)$.

Dimostrazione Per esercizio

Come conseguenza del precedente risultato abbiamo che i punti cuspidali sono punti di estremo relativo.
La condizione precedente non è però necessaria.

Esempio 3

La funzione $f(x) = \begin{cases} 2 & x = 1 \\ 1 & x \neq 1 \end{cases}$, ha per $x = 1$ ovviamente un punto di massimo relativo, e anche assoluto, eppure in qualsiasi intorno di 1, la derivata prima è zero.
La condizione del Teorema 2 non è necessaria neanche se la funzione è derivabile nel punto. Per esempio le funzioni costanti sono derivabili dappertutto e ogni loro punto è perciò da considerarsi sia massimo che minimo relativo e assoluto, ma in nessun intorno di nessun punto vi è un cambio di crescenza.

Vediamo allora di enunciare una condizione necessaria e sufficiente.

Teorema 3

Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $y = f(x)$, derivabile e non costante in X, abbia nel punto $P \equiv (x_0; f(x_0))$, $x_0 \in X$, un punto di massimo (risp. minimo) relativo è che

$$\exists\, \delta > 0: f'(x) > 0,\ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ e } f'(x) < 0,\ \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

$$[\text{risp. } f'(x) < 0,\ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ e } f'(x) > 0,\ \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)]$$

Dimostrazione Per esercizio

Quindi gli estremi relativi di una funzione si cercano fra i punti in cui la derivata prima si annulla, ma anche fra quelli in cui la funzione è continua ma non derivabile.

Esempio 4

Vogliamo determinare gli estremi della funzione $y = sin^2(x) + cos(x) + 1$. Essendo periodica di periodo 2π, la studiamo solo in $[0; 2\pi]$ Calcoliamo la derivata prima: $y'(x) = 2sin(x) \cdot cos(x) - sin(x)$. Annulliamo la derivata: $sin(x) \cdot [2\, cos(x) - 1] = 0$, che ammette le soluzioni $sin(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$; $cos(x) = ½ \Rightarrow x = \pi/3, 5/3\pi$. Abbiamo quindi dei *candidati* a essere estremi relativi, vediamo quali di essi lo sono.

Rappresentiamo il segno

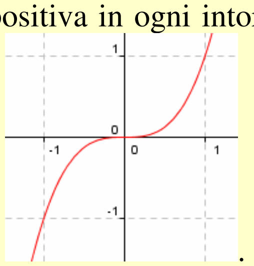
	0 – π/3	π/3 – π	π – 5/3π	5/3π – 2π
sin(x)	+	+	-	-
2cos(x)-1	+	-	-	+
f'(x)	+	-	+	-

.

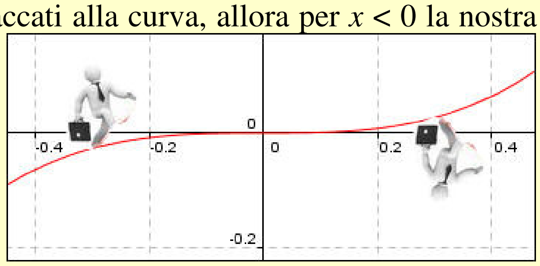
Quindi possiamo dire che i punti di ascissa $\pi/3$ e $5/3\pi$ sono di massimo relativo, mentre quelli di ascissa 0, π, 2π sono di minimo relativo.

Consideriamo adesso gli altri due casi previsti dal diagramma del segno della derivata prima. Ovviamente in questi due casi non vi è cambio di crescenza e quindi non vi può essere alcun estremo relativo. Quindi l'annullarsi della derivata prima che cosa *modifica* nell'andamento della funzione?

Esempio 5

La funzione $y = x^3$ verifica il terzo caso del diagramma, dato che la sua derivata prima è $3x^2$ che è una quantità positiva in ogni intorno di zero, escluso lo stesso zero. Rappresentiamo la funzione con l'aiuto di Geogebra 

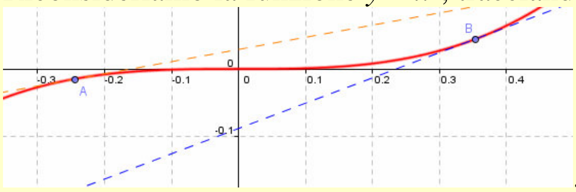
. Come si vede, la funzione è crescente sia per $x < 0$ che per $x > 0$. In $x = 0$ non si ha un cambio di crescenza, ma la curva, rispetto all'asse delle ascisse, che rappresenta la retta tangente alla funzione, si comporta in modo per così dire opposto. Infatti per $x < 0$ la curva è al disotto della tangente, mentre per $x > 0$ è al di sopra. Questo crea un cambiamento di *punto di vista*. Nel senso che, se immaginiamo di percorrere la curva mantenendo i nostri piedi attaccati alla curva, allora per $x < 0$ la nostra testa sarà *al disopra* della curva, mentre per $x > 0$ sarà al *disotto*.



In pratica la concavità è legata alle relazioni che la funzione ha con la propria tangente.

Esempio 6

Riconsideriamo la funzione $y = x^3$, tracciandola insieme con due sue tangenti in punti con diversa concavità.



. Come si vede, in A la tangente è al di sopra della funzione, in B è al disotto.

Vediamo di definire in modo appropriato quanto detto finora in modo intuitivo.

Definizione 2

Data la funzione $y = f(x)$, derivabile nell'insieme X, detta t la retta tangente alla funzione nel suo punto $P \equiv (x_0; f(x_0))$, e detto $P' \equiv (x^*; y^*) \in t$, con x^* appartenente a un conveniente intorno I di x_0, se si ha

- $f(x^*) \leq y^*$, $\forall\, x^* \in I$, allora $f(x)$ volge la **concavità verso il basso** in x_0;
- $f(x^*) \geq y^*$, $\forall\, x^* \in I$, allora $f(x)$ volge la **concavità verso l'alto** in x_0.

Vale il seguente risultato.

Teorema 4

Una funzione $y = f(x)$, derivabile in x_0, volge la concavità verso il basso (rispettivamente verso l'alto) in x_0, se esiste un intorno I di x_0, per cui si ha $f(x^*) \leq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x^* - x_0)$, $\forall x^* \in I$

$$(\text{rispettivamente } f(x^*) \geq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x^* - x_0),\ \forall x^* \in I)$$

Dimostrazione

L'equazione della retta t tangente a $f(x)$ in x_0 è $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Quindi se la funzione volge la concavità verso il basso in x_0, deve aversi $f(x^*) \leq y^*$, per ogni x^* appartenente a un certo intorno I di x_0. Ma $y^* = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x^* - x_0)$, quindi, sostituendo, la disuguaglianza diventa $f(x^*) \leq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x^* - x_0)$, che è quello che voleva provarsi. Analoga dimostrazione quando la concavità è rivolta verso l'alto.

Esempio 7

Data la funzione $y = x^3$, consideriamo il suo punto di ascissa $x = -1$, in cui la concavità dovrebbe essere rivolta verso il basso. Verifichiamo tale affermazione. Deve esistere un intorno I di -1, in cui deve aversi $f(x) \leq f(-1) + f'(-1) \cdot (x + 1), \forall x \in I \Rightarrow x^3 \leq -1 + 3 \cdot (x + 1) \Rightarrow x^3 + 1 \leq 3 \cdot (x + 1) \Rightarrow (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) \leq 3 \cdot (x + 1)$.

Adesso, se siamo in un intorno sinistro di $x = -1$, si ha $x + 1 < 0$, quindi la disuguaglianza diventa $x^2 - x + 1 \geq 3 \Rightarrow x^2 - x - 2 \geq 0$, che ha soluzioni: $x \leq -1 \vee x \geq 2$. Dato che siamo nell'ipotesi $x \leq -1$, è verificata. Se siamo in un intorno destro di -1, si ha $x + 1 > 0$, e la disuguaglianza diventa $x^2 - x + 1 \leq 3 \Rightarrow x^2 - x - 4 \leq 0$, che ha soluzioni: $\frac{1-\sqrt{17}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{17}}{2}$. Questa soluzione contiene un intorno destro di -1, quindi anche questa è verificata. Effettivamente la funzione in $x = -1$ volge la concavità verso il basso.

Definizione 3

Data $y = f(x)$, definita in $x = x_0$, se esiste un intorno I di x_0, in cui la funzione cambia il verso della propria concavità passando dall'intorno sinistro al destro allora $P \equiv (x_0; f(x_0))$, si dice **punto di flesso** per $f(x)$.

Definizione 4

Data la funzione $y = f(x)$ derivabile in un intorno di un punto di flesso $P \equiv (x_0; f(x_0))$, allora se P si dice **punto di flesso a tangente orizzontale** se $f'(x_0) = 0$ (**obliqua** se $f'(x_0) \neq 0$).

Esempio 8

$O \equiv (0; 0)$ è un punto di flesso a tangente orizzontale per la funzione $y = x^3$, con retta tangente $y = 0$.

Come possiamo determinare i punti di flesso a tangente obliqua? Enunciamo un risultato generale, che mette in gioco anche la determinazione dei punti di estremo relativo.

Teorema 5

Una funzione $y = f(x)$, derivabile almeno fino all'ordine n in X, per la quale $f^h(x_0) = 0$, $\forall h$: $1 \leq h \leq (n - 1)$, e $f^n(x_0) \neq 0$, ha in $P \equiv (x_0; f(x_0))$ un punto di

- massimo relativo, se n è pari e $f^n(x_0) < 0$;
- minimo relativo, se n è pari e $f^n(x_0) > 0$;
- flesso, se n è dispari.

Dimostrazione

La funzione verifica le ipotesi del teorema di Taylor, quindi può esprimersi mediante il polinomio di Taylor di punto iniziale x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots + f^{n-1}(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \left[f^n(x_0) + h(x)\right]\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

tenuto conto delle ipotesi la precedente si semplifica in: $f(x) = f(x_0) + \left[f^n(x_0) + h(x)\right]\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!}$, che può anche scriversi: $f(x) - f(x_0) = \left[f^n(x_0) + h(x)\right]\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!}$. Del resto si ha anche $\lim_{x\to x_0}\left[f^n(x_0) + h(x)\right] = f^n(x_0) \neq 0$. Quindi per il teorema della permanenza del segno vi è un intorno completo di x_0 in cui $f(x) - f(x_0)$ ha lo stesso segno di $f^n(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!}$. Perciò se n è dispari, dall'intorno destro a quello sinistro vi è un cambio di segno, dato che $x - x_0$ cambia segno mentre la derivata ennesima no. Perciò abbiamo un flesso.

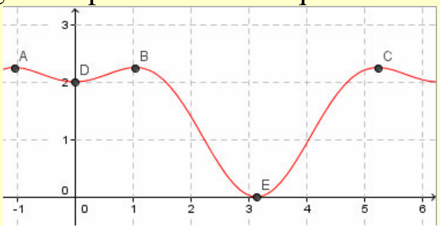
Se invece n è pari, $f(x) - f(x_0)$ ha lo stesso segno di $f^n(x)$, e quindi se esso è positivo avremo un intorno completo di x_0 in cui si ha $f(x) > f(x_0)$, cioè in x_0 si ha un minimo relativo; se invece è negativo avremo un intorno completo di x_0 in cui si ha $f(x) < f(x_0)$, cioè in x_0 si ha un massimo relativo.

Il precedente risultato permette la determinazione di tutti gli estremi relativi e i punti di flesso per le funzioni derivabili. Risulta particolarmente comodo per funzioni per le quali è complicato studiare il segno della derivata prima.

Esempio 9

Riprendiamo la funzione $y = sin^2(x) + cos(x) + 1$, di cui abbiamo già determinato gli estremi relativi, vogliamo ottenere gli stessi risultati con il metodo delle derivate successive. Ricordiamo che la derivata prima è $y'(x) = 2sin(x) \cdot cos(x) - sin(x)$, che si annulla per $x = 0, \pi/3, \pi, 5/3\pi, 2\pi$. Calcoliamo la derivata seconda:

$y''(x) = 2cos^2(x) - 2sin^2(x) - cos(x) = 2cos(2x) - cos(x)$. Sostituiamo gli zeri della derivata prima: $y''(0) = y''(2\pi) = 2 - 1$, $y''(\pi) = 2 + 1$, in ogni caso valori positivi, quindi per il teorema 5 i punti di ascissa 0, π e 2π sono di minimo relativo. Sostituiamo gli altri valori: $y''(\pi/3) = y''(5\pi/3) = -3/2$. Perciò la derivata seconda è in ogni caso negativa, quindi per il teorema 5 i punti di ascissa $\pm\pi/3 + 2k\pi$, sono di massimo relativo. Con Geogebra tracciamo il grafico per confermare quanto trovato.



Chiudiamo enunciando dei risultati relativi alla concavità di una funzione e alla determinazione dei punti di flesso.

Teorema 6

Condizione necessaria affinché una funzione $y = f(x)$, derivabile almeno fino all'ordine 2 in X, abbia un punto di flesso in $P \equiv (x_0; f(x_0))$ è che si abbia $f''(x_0) = 0$

Dimostrazione omessa

Teorema 7

Data una funzione $y = f(x)$, derivabile almeno fino all'ordine 2 in X, se $f''(x) > 0$ [risp. < 0] $\forall\, x \in X$, la funzione volge la concavità verso l'alto [risp. verso il basso] in X.

Dimostrazione omessa

Teorema 8

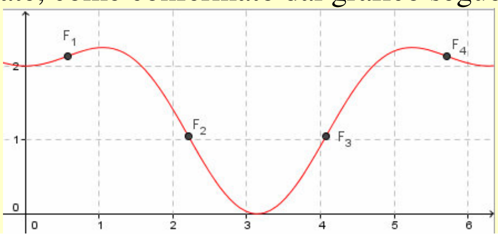
Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $y = f(x)$, derivabile almeno fino all'ordine 2 in X, abbia un punto di flesso in $P \equiv (x_0; f(x_0))$ è che si abbia

$$f''(x_0) = 0 \text{ ed } \exists\, \delta > 0: f''(x^*) \cdot f''(x°) < 0,\ \forall\, x^* \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ e, } \forall\, x°.$$

Dimostrazione omessa

Esempio 10

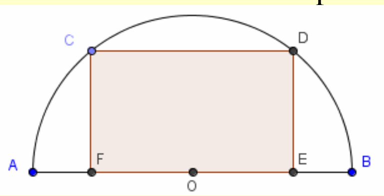
Determinare i punti di flesso della funzione $y = sin^2(x) + cos(x) + 1$ per $0 \le x \le 2\pi$. Nell'esempio 9 abbiamo già calcolato la derivata seconda: $y''(x) = 2cos(2x) - cos(x) = 4cos^2(x) - cos(x) - 2$. Annulliamola: $cos(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$. Quindi i flessi hanno ascisse $cos^{-1}\left(\frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}\right) \approx 0{,}57 \vee \approx 2{,}20; \approx 4{,}08; \approx 5{,}71$. Studiando il segno della derivata seconda abbiamo che la funzione volge la concavità verso l'alto fra due flessi successivi e corrispondenti alle stesse ordinate e volge la concavità verso il basso fra due flessi successivi e relativi a diverse ordinate, come confermato dal grafico seguente ottenuto con Geogebra.



La ricerca di estremi relativi o assoluti può essere utile anche nella risoluzione di problemi matematici o scientifici in generale.

Esempio 11

In una semicirconferenza di raggio r possiamo inscrivere infiniti rettangoli. Fra questi ve ne è uno la cui area è massima? Uno la cui area è minima? Uno il cui perimetro è massimo? Il cui perimetro è minimo?

Consideriamo la figura 

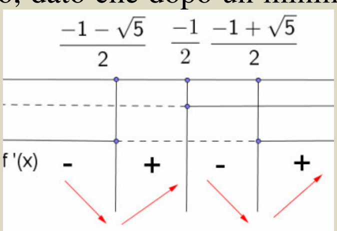
. Il rettangolo si può determinare in vari modi, per esempio mediante la posizione di uno qualsiasi dei suoi quattro vertici, per esempio C. Questi a sua volta determina l'angolo variabile $C\hat{O}F = x$. Determiniamo quindi l'area del generico rettangolo al variare di tale angolo. Abbiamo $\overline{FC} = \overline{OC} \cdot sin(x) = r \cdot sin(x); \overline{OF} = \overline{OC} \cdot cos(x) = r \cdot cos(x)$. Quindi l'area, al variare di x misura: $2r^2 \cdot sin(x) \cdot cos(x) = r^2 \cdot sin(2x)$. Dobbiamo perciò determinare massimo e minimo di questa funzione nell'intervallo: $0° < x < 90°$.

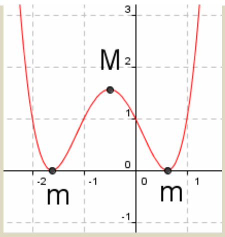
Potremmo fare a meno di usare il calcolo differenziale, poiché il massimo si ha quando è massimo il seno, cioè se $2x = 90° \Rightarrow x = 45°$, mentre il minimo non ci sarà perché il valore $x = 0°$ non è accettabile. Verifichiamo quanto detto usando il calcolo differenziale: $y' = r^2 \cdot 2 \cdot cos(2x)$. Annulliamo: $y' = 0 \Rightarrow cos(2x) = 0 \Rightarrow 2x = 90° \Rightarrow x = 45°$. Calcoliamo la derivata seconda: $y'' = -r^2 \cdot 4 \cdot sin(2x)$. Sostituiamo il valore trovato: $-r^2 \cdot 4 \cdot sin(2 \cdot 45°) = -4 < 0$. Quindi effettivamente il massimo si ha quando l'angolo è 45°. In questo caso avremo che l'area massima misura $r^2 \cdot sin(90°) = r^2$, mentre i lati misurano l'uno, FE, doppio dell'altro FC.

Vediamo cosa accade del perimetro: $2p = 2r \cdot sin(x) + 4r \cdot cos(x) = 2r \cdot [sin(x) + 2 \cdot cos(x)]$. Calcoliamo la derivata prima: $2r \cdot [cos(x) - 2 \cdot sin(x)]$. Annulliamo: $cos(x) - 2 \cdot sin(x) = 0 \Rightarrow cot(x) = 2 \Rightarrow x = cot^{-1}(2)$. Calcoliamo la derivata seconda: $2r \cdot [-sin(x) - 2 \cdot cos(x)]$. Osserviamo che $cot^{-1}(2)$ appartiene al primo quadrante. Quindi sostituendo nella derivata seconda otterremo un valore negativo, cioè il perimetro ha un massimo, che si ottiene per $x = cot^{-1}(2) \approx 26°33'54''$ e che vale circa $4{,}47r$. Invece non ha un minimo, tranne quando sparisce il rettangolo, che ovviamente è zero.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Per alcune funzioni gli estremi relativi e assoluti possono determinarsi anche senza bisogno del calcolo differenziale. Per esempio per la funzione $f(x) = (x^2 + x - 1)^2$, che è sempre non negativa, è ovvio che le ascisse che annullano la base sono minimi assoluti. Cioè $x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Cercando invece con il metodo della derivata prima abbiamo: $f'(x) = (2x-1) \cdot (x^2 + x - 1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Cioè troviamo un ulteriore valore, per il quale si ha ovviamente un punto di massimo, dato che dopo un minimo, in una funzione continua, se vi è un estremo deve esserci per forza un massimo. 



Tracciamo il grafico con Geogebra per conferma.

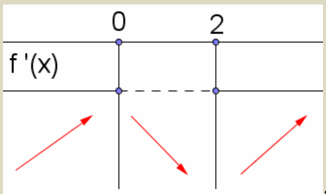
Senza usare il calcolo differenziale determinare gli eventuali estremi relativi o assoluti delle funzioni seguenti. Nelle risposte M indica massimo, m indica minimo

***Livello* 1**

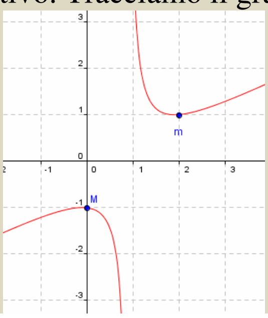
1. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ [$m \equiv (-1; 0)$, $m \equiv (1; 0)$] $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3+1}$ [$m \equiv (0; 0)$]
2. $f(x) = (x^2 - 4)^6$ [$m \equiv (-2; 0)$, $m \equiv (2; 0)$] $f(x) = (x^2 + 1)^3$ [$m \equiv (0; 1)$]
3. $f(x) = |x + 1| - |x|$ [$m \equiv (x; -1), x \le -1$; $M \equiv (x; 1), x \ge 1$] $f(x) = 25 - (x^2 + 3)^3$ [$M \equiv (0; -2)$]
4. $f(x) = |2x + 1| + |x|$ [$m \equiv (-½; ½)$, $m \equiv (0; 1)$] $f(x) = |x - 1| + |2 - x|$ [$m \equiv (x; 1)$, $1 \le x \le 2$]
5. $f(x) = sin(x^2 + x)$
$$\left[m\equiv\left(-\frac{1}{2};sin^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\right)M_k\equiv\left(\frac{-1\pm\sqrt{8k\pi+2\pi+1}}{2};1\right),m_k\equiv\left(\frac{-1\pm\sqrt{8k\pi+6\pi+1}}{2};-1\right),k\ge 0\right]$$
6. $f(x)=\dfrac{1}{e^{x^2+1}+1}$ $\left[M\equiv\left(0;\dfrac{1}{e+1}\right)\right]$ $f(x) = sin^{-1}(x^2)$ [$M \equiv (\pm 1; \pi/2)$, $m \equiv (0; 0)$]
7. $f(x) = |2 - x| - |2x + 3|$ [$m \equiv (2; -7)$, $M \equiv (-3/2; 7/2)$] $f(x) = 3 - (x^2 + 1)^4$ [$M \equiv (0; 2)$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare gli eventuali estremi relativi della funzione $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{2x-2}$. Calcoliamo la derivata:
$$f'(x)=\frac{(2x-2)\cdot(2x-2)-(x^2-2x+2)\cdot 2}{(2x-2)^2}=\frac{4x^2-8x+4-2x^2+4x-4}{(2x-2)^2}=\frac{2x^2-4x}{4\cdot(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{2\cdot(x-1)^2}.$$
Determiniamo gli zeri della derivata: $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$. Costruiamo il grafico del segno della derivata



. Quindi possiamo dire che il punto $M \equiv (0; -1)$ è un massimo relativo, mentre $m \equiv (2; 1)$ è un minimo relativo. Tracciamo il grafico con Geogebra per conferma.



Determinare gli eventuali estremi relativi delle funzioni seguenti. Nelle risposte *M* indica massimo, m

indica minimo e *F* indica flesso a tangente orizzontale

Livello 1

8. $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}$ [$M \equiv (0; 0)$, $m \equiv (1; -1/6)$] $f(x)=\frac{x^3}{3}+x$ [Sempre crescente]

9. $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x$ [$M \equiv (2; 14/3)$, $m \equiv (3; 9/2)$] $f(x)=\frac{x^3}{3}+3x^2+9x+9$ [$F \equiv (-3, 0)$]

10. $f(x)=-\frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}x^3-3x$ [Sempre decrescente] $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}$ [$M \equiv (0; 0)$, $m \equiv (\pm1; ½)$]

11. $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+\frac{2x^3}{3}-x^2+x-\frac{11}{30}$ [$m \equiv (1;0)$] $f(x)=\frac{x^4}{4}+x^3+\frac{x^2}{2}+3x$ [$m \equiv (-3; -45/4)$]

12. $f(x)=\frac{6x^5}{5}-\frac{13x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2$ [$M \equiv (-1/3; 29/540)$, $m \equiv (0; 0)$, $M \equiv (½; 121/960)$, $m \equiv (2; -104/215)$]

13. $f(x)=\frac{4x}{3}-\frac{7\cdot ln(3x+1)}{9}$ $\left[m\equiv\left(\frac{1}{4};\frac{3-7\cdot ln(7/4)}{9}\right)\right]$ $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ [Sempre decrescente]

14. $f(x) = x^2/2 + 2x + 3ln(x-2)$ [Sempre crescente] $f(x) = ½e^{2x} + 2e^x + x$ [Sempre crescente]

15. $f(x) = x - 2tan^{-1}(x)$ [$M \equiv (-1; \pi/2 - 1)$, $m \equiv (1; 1 - \pi/2)$] $f(x) = ½e^{2x} - 2e^x + x$ [$F \equiv (0; -3/2)$]

16. $f(x)=\frac{2x-3\cdot ln(x-1)+3\cdot ln(x+1)}{2}$ $\left[M\equiv\left(-2;-\frac{4+ln(27)}{2}\right),m\equiv\left(2;\frac{4+ln(27)}{2}\right)\right]$

17. $f(x) = sin(x) - cos(x)$, $x \in [0, 2\pi]$ $\left[M\equiv\left(\frac{3}{4}\pi;\sqrt{2}\right),m\equiv\left(\frac{7}{4}\pi;-\sqrt{2}\right)\right]$

18. $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ $\left[M\equiv\left(1-\sqrt{2};2-2\cdot\sqrt{2}\right),m\equiv\left(1+\sqrt{2};2+2\cdot\sqrt{2}\right)\right]$ $f(x) = e^x - e^{-x}$ [Sempre cr.]

19. $f(x) = x\cdot ln(x^2 - x)-ln(x-1) - 2x$ $\left[m\equiv\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};-ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)-\sqrt{5}-1\right)\right]$ $f(x) = e^x + e^{-x}$ [$m \equiv (0; 2)$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare gli eventuali estremi relativi della funzione $f(x) = 2sin(x) \cdot cos^3(x) + x$, $x \in [0, 2\pi]$.
Calcoliamo la derivata prima: $f'(x) = 2cos(x) \cdot cos^3(x) + 2sin(x) \cdot 3cos^2(x) \cdot [-sin(x)] + 1 = 2cos^4(x) - 6sin^2(x) \cdot cos^2(x) + 1 = 2cos^4(x) - 6cos^2(x) + 6cos^4(x) + 1 = 8cos^4(x) - 6cos^2(x) + 1$. Annulliamo:

$$cos^2(x)=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{8}=\frac{3\pm1}{8}=\prec\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\end{matrix}\Rightarrow cos(x)=\prec\begin{matrix}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \pm\frac{1}{2}\end{matrix}$$

Quindi si ha: $\begin{matrix}cos(x)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\vee x=\frac{3\pi}{4}\vee x=\frac{5\pi}{4}\vee x=\frac{7\pi}{4};\\ cos(x)=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}\vee x=\frac{2\pi}{3}\vee x=\frac{4\pi}{3}\vee x=\frac{5\pi}{3}\end{matrix}$. Adesso piuttosto che studiare il segno della derivata prima, applichiamo il metodo delle derivate successive.
$f''(x) = -32cos^3(x)\cdot sin(x) + 12\,cos(x)\cdot sin(x) = -4cos(x)\cdot sin(x) \cdot [-8cos^2(x) + 3] = -2sin(2x) \cdot [-8cos^2(x) + 3] =$

Sostituiamo: $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left[-8\cdot cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+3\right]=2\cdot\left[-8\cdot\frac{1}{2}+3\right]=-2<0$, quindi il punto di ascissa $\pi/4$ è di massimo relativo. Allo stesso modo si vede che sono massimi anche i punti di ascisse: $5\pi/4$, $2\pi/3$, $5\pi/3$; mentre sono minimi relativi i punti di ascisse $3\pi/4$, $7\pi/4$, $\pi/3$, $4\pi/3$.

Livello 2

20. $f(x)=\sqrt{(4x-5)^3}$ [$m \equiv (5/4; 0)$] $f(x) = |x + 1| + |x^2 + x|$ [$m \equiv (-1; 0), M \equiv (0; 1)$]

21. $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ [$m \equiv (2; 0), m \equiv (3; 0)$] $f(x) = |x - 1| - |x^2 - 3x + 2|$ [$m \equiv (-1; 0), M \equiv (2; 1)$]

22. $f(x) = |x^2 - 5x + 6| - |x^2 - 4x + 3|$ [$m \equiv (2; -1), M \equiv (3; 0)$] $f(x) = ln(x^2 - 1)$ [Nessun estremo]

23. $f(x)=sin^2(x)+cos(x)sin(x)+x, x\in[0,2\pi]$ [$M \equiv (\pi/2; \pi/2 + 1), m \equiv (¾\pi; ¾\pi), M \equiv (3/2\pi; 3/2\pi + 1)$]

24. $f(x) = ln(x^2 + x - 1)$ [Nessun estremo] $f(x) = ln(x^2 + x + 1)$ [$m \equiv (-½; ln(¾))$]

25. $f(x)=\frac{|x^2-1|}{x^2+1}$ [$m \equiv (\pm 1; 0), M \equiv (0; 1)$] $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$ [Nessun estremo]

26. $f(x)=sin^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ [$m \equiv (0; -\pi/2)$] $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ [$F \equiv (0; 0)$]

27. $f(x)=sin^{-1}[cos(x)]$ [$m \equiv (\pi + 2k\pi; -\pi/2 + 2k\pi); M \equiv (2k\pi; \pi/2 + 2k\pi)$]

Determinare gli eventuali estremi relativi delle funzioni seguenti al variare dei parametri

Livello 3

28. $f(x) = a \cdot sin(x) + b \cdot cos(x), b > 0, x \in [0, 2\pi]$ [M: $x = tan^{-1}(a/b)$; m: $x = tan^{-1}(a/b) - \pi$]

29. $f(x)=\frac{x}{x+a}$ [Nessun estremo] $f(x)=\frac{x}{(x^2-a^2)}$ [Nessun estremo]

30. $f(x)=(x^2+ax+1)^2$ $\left[\begin{cases} m: x=-\frac{a}{2} & -2\le a\le 2 \\ m: x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}, M: x=-\frac{a}{2} & a<-2\vee a>2\end{cases}\right]$

31. $f(x)=x^3+ax^2+x+1$ $\left[\begin{cases} m: x=-\frac{\sqrt{3}}{3} & a=\pm\sqrt{3} \\ m: x=\frac{-a+\sqrt{a^2-3}}{3}, M: x=\frac{-a-\sqrt{a^2-3}}{3} & a<-\sqrt{3}\vee a>\sqrt{3}\end{cases}\right]$

32. $f(x)=\sqrt{x^2+ax+1}$ [m: $x = -a/2$ se $-2\le a\le 2$]

33. Sia $f(x)=k\cdot\sqrt{x}-\ln x, x>0, k\in\mathbb{R}$. Determinare per quali valori di k, si ha un estremo relativo per $x = 1$, stabilendo che tipo di estremo è. [Minimo per $k = 2$]

Rispondere alle seguenti domande giustificando le risposte

Livello 3

34. Un polinomio di quinto grado quanti estremi relativi può avere al massimo? [4]
35. Un polinomio di terzo grado quanti estremi relativi può avere al massimo? [2]
36. Un polinomio di quinto grado può avere solo due massimi relativi? [No]
37. Una funzione continua può avere solo due massimi relativi o solo due minimi relativi? [No]
38. Una funzione non continua può avere solo due massimi relativi o solo due minimi relativi? [Sì]
39. Una funzione simmetrica rispetto all'asse y può avere 2 massimi relativi e un minimo relativo? [Sì, solo se il minimo ha ascissa zero]
40. Una funzione simmetrica rispetto all'origine può avere 2 massimi relativi e un minimo relativo? [Sì, solo se il minimo ha ascissa zero]
41. Una funzione simmetrica rispetto all'asse y ma non definita per $x = 0$, può avere un numero dispari di massimi relativi? [No]
42. Una funzione simmetrica rispetto all'origine ma non definita per $x = 0$, se ha 3 massimi relativi, quanti minimi relativi ha? [3]

Lavoriamo insieme

Data la funzione $y = a + b \cdot sin(x) + c \cdot cos(x)$, vogliamo determinare i valori dei parametri a, b e c in modo che abbia $P \equiv (3\pi/4;\ \sqrt{2} + 2)$ come estremo relativo e passi per $A \equiv (0; 1)$.
Dobbiamo determinare 3 parametri, quindi abbiamo bisogno di 3 informazioni. Imponiamo le condizioni relative a ciascuna di esse. La condizione necessaria per l'esistenza di un estremo relativo è che la derivata prima sia nulla, dato che si ha: $y' = b \cdot cos(x) - c \cdot sin(x)$, deve aversi:

$$b \cdot cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - c \cdot sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}b - \frac{\sqrt{2}}{2}c = 0 \Leftrightarrow -b - c = 0 \Leftrightarrow b = -c$$

Le altre due condizioni si trovano imponendo l'appartenenza dei punti, si ha così il sistema:

$$\begin{cases} b = -c \\ a + b \cdot sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + c \cdot cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + 2 \\ a + b \cdot sin(0) + c \cdot cos(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -c \\ a + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot b - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot c = \sqrt{2} + 2 \\ a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b = -c \\ 1 - c - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot c - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot c = \sqrt{2} + 2 \\ a = 1 - c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -c \\ \left(-1 - \sqrt{2}\right) \cdot c = \sqrt{2} + 1 \\ a = 1 - c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Quindi si ha: $y = 2 + sin(x) - cos(x)$.

Data le seguenti funzioni, determinare i valori dei parametri reali, se esistono, che verificano le condizioni indicate

Livello 2

43. $y = ax^3 + bx^2 + x$; ha estremi relativi per $x = 1$; $x = 2$ [$a = 1/6$; $b = -3/4$]
44. $y = ax^3 + x^2 + bx + 1$; ha estremi relativi per $x = 0$; $x = 1$ [$a = -2/3$; $b = 0$]
45. $y = ax^3 + bx^2 + x - 1$; ha estremo relativo in $M \equiv (1; 2)$ [$a = -5$; $b = 7$]
46. $y = ax + ln(bx)$; passa per il punto $P \equiv (e; e-1)$; estremo relativo per $x = 1$ [$a = -1$; $b = e^{2e-2}$]
47. $y = \frac{a \cdot x + 1}{x - b}$; passa per il punto $P \equiv (1; -1)$; estremo relativo per $x = 0$ [$\varnothing$]
48. $y = \frac{a \cdot x^2 + 1}{x^2 - b}$; estremo relativo in $(0; -1/2)$ [$a \neq 0$, $b = 2$]
49. $y = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - ax + b}$; estremo relativo in $M \equiv (2; 5/3)$ [$a = 1$, $b = 4$]

Livello 3

50. $y = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x + c}$; estremo relativo in $M \equiv (1/2; 7/11)$, passa per $A \equiv (0; 2/3)$ [$a = -1$, $b = 2$, $c = 3$]
51. $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$; estremo relativo in $M \equiv (-1/2;\ \sqrt{3}/2)$, passa per $A \equiv (0; 1)$ [$a = b = c = 1$]
52. $y = ln\left(ax^2 + bx + c\right)$; estremo relativo in $M \equiv (1/2; ln(11/4))$, passa per $A \equiv (1; ln(3))$ [$a = 1$; $b = -1$; $c = 3$]
53. $y = \frac{2a \cdot x^2 - x + b}{3x + 2c}$; passa per $P \equiv (1; 2)$; estremi relativi per $x = 2$ e $x = 3$ [$a = 21/20$; $b = -101/100$, $c = -15/4$]

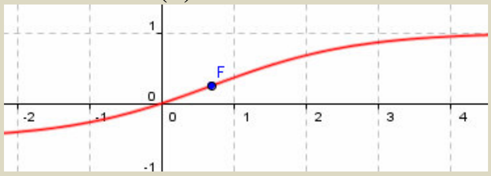
Lavoriamo insieme

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 2}$, vogliamo stabilire se ha punti di flesso e quindi vogliamo studiare la sua concavità. Calcoliamo la derivata seconda:

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot(e^x+2)-(e^x-1)\cdot e^x}{(e^x+2)^2}=\frac{e^x\cdot(e^x+2-e^x+1)}{(e^x+2)^2}=\frac{3e^x}{(e^x+2)^2};$$

$$f''(x)=\frac{3e^x\cdot(e^x+2)^{\cancel{2}}-2\cdot\cancel{(e^x+2)}\cdot e^x\cdot 3e^x}{(e^x+2)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{e^x\cdot(3e^x+6-6e^x)}{(e^x+2)^3}=\frac{3e^x\cdot(2-e^x)}{(e^x+2)^3}.$$

Azzeriamo: $e^x = 2$. Quindi abbiamo un flesso per $x = ln(2)$. La cui ordinata è $f[ln(2)]=\frac{e^{ln(2)}-1}{e^{ln(2)}+2}=\frac{2-1}{2+2}=\frac{1}{4}$. Ecco il grafico per conferma:



Determinare gli eventuali punti di flesso a tangente obliqua delle funzioni seguenti

Livello 1

54. $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$ [Nessun flesso] $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ [(–2/9;205/243)]

55. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+2}$ [($\pm\sqrt{6}$/3; –1/8)] $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ [Nessun flesso]

56. $f(x)=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+1$ [(–1; 4/3)] $f(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}-x+2$ [(0; 2), (1; 11/12)]

57. $f(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{5x^3}{6}+3x^2+2x-1$ [(2; 29/3), (3; 65/4)] $f(x)=(x-3)\cdot e^x$ [(1; –2e)]

58. $f(x)=\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}-\frac{5}{8}\right)\cdot e^{2x}$ [(2; – 5/8e^4), (–2; 11/8e^{-4})] $f(x)=x^2\cdot ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $\left[\left(\pm\sqrt{\frac{1}{e^3}};\frac{3}{e^3}\right)\right]$

Livello 2

59. $f(x)=\left(\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{6}\right)\cdot ln(x)-\frac{7x^4+20x^3}{144}$ [(1; –3/16)] $f(x)=\frac{x^4}{x^3+1}$ $\left[\left(\sqrt[3]{2};\frac{2\cdot\sqrt[3]{2}}{3}\right)\right]$

60. $f(x) = (3 – x)\cdot sin(x) – 2cos(x) + x – 1,\ x \in [0, 2\pi]$ [(3; 2 – 2cos(3)), (0; –3), (π; π + 1), (2π; 2π – 3)]

61. $f(x)=\frac{4\cdot\sqrt{(x-1)^5}\cdot(3x+4)}{105}$ [Nessun flesso] $f(x)=\frac{4\cdot\sqrt{(x+1)^5}\cdot(3x-4)}{105}$ [(0; –16/105)]

Determinare gli eventuali punti di flesso a tangente obliqua delle funzioni seguenti, al variare dei parametri reali

Livello 3

62. $f(x)=\frac{ax^3}{6}+\frac{bx^2}{2}+c$ $\left[F\equiv\left(-\frac{b}{a};\frac{b^3+3a^2c}{3a^2}\right), a\neq 0\right]$ $f(x) = (x – a – 2)\cdot e^x$ [$F \equiv (a; –2e^x)$]

63. $f(x)=\frac{ax^3}{6}+\frac{bx^2}{2}+cx+d$ $\left[F\equiv\left(-\frac{b}{a};\frac{b^3-3abc+3a^2d}{3a^2}\right), a\neq 0\right]$

64. $f(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{(a+b)\cdot x^3}{6}+\frac{ab}{2}\cdot x^2+c\cdot x+d$ $\left[\begin{array}{l}F_1\equiv\left(a;\frac{-a^4+4a^3b+12ac+12d}{12}\right);\\ F_2\equiv\left(b;\frac{-b^4+4ab^3+12bc+12d}{12}\right)\end{array}\right]$

65. $f(x) = (a - x) \cdot sin(x) - 2cos(x)$ [$(a; -2cos(a))$, $(2k\pi, -2)$, $(2k\pi - 1; 2)$)]

66. $f(x) = [x^2 - (a + b + 4) \cdot x + ab + 2a + 2b + 6] \cdot e^{2x}$ [$F_1 \equiv (a; -2(a - b - 3) \cdot e^a)$, $F_2 \equiv (b; 2(a - b + 3) \cdot e^b)$]

Giustificare le risposte ai questi seguenti

Livello 3

67. Sia $f(x) = k \cdot \sqrt{x} - \ln x, x > 0, k \in \mathbb{R}$. Determinare per quali valori di k la funzione ha punti di flesso. [$4 \cdot e^{-2}$]

68. La funzione $f(x) = \frac{x \cdot (x^2 + 3) \cdot tan^{-1}(x)}{6} - \frac{x^2}{3} - \frac{ln(x^2 + 1)}{6}$, ha derivata seconda che si annulla per $x = 0$, possiamo dire che per tale valore la funzione ha un flesso? [No. Ha un minimo]

69. Un polinomio di III grado ha sempre almeno un punto di flesso? [Sì]

70. Un polinomio di III grado può avere più di un punto di flesso? [No]

71. Un polinomio di grado dispari ha sempre almeno un punto di flesso? [Sì]

72. Un polinomio di grado pari ha sempre almeno un punto di flesso? [No]

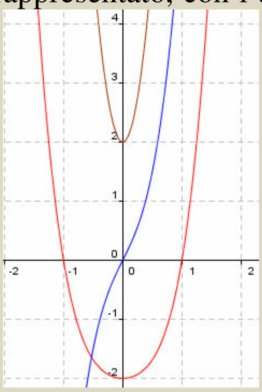
73. Se una funzione ha un massimo relativo per $x = 1$ e un minimo relativo per $x = 2$, possiamo dire che sicuramente ha un punto di flesso la cui ascissa è compresa tra 1 e 2? [Solo se è continua in $(1; 2)$]

74. Se una funzione ha un massimo e un minimo relativo, cosa deve accadere perché sicuramente abbia anche un punto di flesso? [Deve essere continua nell'intervallo che ha per estremi gli estremi relativi]

75. Una particella si muove lungo l'asse x in modo che la sua posizione, al variare del tempo t, verifichi la legge $x(t) = e^{-t} \cdot sin(t), 0 \le t \le 2\pi$. Determinare in quale istante la particella si trova più a sinistra. [$t = 5/4\pi$]

Lavoriamo insieme

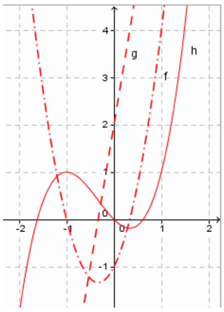
In figura abbiamo rappresentato, con l'aiuto di Geogebra, il grafico di una funzione e delle proprie derivate prima e seconda.

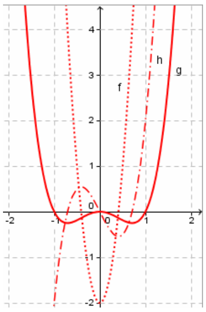


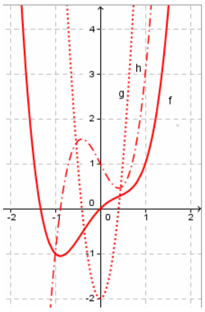
Come facciamo a capire quale grafico si riferisce alla funzione e quale alla derivata? Facciamo un ragionamento. Le derivate determinano gli intervalli di crescenza e decrescenza, nonché gli estremi relativi. Quindi la derivata prima sarà positiva laddove il grafico della funzione cresce, negativa laddove decresce, incontrerà l'asse delle ascisse dove la funzione ha estremi relativi. La derivata seconda invece è legata alla concavità della funzione, quindi è positiva dove la funzione volge la concavità verso l'alto negativa altrimenti. Incontra l'asse delle ascisse dove la funzione ha un flesso. Tenuto conto di ciò possiamo dire che la funzione di partenza è quella rossa, che cresce per $x > 0$ e decresce per $x < 0$. La derivata prima è la funzione blu, che appunto è positiva dove la rossa cresce, negativa altrimenti e incontra l'asse delle x dove la curva rossa ha un minimo relativo. Infine la funzione marrone rappresenta la derivata seconda, poiché è sempre positiva, dato che la funzione rossa volge sempre la concavità verso l'alto.

Nei grafici seguenti sono rappresentati una funzione e le sue derivate, prima e seconda. Associare ciascun grafico alla corretta funzione. Nelle risposte la funzione, la derivata prima e la derivata seconda

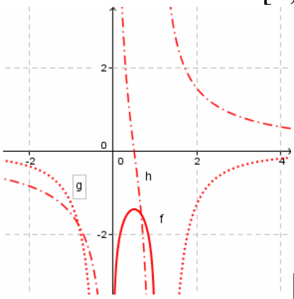
Livello 2

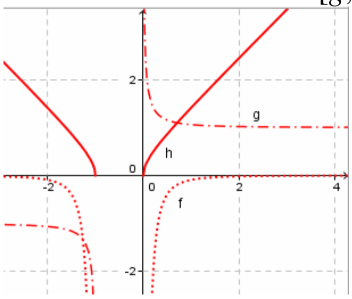
76. 

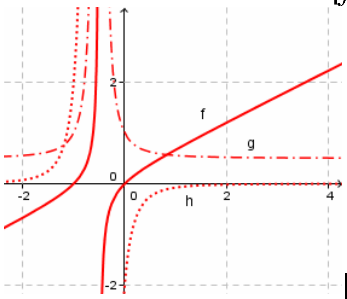
[h, f, g] 

[g, h, f] 

[f, h, g]

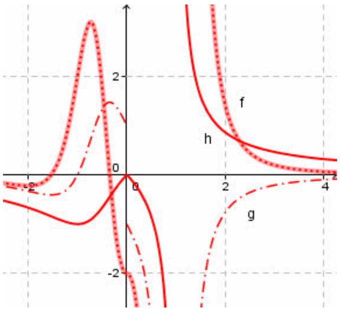
77. 

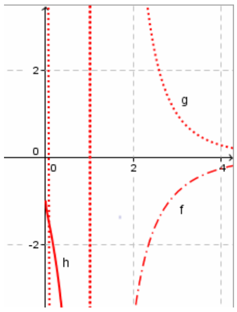
[f, h, g] 

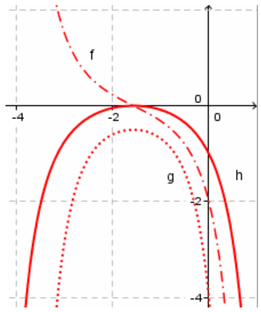
[h, g, f] 

[f, g, h]

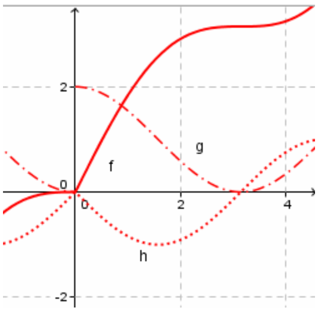
Livello 3

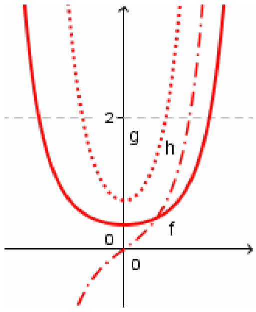
78. 

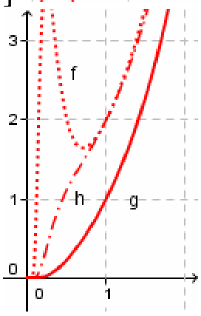
[h, g, f] 

[h, f, g] 

[h, f, g]

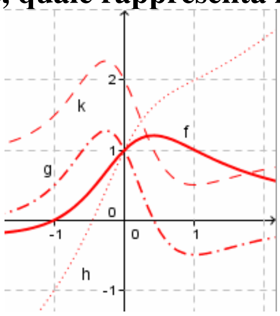
79. 

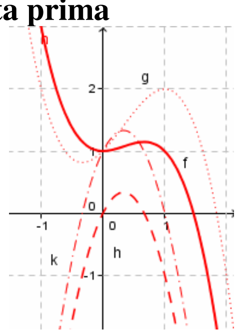
[f, g, h] 

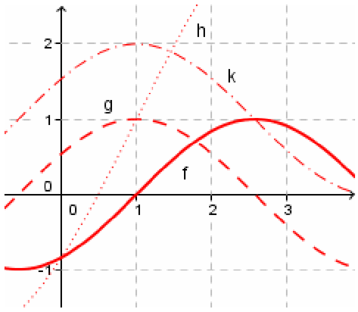
[f, h, g] 

[g, h, f]

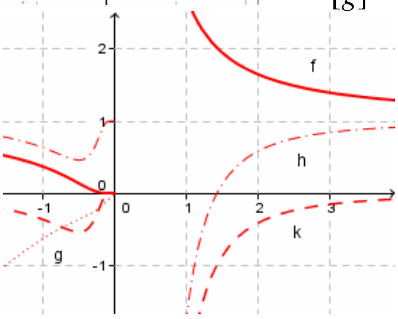
Nei grafici seguenti sono rappresentati la funzione *f* e alcune altre funzioni. Determinate fra esse, se esiste, quale rappresenta la sua derivata prima

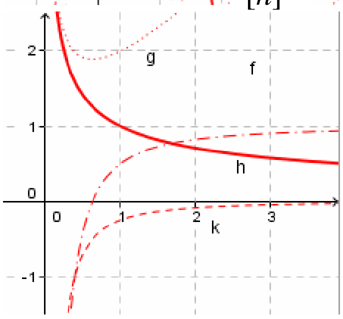
80. 

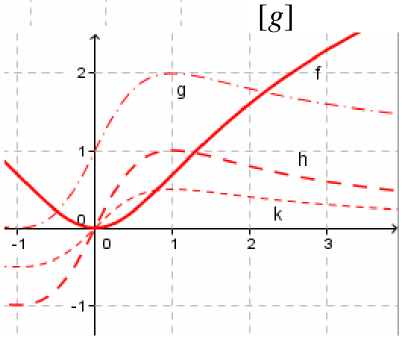
[g] 

[h] 

[g]

81. 

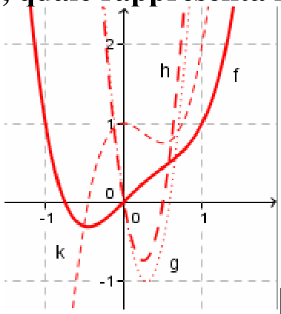
[k] 

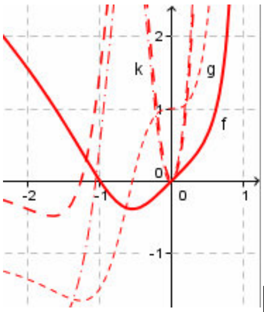
[$\varnothing$] 

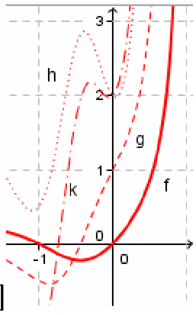
[h]

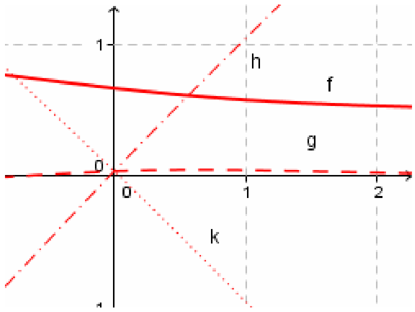
Nei grafici seguenti sono rappresentati la funzione *f* e alcune altre funzioni. Determinate fra esse, se

esiste, quale rappresenta la sua derivata seconda

82. 

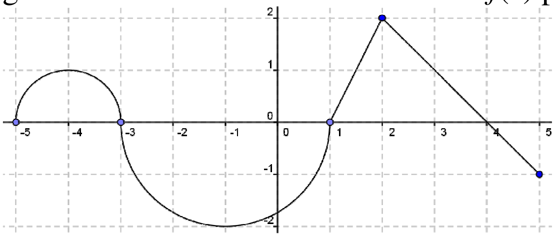
[*h*] 

[*k*] 

[∅] 

[*g*]

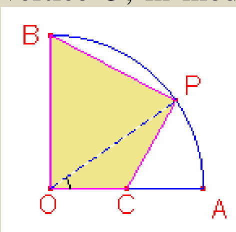
83. In figura è rappresentato il grafico della derivata di una funzione $f(x)$ per cui si ha $f(1) = 3$.



Tenuto conto di esso determinare gli eventuali punti di estremo relativo e di flesso di $f(x)$.

[Massimo per $x = -3$ e $x = 4$; Flessi per $x = -4, -1, 2$]

Lavoriamo insieme

In figura vi è un quarto di cerchio di raggio 1 *cm*, determinare, se esistono, i valori che deve assumere l'angolo segnato, di vertice *O*, in modo che il quadrilatero *OCPB*, con *C* punto medio di *OA*, abbia area massima o minima 

. Indichiamo con x la misura dell'angolo indicato. Ovviamente $0° < x < 90°$. Come si vede abbiamo diviso il quadrilatero in due triangoli, di cui calcoliamo le aree. Ricordiamo che l'area di un triangolo può determinarsi come semiprodotto delle misure di due lati per il seno dell'angolo che comprendono.

Quindi l'area di *OCP* è $½ \cdot 1 \cdot ½ \cdot sin(x) = ¼ \cdot sin(x)$. Quella di *OPB*: $½ \cdot 1 \cdot 1 \cdot sin(90° - x) = ½ \cdot cos(x)$.

Quindi l'area del quadrilatero, che è la funzione da massimizzare, è $y = ¼ \cdot sin(x) + ½ \cdot cos(x)$.

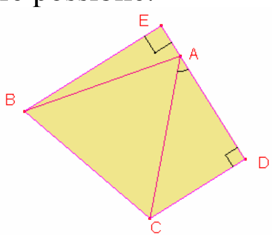
Determiniamo la derivata prima: $y' = ¼ \cdot cos(x) - ½ \cdot sin(x)$. Uguagliamo a zero, dividendo per $cos(x)$, dato che $cos(x) = 0$ non soluzione: $tan(x) = ½ \Rightarrow x = tan^{-1}(½)$.

Calcoliamo la derivata seconda: $y' = -¼ \cdot sin(x) - ½ \cdot cos(x)$, che per $x = tan^{-1}(½)$ è una quantità negativa. Pertanto il detto valore è quello per cui si ha la massima area.

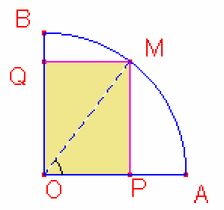
E tale massimo è $¼ \cdot sin[tan^{-1}(½)] + ½ \cdot cos[tan^{-1}(½)] \approx 0{,}56\ cm^2$.

Livello 2

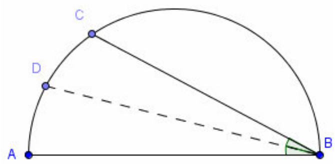
84. Sia *M* un punto su una semicirconferenza di centro *O* e diametro *AB*. Determinare, se esistono, i valori di $M\hat{A}B$ in modo che $3 \cdot \overline{AM} + 2 \cdot \overline{BM}$ abbia il massimo valore possibile. [$tan^{-1}(3/2)$]

85. In figura *ABC* è un triangolo equilatero di perimetro 3 *cm*, 

determinare, se esistono, i valori che deve assumere l'angolo segnato, di vertice *A*, in modo che il trapezio rettangolo *BCDE* abbia area massima. [60°]

86. In figura vi è un quarto di cerchio di raggio 1 *cm*, 

determinare, se esistono, i valori che deve assumere l'angolo segnato, di vertice *O*, in modo che il rettangolo *OPMQ* abbia area massima. [45°]

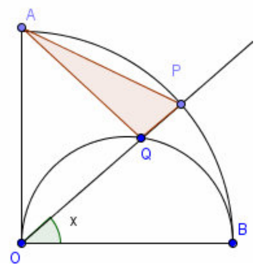
87. In figura, *C* è scelto su una semicirconferenza di raggio 1 *cm*, *AD* è bisettrice dell'angolo segnato di vertice *A*. 

Determinare, se esistono, le misure di tale angolo che rendono la somma fra *AC* e *AD* massima o minima. [Non esistono]

88. Fra tutti i cilindri retti che hanno volume di 1 m^3 determinare, se esistono, quelli che hanno massima o minima superficie totale. [Minimo se il raggio è $1/\sqrt[3]{\pi}$]

89. Determinare il massimo rettangolo che può formarsi con un perimetro lungo *x*. [Quadrato di lato *x*/4]

90. Determinare il quadrato di area minima inscrivibile in un quadrato di lato lungo *x*. Inscrivere un quadrato in un altro significa fare in modo che i vertici del quadrato inscritto appartengano ai diversi lati del quadrato. [Quadrato con i vertici nei punti medi dei lati]

91. In figura *OAB* è un quarto di circonferenza di raggio *r*, su *OB* è costruita una semicirconferenza. La semiretta per *O* incontra l'arco *AB* in *P* e la semicirconferenza in *Q*. Determinare la misura dell'angolo $A\hat{O}P$ in modo che il triangolo *APQ* abbia area massima. 

[30°]

92. Fra tutti i rettangoli di diagonale data, determinare quello di perimetro massimo. [Quadrato]

93. Determinare il minimo valore che può assumere la somma di un numero positivo con il proprio reciproco. [2]

94. Siano due numeri reali la cui somma è 2013, qual è il massimo valore che può assumere il prodotto dei due numeri? E quale il minimo? [Max: 1013042,25; min: non esiste]

95. Siano due numeri reali la somma dei cui quadrati è 2013, qual è il massimo valore che può assumere il prodotto dei due numeri? E quale il minimo? [Max: 1006,5; min: – 1006,5]

96. Siano due numeri reali la somma dei cui quadrati è 2013, qual è il massimo valore che può assumere la loro somma? E quale il minimo? [Max: $\sqrt{4026}$; min: non esiste]

97. Fra tutti i rettangoli di diagonale assegnata, determinare quello di area massima. [Il quadrato]

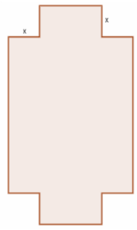
98. Fra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio *r* determinare quello di area massima. [Il quadrato]

99. Dato un rettangolo inscriverlo in un altro rettangolo, determinare quando quest'ultimo ha area massima. [Quando i 4 triangoli determinati in esso dal rettangolo inscritto sono isosceli]

100. Fra tutti i triangoli rettangoli di ipotenusa fissata determinare quello con la massima altezza relativa all'ipotenusa. [Il triangolo isoscele]

101. Fra tutti i triangoli rettangoli di area data determinare quello con l'ipotenusa minima. [Il triangolo isoscele]

102. Per costruire una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo consideriamo un cartone rettangolare di dimensioni lunghe 70 *cm* e 40 *cm*, quindi ritagliamo da ogni angolo un quadrato, ottenendo la figura

mostrata di seguito.  Incolliamo i suoi bordi e otteniamo la scatola. Quanto deve essere lungo il lato x dei quadrati eliminati per ottenere una scatola di volume massimo? $\left[\dfrac{55-5\cdot\sqrt{37}}{3}cm\right]$

103. Dati i punti $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (-1; 3)$, $C \equiv (x; 0)$, determinare il valore di x per cui $\overline{AC}+\overline{BC}$ è minima. [1/5]

104. Fra tutti i rettangoli con lati paralleli agli assi coordinati e inscritti nell'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, determinare quelli che hanno l'area massima e quelli che hanno il perimetro massimo. $\left[A_{MAX}=12; 2p_{MAX}=4\cdot\sqrt{13}\right]$

105. Fra tutti i trapezi isosceli aventi una base sull'asse focale e inscritti nell'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, determinare quelli che hanno l'area massima e quelli che hanno il perimetro massimo. $\left[A_{MAX}=\dfrac{9\cdot\sqrt{3}}{2}; 2p_{MAX}=\dfrac{29}{10}\right]$

Livello 3

106. Generalizzare il precedente problema all'ellisse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. $\left[A_{MAX}=\dfrac{3\cdot\sqrt{3}\cdot a\cdot b}{4}; 2p_{MAX}=\dfrac{2a^2+2ab+b^2}{2\cdot(a+b)}\right]$

107. Generalizzare il problema del rettangolo inscritto nell'ellisse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. $\left[A_{MAX}=2ab; 2p_{MAX}=4\cdot\sqrt{a^2+b^2}\right]$

108. Determinare il minimo valore che può assumere la somma di due numeri il cui prodotto è p. $\left[2\cdot\sqrt{p}\right]$

109. Data una semicirconferenza di raggio r, sul suo diametro AB scegliamo un punto P e costruiamo le semicirconferenze di diametro AP e PB. Chiamiamo *arbelos* la parte di semicerchio esterna ai due semicerchi più piccoli. Determinare la posizione di P in modo che *l'arbelos* abbia area massima. [P è centro della semicirconferenza]

110. Dati i punti $A \equiv (a; b)$, $B \equiv (c; d)$, $C \equiv (x; 0)$, determinare il valore di x per cui $\overline{AC}+\overline{BC}$ è minimo. Questo è il cosiddetto problema di Erone. $\left[\dfrac{bd\cdot|a-c|-ad^2+b^2c}{b^2-d^2}\right]$

111. Generalizzare il problema 102 per un cartone rettangolare di dimensioni lunghe a e b. $\left[\dfrac{a+b-\sqrt{a^2+ab+b^2}}{6}\right]$

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi
I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito
http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

1. (Liceo scientifico 1969/70) Data la funzione: $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, si trovino i coefficienti sapendo che: essa si annulla per $x = 0$; la sua derivata prima si annulla per $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$; il suo grafico, in un riferimento cartesiano ortogonale O(x; y), ha, nel punto di ascissa $x = -1$, la tangente parallela alla retta di equazione $y = -x$. [$a = 1/24$, $b = -1/6$, $c = 1/6$, $d = e = 0$]
2. (Liceo scientifico suppletiva 1970/71) Tra i coni circolari retti inscritti in una sfera di raggio r, determinare quello per il quale è massima l'area della superficie totale, dopo averne trovata l'espressione in funzione della semiapertura x di un generico cono. Suggerimento: si determini la sezione ottenuta con un piano per il vertice e perpendicolare alla base del cono.
$$\left[f(x) = 4\pi r^2 \cdot \left[-sin^4(x) - sin^3(2x) + sin^2(x) + sin(x)\right]; x_{MAX} = sin^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)\right]$$
3. (Liceo scientifico 1970/71) Fra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio assegnato, si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base. Sia r la misura del raggio e $2x$ quella dell'angolo al vertice. [$y = 2r\, cos^2(x) + 4r\, sin(2x)$, $0 < x < \pi/2$; $x_{Max} = ½\, tan^{-1}(4)$]
4. (Liceo scientifico 1971/72) Si determini l'altezza e il raggio di base del cono di volume minimo circoscritto a una data sfera di raggio r. Si dimostri che il suddetto cono è anche quello minima superficie totale. Suggerimento: si determini la sezione ottenuta con un piano per il vertice e perpendicolare alla base del cono. Sia x la misura del raggio di base del cono. $\left[y = \frac{2\pi}{3} rx \cdot \frac{x^4}{x^2 - r^2}; x_{\min} = \sqrt{2}\right]$
5. (Liceo scientifico suppletiva 1971/72) Si studi la variazione di $y = tan(x) - 2\, sin(x)$ nell'intervallo $[1 - \pi/2; 3/2\pi]$. $\left[x_{Max} = -cos^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right), x_{\min} = cos^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)\right]$
6. (Liceo scientifico 1972/73) Si studi la variazione della funzione $y = 3\, cos(2x) - 4\, cos(x)$ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$. [$x_{Max} = \pi$; $x_{min} = cos^{-1}(1/3) \vee 2\pi - cos^{-1}(1/3)$]
7. (Liceo scientifico suppletiva 1972/73) Si studi la variazione di $y = sin(2x) - tan(x)$ per $0 \le x \le \pi$.
$$\left[x_{Max} = cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}\right), x_{\min} = \pi - cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}\right)\right]$$
8. (Liceo scientifico 1973/74) Assegnata la funzione $y = sin(x) + a \cdot cos(x) + b$ ($-\pi \le x \le \pi$), si determinino i valori di a e di b in modo che ammetta un massimo relativo $y = 0$ in $x = \pi/6$. $\left[a = \sqrt{3},\quad b = -2\right]$
9. (Liceo scientifico 1973/74) Sono assegnate due circonferenze C e C' esterne tra loro e rispettivamente di centri O e O' e raggi r e $r/2$. Sul segmento $\overline{OO'} = a$, si prenda un generico punto P non interno alle due circonferenze e si conducano da esso le rette tangenti a C e C'. Gli archi aventi per estremi i punti di contatto e intersecanti il segmento OO' generano, in una rotazione di 180° attorno a OO', due calotte sferiche. Posto $\overline{OP} = x$ si determini la posizione di P in corrispondenza della quale risulta massima la somma delle aree delle due calotte. $\left[2\pi r^2 \cdot \left(\frac{5}{4} - \frac{r}{x} - \frac{r}{8\cdot(a-x)}\right), r \le x \le a - \frac{r}{2}, a \ge \frac{3}{2} r, x_{MAX} = 2a \cdot \frac{4-\sqrt{2}}{7}\right]$
10. (Liceo scientifico suppletiva 1973/74) Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che la parabola da essa rappresentata sia tangente alle tre rette rispettivamente di equazione: $2x + y - 3 = 0$, $4x - y - 12 = 0$, $y = 0$. Detti A, B, C i rispettivi punti di contatto si determini sull'arco ACB il punto P tale che risulti massima l'area del triangolo APB. [$y = x^2 - 4x + 4$; A_{Max}: ¼]
11. (Liceo scientifico 1974/75) Si conduca internamente a un angolo retto $A\hat{O}B$ una semiretta OC che

forma con OA un angolo $A\hat{O}C = x$; presi rispettivamente su OA e OB due punti M e N tali che $\overline{OM} = 1, \overline{ON} = \sqrt{3}$, siano M' e N' le rispettive proiezioni di M e N su OC. Detto P il punto medio di $M'N'$ si determini x in modo che risulti massima l'area del triangolo NOP.

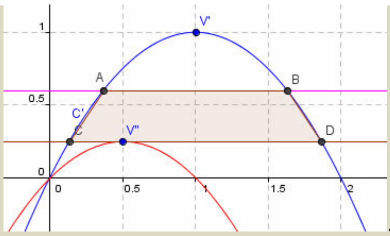
$$\left[\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot cos(x) \cdot \left[cos(x) + \sqrt{3} \cdot sin(x)\right]; x_{Max} = \frac{\pi}{6}\right]$$

12. (Liceo scientifico suppletiva 1974/75) Assegnato un riferimento cartesiano xOy, si consideri la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Detto AB l'arco di essa contenuto nel I quadrante, si determini su tale arco un punto P tale che, indicati con Q il punto di intersezione della retta tangente alla circonferenza per P con l'asse delle ascisse e con S quello di intersezione della retta OP con la retta di equazione $y = 2$, con $Q\hat{O}P = x$, l'area del triangolo QPS risulti minima. $\left[y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 - sin(x)}{cos(x)}; x_{\min} = \frac{\pi}{6}\right]$
13. (Liceo scientifico suppletiva 1974/75) In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, si conduca una corda AC tale che $C\hat{A}B = 2x$. Detto D il punto medio dell'arco BC, si determini x in modo che l'area del quadrilatero $ABCD$ risulti massima. $[2r^2 \cdot sin(x) \cdot cos(x) \cdot [1 + cos(2x)]; x_{MAX} = \pi/6]$
14. (Liceo scientifico 1975/76) In un cono circolare retto avente per raggio di base e per altezza rispettivamente i segmenti r e hr, si inscriva il cilindro avente la base sul piano di base del cono e il volume massimo. Per quale valore di h tale cilindro risulta anche equilatero? In questo caso particolare si trovi anche il cilindro inscritto per il quale è massima la superficie totale.
$[V(x) = h\cdot(-x^3 + rx^2), 0 < x < r, x_{MAX} = 2/3, h = 4, S(x) = 2\pi \cdot (4xr - 3x^2), x_{MAX} = 2/3r]$
15. (Liceo scientifico suppletiva 1975/76) In un sistema di assi cartesiani si considerino le parabole rappresentate dalle equazioni: $y = ax^2 - 2x + 2$, $y = 2ax^2 - 2x + 1$ e si determini il valore del parametro reale a in modo che risulti minima la distanza tra i due vertici. $\left[f(a) = \frac{2a^2 - 2a + 1}{2a^2}; a_{\min} = 1\right]$
16. (Liceo scientifico 1976/77) In un sistema di assi coordinati cartesiani si considerino le parabole rappresentate dalle equazioni: $y = 3x - x^2, y = x^2 - 2x$. Nella regione finita di piano delimitata dalle due curve si determini il triangolo avente un vertice nel punto comune alle due curve diverso dall'origine e il lato opposto parallelo all'asse delle ordinate e la cui area abbia valore massimo.
$$\left[A(k) = k^3 - 5k^2 + \frac{25}{4}k; k_{MAX} = \frac{5}{6}\right]$$
17. (Liceo scientifico 1976/77) I tre punti A, B C, non allineati, sono vertici di un triangolo ABC i cui lati BC e CA sono lunghi rispettivamente a, b. Si dica come deve essere scelto l'angolo $A\hat{C}B = \gamma$ affinché la somma dei quadrati delle altezze del triangolo relative ai lati BC e CA, diminuita del quadrato del lato AB, sia massima. Posto $b = m\cdot a$ ($m > 0$), si determini per quale valore di m, γ assume ampiezza minima. $\left[f(\gamma) = cos(\gamma) \cdot \left[2ab - \left(a^2 + b^2\right) \cdot cos(\gamma)\right], \gamma_{MAX} = cos^{-1}\left(\frac{ab}{a^2 + b^2}\right), m_{\min} = 1, \gamma_{\min} = \frac{\pi}{3}\right]$
18. (Liceo scientifico suppletiva 1976/77) Tra le parabole del tipo $y = -\frac{1}{4}x^2 + c$ con $c > 0$ si determini quella per la quale i punti P di essa che hanno minima distanza dall'origine O degli assi cartesiani di riferimento sono tali che $\overline{OP^2} = 12$. $\left[f(c) = \frac{x^4}{16} + \frac{2 - c}{2}x^2 + c^2, c_{\min} = 4\right]$

Lavoriamo insieme

Consideriamo il problema assegnato agli esami di Liceo scientifico 1977/78. In un sistema di assi coordinati cartesiani si considerino le due parabole C' e C'' rispettivamente di equazione $y = 2x - x^2$, $y = x - x^2$. Nella regione finita di piano delimitata dalle due curve si conducano: la retta di equazione $y = k$, $k > \frac{1}{4}$, sulla quale C' intercetta la corda AB; la retta tangente a C'' nel suo vertice, sulla quale la stessa C' intercetta la corda CD. Si determini per quale valore di k l'area del trapezio $ABCD$ acquista il valore massimo.

C' ha vertice in $V' \equiv (1;1)$, C'' ha vertice in $V'' \equiv (\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$, quindi la tangente ha equazione $y = \frac{1}{4}$.

Rappresentiamo il tutto. 

. Determiniamo le coordinate dei vertici del trapezio.

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + k = 0 \Rightarrow A \equiv \left(1 - \sqrt{1-k}; k\right), B \equiv \left(1 + \sqrt{1-k}; k\right);$$

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow C \equiv \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{4}\right), D \equiv \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{4}\right).$$

Quindi la funzione da massimizzare, indicando con AH l'altezza relativa alle basi parallele è

$$\frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot AH = \frac{\left(2 \cdot \sqrt{1-k} + \sqrt{3}\right)}{2} \cdot \left(k - \frac{1}{4}\right), \frac{1}{4} < k < 1$$

Calcoliamo la derivata prima: $\dfrac{9 - 12k + 4 \cdot \sqrt{3 \cdot (1-k)}}{8 \cdot \sqrt{1-k}}$, che si annulla, come unico valore accettabile perché appartenente a (1/4; 1), per k = 11/12. Si verifica facilmente che per tale valore si ha il massimo.

19. (Liceo scientifico suppletiva 1977/78) In un sistema di assi coordinati si considerino: la parabola di equazione $y = 2x - x^2$ che incontra l'asse delle ascisse nei punti O e C; la retta di equazione $y = k$ (con $0 < k < 1$) che incontra la parabola nei punti A e B. Si determini per quale valore del parametro k risulta massimo il volume del solido generato dal trapezio $OABC$ in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse. $\left[V(k) = \frac{2}{3}\pi k^2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \sqrt{1-k}\right), k_{MAX} = \frac{18 + 2 \cdot \sqrt{6}}{25}\right]$

20. (Liceo scientifico suppletiva 1977/78) Si determinino i coefficienti della funzione $y = 1 + ax + \frac{b}{x^2}$ in modo che la curva che la rappresenta abbia un estremo relativo in $A \equiv (1; 0)$. [a = –2/3, b = –1/3]

21. (Liceo scientifico 1978/79) Data una circonferenza di raggio r e l'angolo al centro $A\hat{O}B = 2x$, si costruisca sulla corda AB, da parte opposta rispetto al centro O, il triangolo isoscele ABC avente per base AB e per altezza $\overline{CH} = 2k \cdot \overline{AB}$. Si determini il valore dell'angolo $A\hat{O}B$ per il quale il quadrilatero $OACB$ ha area massima. Si calcoli il valore di k per cui l'ampiezza dell'angolo $A\hat{O}B$ del quadrilatero ottenuto è 150°. $\left[r^2 \cdot sin^2(x) \cdot \left[4k \cdot sin(x) + cos(x)\right], 0 < x < \frac{\pi}{2}; x_{MAX} = \frac{1}{2} \cdot cot^{-1}(-4k), k = \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$

22. (Liceo scientifico 1978/79) Data in un sistema di assi cartesiani ortogonali la parabola di equazione $y = x^2 + 2x + 1$ si scriva l'equazione della retta che, nella regione finita di piano limitata dalla stessa parabola e dagli assi, sia tangente alla curva e formi con gli assi stessi il triangolo di area massima. $\left[S(h) = \frac{h^3 - h^2 - h + 1}{4}, h_{MAX} = -\frac{1}{3}\right]$

23. (Liceo scientifico suppletiva 1978/79) Data una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, con $\overline{PH} = x$ altezza del rettangolo perpendicolare ad AB, si determinino su di essa i punti tali che, condotti i segmenti perpendicolari al diametro e alla tangente alla circonferenza on A, i rettangoli che si ottengono abbiamo area massima. $\left[f(x) = x \cdot \sqrt{x \cdot (2r - x)}, x_{MAX} = \frac{3}{2}r\right]$

24. (Liceo scientifico 1979/80) Sui lati opposti $\overline{AB} = 2x$ e CD del rettangolo $ABCD$ ed esternamente ad esso si costruiscano due triangoli isosceli APB e CQD aventi gli angoli alla base di ampiezza α. sa-

pendo che il perimetro dell'esagono *APBCQD* è $2p$, si determinino le lunghezze dei lati del rettangolo in modo che l'area dell'esagono risulti massima. Per quale valore di α tale esagono è inscrivibile in una circonferenza? $\left[2x\cdot\frac{x\cdot[sin(\alpha)-2]+p\cdot cos(\alpha)}{cos(\alpha)}, 0<x<\frac{1}{2}p\cdot cos(\alpha), 2x=\frac{p\cdot cos(\alpha)}{2-sin(\alpha)}, \alpha_{MAX}=\frac{\pi}{6}\right]$

25. (Liceo scientifico suppletiva 1979/80) In un settore circolare di raggio r e di ampiezza $\pi/6$, si inscriva un rettangolo avente un lato su uno dei raggi limitanti il settore e gli altri due vertici l'uno sull'arco e l'altro sul rimanente raggio. Si determini, tra tali rettangoli, quello per il quale è minima la diagonale in funzione dell'angolo x formato da un estremo della diagonale con il centro del settore e il relativo raggio. $\left[r^2\cdot\left[3sin^2(x)-2\cdot\sqrt{3}sin(x)cos(x)+1\right]; x_{\min}=tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

26. (Liceo scientifico 1980/81) In un sistema di assi cartesiani ortogonali si scrivano le equazioni delle due circonferenze passanti per l'origine O e aventi centri rispettivi nei punti $C' \equiv (2; 0)$ e $C'' \equiv (-½; 0)$. Condotte per il punto O due rette mutuamente ortogonali, delle quali la prima incontra le due circonferenze, oltre che nel punto O, nei punti A e B rispettivamente e la seconda nei punti C e D, si determini il quadrilatero *ACBD* avente area massima, in funzione del coefficiente angolare m di una delle due rette. $\left[\frac{25m}{2\cdot(1+m^2)}, m>0; m_{MAX}=1\right]$

27. (Liceo scientifico 1980/81) In un triangolo di base $\overline{AB}=a$ e altezza $\overline{CH}=h$ si inscriva il rettangolo con un lato su *AB* e i vertici opposti sugli altri due lati, che in una rotazione completa attorno alla retta *AB* genera il solido di volume massimo. Supposto che gli angoli adiacenti alla base siano uno doppio dell'altro, si calcolino i valori che essi assumono quando detto valore massimo è $\pi a^2/36$.
[$\pi a/h\,(-x^3+hx^2)$, $x_M = 2/3h$; 30°; 60°; 90°]

28. (Liceo scientifico suppletiva 1980/81) In una circonferenza di raggio r si consideri la corda *AB* che dista $r/2$ dal centro. Si prenda sul maggiore degli archi $\widehat{AB}$ il punto C, e si prolunghi *AC* di un segmento *CD* tale che sia $\overline{CD}=\overline{AC}$ e si determini per quale valore di $\angle B\hat{A}C = x,\ 0<x<\frac{\pi}{2}$ è massima l'area del triangolo *CDB*. $\left[\frac{r^2}{2}\cdot sin(x)\cdot\left[3cos(x)+\sqrt{3}sin(x)\right]; x_{MAX}=\frac{\pi}{3}\right]$

29. (Liceo scientifico suppletiva 1982/83) Sulla semiretta asse di simmetria di una parabola assegnata si fissi un punto Q. Si determinino, in un sistema di assi cartesiani opportunamente scelto, le coordinate dei punti P della parabola le cui distanze da Q hanno un valore minimo e si scriva l'equazione della circonferenza avente centro in Q e per raggio tale valore minimo.
$\left[f(x)=a^2x^4+(1-2ab)\cdot x^2+b^2, a,b\in\mathbb{R}; x_{\min}=\pm\sqrt{\frac{2ab-1}{2b^2}}\vee 0\right]$

30. (Liceo scientifico 1983/84) Si consideri una circonferenza di diametro $\overline{AB}=2r$ e si conduca per il punto A, perpendicolarmente al piano della stessa circonferenza, il segmento $\overline{AP}=a$. Se *MN* è una corda della circonferenza, perpendicolare ad *AB*, si determini per quale posizione di *MN* risulta massimo il volume della piramide *PAMN*. H è il piede della perpendicolare condotta da A a *MN*, con $\overline{AH}=x$. $\left[\frac{ax}{3}\cdot\sqrt{x\cdot(2r-x)},\quad 0<x<2r, x_{MAX}=\frac{3}{2}r\right]$

31. (Liceo scientifico suppletiva 1983/84) Dato il triangolo rettangolo isoscele *ABC* con $\angle\hat{A}=90°$, $\overline{AB}=a$, si conduca per il vertice C la retta non secante il triangolo tale che risulti massima la somma delle perpendicolari *AM* e *BN* condotte su di essa. Si costruisca graficamente la soluzione. Sia $\angle A\hat{C}M = x,\ 0\le x\le 135°$. [$f(x) = a\cdot[2sin(x)+cos(x)]$, $x_{Max} = tan^{-1}(2)$]

32. (Liceo scientifico suppletiva 1983/84) Si considerino le parabole di equazioni $y^2=\frac{x}{2}\quad y^2=-x+a^2$.

Nella regione finita di piano compresa fra le due curve e l'asse delle ascisse si inscriva il rettangolo con i lati paralleli agli assi coordinati che, in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse, genera il cilindro di massimo volume. $\left[V(h)=\pi\cdot\left(-3h^4+a^2h^2\right), h_{MAX}=a\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}, V_{MAx}=\frac{\pi}{24}a^4\right]$

33. (Liceo scientifico 1984/85) In una circonferenza di centro O e raggio unitario si conduca la corda AB tale che, costruito il triangolo equilatero ABC da parte opposta di O rispetto ad AB, l'area del quadrilatero $ABCO$ risulti massima. Si esprimano i valori che assumono la lunghezza della corda AB e l'ampiezza dell'angolo $\angle A\hat{O}B = x$. $\left[f(x)=\sqrt{3}\cdot sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot sin(x), x_{MAX}=\frac{5}{6}\pi\right]$

34. (Liceo scientifico 1984/85) In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la cubica di equazione $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ e si individui la traslazione $x = X + a$; $y = Y + b$ che porta l'origine del sistema di riferimento nel punto della curva di minimo relativo. Si scriva l'equazione della curva nel nuovo sistema di riferimento. [$x_{Max} = 1$, $x_{min} = 2$; $a = 2$, $b = -1$;$Y = 2X^3 + 3X^2$]

35. (Liceo scientifico PNI 1989/90) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è assegnata la parabola di equazione $y = -x^2 - x + 6$. Siano P un suo punto, H la proiezione di P sull'asse delle ascisse, P' e H' rispettivamente i simmetrici di P e H rispetto all'asse delle ordinate. Espresso in funzione dell'ascissa x di P il semiperimetro p del rettangolo $PP'H'H$, si studi come varia p al variare del punto sulla parabola, determinandone in particolare gli estremi relativi.
[$p = 2\cdot|x| + |x^2 + x - 6|$; x_{Max}: $-3/2 \vee 1/2$; x_{Min}: $-3 \vee 0$]

36. (Liceo scientifico 1989/90) La funzione $y = x \cdot e^{-x}$ rappresenti per $x \geq 0$ la legge oraria del moto di un punto che si muove lungo una semiretta (x rappresenti il tempo e y la distanza del punto P dall'origine della semiretta su cui si muove). Determinare in quale istante P raggiunge la massima velocità, in quale istante la velocità è nulla e in quale istante l'accelerazione è nulla. [$v_{Max} = v(0)$, $v(1) = 0$, $a(2) = 0$]

37. (Liceo scientifico PNI 1989/90) Data la semicirconferenza di centro O e raggio r, si consideri il triangolo isoscele ABV i cui lati obliqui AV e BV siano tangenti alla semicirconferenza rispettivamente nei punti F e G e tale che la proiezione di V sulla base AB coincida con O. Detto P un punto dell'arco FG e, rispettivamente, L e M le intersezioni della tangente alla semicirconferenza in P con i lati AV e BV, si dimostri che i triangoli AOL e BMO sono simili. Indicato con x uno degli angoli alla base del triangolo ABV, si esprima in funzione di esso la somma s tra il lato del quadrato equivalente al rettangolo di lati AL e BM e l'altezza VO del triangolo ABV, osservando che s non dipende dalla posizione del punto P. Si determini per quale valore di x la somma s è estrema. $\left[s=r\cdot\frac{sin(x)+cos(x)}{sin(x)\cdot cos(x)}, 0<x<\frac{\pi}{2}; x_{\min}=\frac{\pi}{4}\right]$

38. (Liceo scientifico suppletiva 1990/91) In un piano ortogonale Oxy si consideri nel primo quadrante la circonferenza di raggio unitario tangente ai due assi coordinati. Detta r una retta passante per l'origine di coefficiente angolare m, e secante la circonferenza nei punti A e B, si studi come varia, al variare di r, l'area del triangolo ABC, essendo C il centro della circonferenza, e si determinino in particolare le due rette per cui detta area assume valore massimo. $\left[A=\frac{\sqrt{2m}\cdot|m-1|}{1+m^2}; y=\left(2\pm\sqrt{3}\right)\cdot x\right]$

39. (Liceo scientifico suppletiva 1992/93) In un sistema di assi cartesiani ortogonali siano $A\equiv\left(-1, \sqrt{3}\right)$ e $B \equiv (1; 1)$. Determinare il punto P (x; 0) tale che sia minimo $y=\sqrt{2}\cdot\overline{AP}+\overline{PB}$. Tracciata la retta r perpendicolare all'asse delle x in P verificare che, detti β l'angolo formato dalla semiretta PB con la retta r e α l'angolo formato dalla semiretta PA con la retta r, è $\frac{sin(\beta)}{sin(\alpha)}=n$. [$x_{min} = 0$]

40. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1993/94) Sono dati una circonferenza Γ di diametro $\overline{AB}=4$ e il triangolo rettangolo ABC tale che la sua ipotenusa AC incontra Γ in P e tale che la sua misura sia $8\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}$. Si conduca una retta perpendicolare ad AB che incontra rispettivamente AB, Γ e AC in D, E e F e siano E' ed F' le proiezioni di E ed F su BC. Si studi al variare di AD, la variazione del volume V

del solido *S* generato, in un giro completo attorno ad *AB*, dal rettangolo *EE′F′F*. Osservato che *V* ha due massimi relativi, si calcoli, quando *V* assume il suo valore massimo assoluto, l'area della superficie totale di *S*. $\left[V(x)=\frac{4}{5}\pi\cdot(4-x)\cdot\left|5x-2x^2\right|;x_{MAX}=1;S=\frac{6}{5}\pi\cdot\left(5\cdot\sqrt{3}+\sqrt{15}+4\right)\right]$

41. (Maturità magistrale PNI suppletiva 1993/94) Su un piano α è assegnata la circonferenza Γ di centro *O* e diametro $\overline{AB}=2$ e sulla perpendicolare per *O* al piano α è fissato il punto *C* tale che $\overline{OC}=\overline{AB}$. Sia δ il cilindro circolare retto di base a circonferenza Γ e altezza *OC*. Si conduca un piano β, parallelo ad α, che incontra il segmento *OC* in un punto *O′* e si consideri il solido formato dal cilindro circolare retto δ′, di base la circonferenza Γ e altezza *OO′*, sormontato dalla sfera di diametro *O′C*. Si studi come varia il volume del detto solido al variare del raggio della sfera. Nel caso in cui il volume diventa minimo si conduca un piano parallelo a *OC* e tangente alla sfera che sega il cilindro δ′ secondo un rettangolo. Si calcoli il perimetro della proiezione di detto rettangolo dal punto *C* sul piano α.
$\left[V(x)=\frac{2}{3}\pi\cdot\left(2x^3-3x+3\right);x_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2};2p=3\cdot\sqrt{2}\right]$

42. (Liceo scientifico suppletiva 1994/95) Nel parallelepipedo rettangolo di vertici *A, B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* le facce *ABCD* ed *EFGH* sono opposte e i segmenti *AE*, *BF*, *CG* sono spigoli. Inoltre $\overline{AB}=3x$, $\overline{AD}=4x$, $\overline{AE}=2a-x$, essendo *a* una lunghezza nota e *x* una lunghezza incognita. Chiamato *P* il piede della perpendicolare condotta da *A* alla retta *FH*, considerare il poliedro Σ avente per vertici i punti *A*, *B*, *F*, *E*, *P*. Calcolare il valore di *x* che rende massimo il volume di Σ, il valore di *a* per il quale questo volume massimo è uguale a $128/75cm^3$ e, infine, per tale valore di *a*, l'area della superficie del solido Σ di volume massimo.
$\left[V(x)=\frac{36}{25}x^2\cdot(2a-x),0<x<2a;x_{MAX}=\frac{4}{3}a;a=1cm;S_{\max}=\frac{8}{3}+\frac{4}{75}\cdot(107+5809)cm^2\right]$

43. (Liceo scientifico 1995/96) Considerato il rettangolo *ABCD*, il cui lato *AD* è lungo 8*a*, dove *a* è una lunghezza nota, sia *M* il punto medio del lato *AB*. Sulla perpendicolare al piano del rettangolo condotta per *M*, prendere un punto *V* in modo che il piano del triangolo *VCD* formi con il piano del rettangolo un angolo α tale che *tan*(α) = ¾. Mostrare che la superficie laterale della piramide di vertice *V* e base *ABCD* è costituita da due triangoli rettangoli e da due triangoli isosceli. Sapendo che l'area di tale superficie laterale è $92a^2$, calcolare la lunghezza di *AB*. Constatato che tale lunghezza è 5*a*, condurre un piano σ parallelo ala base della piramide e proiettare ortogonalmente su tale base il poligono sezione di σ con la piramide stessa, ottenendo in questo modo un prisma retto. Determinare la posizione di σ per la quale il volume di tale prisma risulta massimo. A completamento del problema, dimostrare che, se i numeri reali positivi *x*, *y* variano in modo che la loro somma si mantenga costante, allora il prodotto $x^2 \cdot y$ è massimo quando risulta $x = 2y$. [Vol. massimo se la distanza di σ dal piano di base è 2*a*]

44. (Liceo scientifico 1996/97) Considerare i coni circolari retti in cui è uguale a una lunghezza assegnata 2*k*, la somma del doppio dell'altezza con il diametro della base. Fra tali coni determinare quello di volume massimo e stabilire se ha anche la massima area laterale. Nel cono di volume massimo inscrivere poi il cilindro circolare retto avente la base sul piano di base del cono e volume massimo.
$\left[V_{MAX}=\frac{4}{81}\pi\ \ k^3,\nexists S_{\max};V_{ci}=\frac{2}{729}\pi\cdot k^3\right]$

45. (Liceo scientifico suppletiva 1996/97) Data una semicirconferenza di centro *O* e diametro $\overline{AB}=2$, si tracci la tangente *t* a detta semicirconferenza nel punto *A*. Preso un punto *P* sulla semicirconferenza, si tracci la perpendicolare *PH* alla retta *t*. Dimostrare che la semiretta *PA* è bisettrice dell'angolo $H\hat{P}O$. Posto $\overline{PH}=x$ esprimere in funzione di *x* l'area *y* del quadrilatero *AOPH*. Determinare per quale valore di *x* l'area $y = f(x)$ è massima. $\left[f(x)=\frac{1}{2}\cdot(x+1)\cdot\sqrt{2x-x^2};x_{MAX}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$

46. (Liceo scientifico suppletiva 1996/97) Due circonferenze concentriche γ_1 e γ_2 di centro *C* hanno raggio rispettivamente uguale a *x* e a 1 , con $x< 1$. Da un punto *P* di γ_2 tracciare le tangenti a γ_1. Siamo *Q* e *R* i

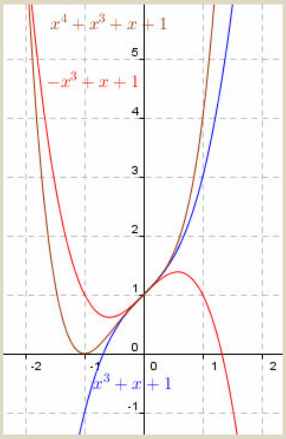
due punti di tangenza. Determinare la funzione $y = f(x)$ che rappresenta l'area del triangolo *PQR* in funzione di *x*. Rappresentare in coordinate cartesiane ortogonali la funzione $y = f(x)$. Verificare che l'area *y* è massima per $x = ½$ e dimostrare che in tale caso il triangolo *PQR* è equilatero.

$$\left[y = x \cdot \sqrt{\left(1 - x^2\right)^3}\right]$$

47. (Liceo scientifico 1999/00) Il candidato dimostri i seguenti enunciati:
- Fra tutti i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa, quello isoscele ha l'area massima.
- Fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una data sfera, quello di minima area laterale ha il suo vertice distante dalla superficie sferica della quantità $r \cdot \sqrt{2}$, se *r* è il raggio della sfera.

Lavoriamo insieme

Consideriamo il problema assegnato agli esami di Liceo scientifico PNI nell'a.s. 1999/2000.
Sia f(*x*) una funzione reale di variabile reale tale che valgano le seguenti condizioni: $f(x_0) > 0$, $f'(x_0) > 0$, $f''(x_0) = 0$, dove x_0 è un particolare valore reale.
a) Spiegare perché tali condizioni non sono sufficienti a determinare l'andamento di $f(x)$ in un intorno di x_0.
Noi sappiamo che a destra di x_0 la funzione è positiva e crescente, ma non sappiamo cosa accade a sinistra, quindi potremmo avere sia una funzione crescente in un intorno di 0 che una che invece in o cambia crescenza. Cioè in $x = 0$ può esservi sia un punto di flesso ascendente, sia uno in cui vi è un cambio di curvatura.
b) Trovare almeno tre funzioni polinomiali $f(x)$, di grado superiore al 1°, aventi andamenti diversi in $x_0 = 0$, tali che: $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$.
Consideriamo un generico polinomio di III grado: $ax^3 + bx^2 + cx + d$ e imponiamo le condizioni, tenendo conto che ogni derivazione diminuisce di una unità il grado del polinomio, dovendo calcolare in *x* 0 0, ciò equivale a dire che sono unitari i coefficienti *c* e *d* e nullo il coefficiente *b*. Quindi otteniamo i generici polinomi: $ax^3 + x + 1$, che per $a > 0$ sono funzioni sempre crescenti con un flesso per $x = 0$, mentre per $a < 0$ invece hanno due estremi relativi: $3ax^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3a}}$. Ma anche il polinomio $ax^4 + bx^3 + x + 1$ verifica le condizioni e questo per $x = 0$ ha un andamento ancora diverso, come mostrato in figura seguente.



c) Determinare, se possibile, tutte le rette tangenti ai grafici delle funzioni trovate e parallele alla retta di equazione $y = x + 1$.
Considerando le cubiche, la generica derivata è $3ax^2 + 1$, che deve essere uguale a 1, il che accade per $x = 0$, quindi è proprio la tangente inflessionale la retta cercata, che coincide con la stessa retta data: $y = x + 1$.

48. (Liceo scientifico 2000/2001) Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:
a) area massima e perimetro massimo; b) area massima e perimetro minimo; c) area minima e perimetro massimo; d) area minima e perimetro minimo. Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione. [a)]

49. (Liceo scientifico Scuole italiane all'estero 2000/2001) E′ assegnato un cilindro equilatero *Q* il cui raggio di base misura *a*. a) Si determini il cono *C* di volume minimo circoscritto al cilindro (*C* e *Q* hanno basi complanari) $[V_{min} = 9/2\pi a^3]$ b) Si determini il valore di *a* per il quale il volume

di *C*, approssimato alla prima cifra decimale, è $31{,}4 dm^3$ $\left[a = \sqrt[3]{\frac{20}{9}} dm\right]$ c) Si determini il volume della sfera *S* circoscritta a *C*. [$24565\pi/256\ dm^3$]

50. (Liceo scientifico 2000/2001) Considerata la funzione: $f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x$, dove a è un parametro reale non nullo, determinare i valori di a per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti. [$a < -9/4 \vee a > 0$; $-9/4 < a < 0$]
51. (Liceo scientifico 2003/2004) Date un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in (1; 3) e un minimo relativo in (–1; 2). [P.e. $y = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x + 5/2$]
52. (Liceo scientifico 2001/2002) Si considerino le lunghezze seguenti: [1] $a + 2x$, $a - x$, $2a - x$; dove a è una lunghezza nota non nulla e x è una lunghezza incognita. a) Determinare per quali valori di x le lunghezze [1] si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere. [$0 < x < a/2$] b) Stabilire se, fra i triangoli non degeneri i cui lati hanno le lunghezze [1], ne esiste uno di area massima o minima. $\left[x_{Max} = \frac{a \cdot \sqrt{7} - 1}{6}; \nexists x_{\min}\right]$ c) Verificato che per $x = \frac{a}{4}$ le [1] rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo. [ottusangolo] d) Indicato con *ABC* il triangolo di cui al precedente punto c), in modo che *BC* sia il lato maggiore, si conduca per *A* la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto *D* tale che *AD* sia lungo *a*: calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani *DBC* e *ABC*. [≈ 57°]
53. (Liceo scientifico PNI 2002/2003) Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono retto di apotema 2 *dm*? [≈ 322,45 *cl*]
54. (Liceo scientifico PNI 2003/2004) Tra i triangoli di base assegnata e di uguale area, dimostrare che quello isoscele ha perimetro minimo.
55. (Liceo scientifico 2003/2004) *ABC* è un triangolo rettangolo di ipotenusa *BC*. a) Dimostrate che la mediana relativa a *BC* è congruente alla metà di *BC*. b) Esprimete le misure dei cateti di *ABC* in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa. $\left[\sqrt{i \cdot \left(\frac{i}{2} - \sqrt{\left(\frac{i}{2}\right)^2 - h^2}\right)}; \sqrt{i^2 - \left(\frac{i^2}{2} - i \cdot \sqrt{\left(\frac{i}{2}\right)^2 - h^2}\right)}\right]$ c) Con $BC = 3\ m$, determinate il cono *K* di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno ad uno dei suoi cateti e la capacità in *litri* di *K*. [≈ 2094,39 *l*] d) Determinate la misura approssimata, in radianti ed in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono *K*. [≈ 5,13 rad, ≈ 293° 56′ 20″]
56. (Liceo scientifico 2004/2005) Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 *litri*, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta e si consideri anche il materiale per i coperchi)

    [Il foglio di latta per il contenitore, esclusi i coperchi, deve essere quadrato di lato lungo $\sqrt[3]{1{,}6\pi}$]

57. (Liceo scientifico 2004/2005) Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.
58. (Liceo scientifico PNI 2004/2005) Nel piano *Oxy* sono date le curve λ: $x^2 = 4(x - y)$ e r: $4y = x + 6$. a) Si provi che λ e r non hanno punti comuni. Si trovi il punto $P \in \lambda$ che ha distanza minima da r. [$P \equiv (3/2; 15/16)$]
59. (Liceo scientifico 2005/2006) Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare. a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare? [Quella quadrata] b) Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché: la somma delle due aree sia

minima? $\left[m \equiv \left(\frac{\pi}{\pi+4}, \frac{1}{4\cdot(\pi+4)} \right) \right]$; la somma delle due aree sia massima? $\left[M \equiv \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4\pi} \right) \right]$ c) Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno? [33,1%]

60. (Liceo scientifico 2005/2006) Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di 50 cm^2, margini superiore e inferiore di 4 *cm* e margini laterali di 2 *cm*. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare? [9 *cm* × 18 *cm*]

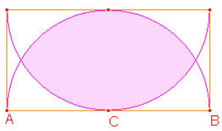
61. (Liceo scientifico 2005/2006) La funzione $f(x) = a\ sin(x) + b\ cos(x)$ ha un estremo relativo per $x = 4\pi/3$, ed è $f(2\pi/3) = 1$. Si trovino *a* e *b* e si dica quale è il periodo di $f(x)$. $\left[a = \sqrt{3}, b = 1; P = 2\pi \right]$

62. (Liceo scientifico PNI 2006/2007) Sia *a* un numero reale maggiore di zero e sia *g* la funzione definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, da: $g(x) = a^x + a^{-x}$. Si dimostri che, se $a \neq 1$, *g* è strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$.

63. (Liceo scientifico 2006/2007) Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice *C* varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati *AC* e *BC* e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi. [≈ 52°14′]

64. (Liceo scientifico 2006/2007) Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1 *m*. Si dica quanti litri di olio il serbatoio può contenere. [≈ 403]

65. (Liceo scientifico 2007/2008) Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro *C* e diametro $AB = 2$, si affrontino le seguenti questioni: a) Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad *AB* in *C* e di uguale raggio 1.



Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$ b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ. [ha una dimensione doppia dell'altra] c) Sia *P* un punto della semicirconferenza di Γ, *H* la sua proiezione ortogonale su *AB*. Si ponga $P\overset{\frown}{C}B = x$ e si esprimano in funzione di *x* le aree S_1 e S_2 dei triangoli *APH* e *PCH*. Si calcoli il rapporto $f(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)}$. $\left[f(x) = \frac{1 + cos(x)}{|cos(x)|} \right]$ Si studi $f(x)$ e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.

[infiniti massimi per $x = (2\ k + 1)\pi$ e infiniti minimi per $x = 2\ k\pi$]

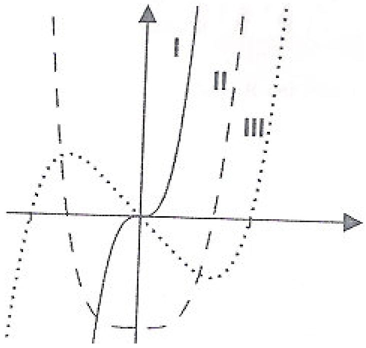
66. (Liceo scientifico 2007/2008) Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie *S* (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo? $\left[V_{Max} = \sqrt{\frac{S^3}{27\pi}} \right]$

67. (Liceo scientifico 2010/2011) Sia *f* la funzione definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali da $f(x) = (ax + b)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ dove *a* e *b* sono due reali che si chiede di determinare sapendo che *f* ammette un massimo nel punto di ascissa 4 e che $f(0) = 2$. [$a = 1$, $b = -1$]

68. (Liceo scientifico 2010/2011) Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate (4;0). $\left[\left(2; 2\cdot\sqrt{2} \right) \right]$

69. (Liceo scientifico 2010/2011) Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione *f*, un altro lo è della funzione derivata *f′* e l'altro ancora di *f″*. quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici? [D)]

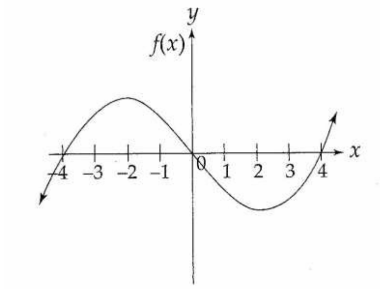
	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

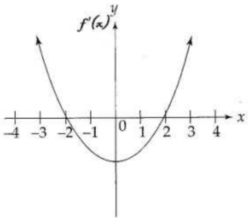


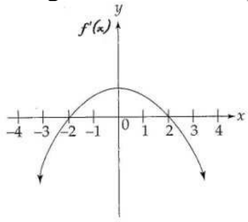
70. (Liceo scientifico PNI 2010/2011) Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 10 *cm*, qual è quello di superficie laterale massima? $\left[r_c = \frac{20\cdot\sqrt{2}}{3}, a_c = \frac{20\cdot\sqrt{6}}{3}\right]$

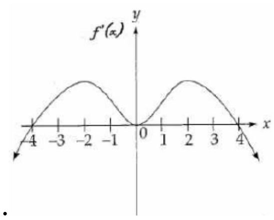
71. (Liceo scientifico PNI 2011/2012) Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r, quello di minima area laterale ha il vertice che dista $r\cdot\sqrt{2}$ dalla superficie sferica.

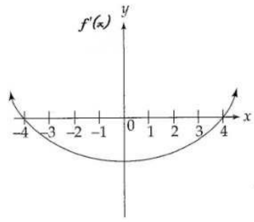
72. (Liceo scientifico 2012/2013) Se la figura a lato rappresenta il grafico di $f(x)$, quale dei seguenti potrebbe essere il grafico di $f'(x)$? Si giustifichi la risposta. [A]




A.


B.


C.


D.

Rappresentazione grafica di una funzione

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti per potere rappresentare una qualsiasi funzione. Ovviamente ciò non significa che sappiamo rappresentare ogni funzione.

Esempio 12

Della funzione $f(x) = x^6 + x^5 + x - 1$, si determina facilmente il dominio, che è $\mathbb{R}$. Non siamo però in grado di risolvere l'equazione $x^6 + x^5 + x - 1 = 0$, quindi non sappiamo stabilire quante e quali intersezioni ha con l'asse x. Possiamo osservare che $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 2 > 0$, quindi per il teorema di esistenza degli zeri c'è certamente almeno una intersezione con l'asse delle x. Potremmo determinare un suo valore approssimato con il metodo dicotomico. Allo stesso modo avremmo difficoltà a studiare la crescenza della funzione, poiché $f'(x) = 6x^5 + 5x^4 + 1$. Anche questo polinomio è difficile da scomporre.

Diciamo che, come visto nell'esempio ragionando riusciamo a risolvere tanti problemi e anche se non riusciamo a determinare *esattamente* il grafico della funzione, nel senso che non troviamo i valori esatti delle intersezioni con gli assi o degli estremi relativi, in genere riusciamo a capire se e quante intersezioni o estremi vi sono. Prima però di passare a uno studio completo di funzione, dobbiamo considerare il cosiddetto comportamento asintotico.

Esempio 13

Il dominio della funzione $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-x}{x^2-4}$ è $x \neq \pm 2$. Quindi dobbiamo stabilire cosa accade quando ci avviciniamo a queste due ascisse. Dobbiamo cioè calcolare i limiti seguenti

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-x}{x^2-4}=+\infty,\ \lim_{x\to -2^+}\frac{x^2-x}{x^2-4}=-\infty,\ \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-x}{x^2-4}=-\infty,\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-x}{x^2-4}=+\infty$$

Qual è il significato geometrico di questi calcoli? Che se ci avviciniamo a -2 o a 2, la funzione *tende* a diventare la retta $x = -2$ o $x = 2$. Cioè, usando un linguaggio già noto, che le rette $x = -2$ e $x = 2$ sono due asintoti per la funzione. Dobbiamo però indagare anche cosa accade quando ci avviciniamo agli estremi infiniti della funzione: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-x}{x^2-4}=1$. Anche in questo caso abbiamo un asintoto, poiché la funzione *tende* a diventare la retta $y = 1$.

In vista dell'esempio precedente poniamo le seguenti definizioni.

Definizione 5

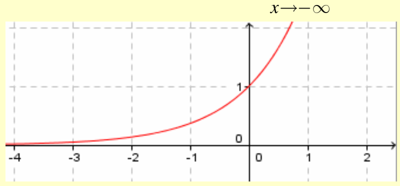
Per una funzione $f(x)$ la retta $x = a$ è un
- **asintoto verticale sinistro** se $\lim\limits_{x\to a^-} f\left(x\right)=\infty$;
- **asintoto verticale destro** se $\lim\limits_{x\to a^+} f\left(x\right)=\infty$;
- **asintoto verticale** se $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=\infty$;

Per una funzione $f(x)$ la retta $y = a$ è un
- **asintoto orizzontale sinistro** se $\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(x\right)=a$;
- **asintoto orizzontale destro** se $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(x\right)=a$;
- **asintoto orizzontale** se $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f\left(x\right)=a$.

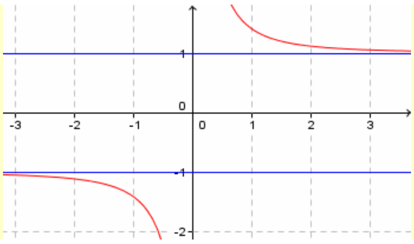
Nelle definizioni precedenti il segno dell'infinito è irrilevante. Una funzione può avere infiniti asintoti verticali, come accade per $f(x) = tan(x)$; mentre può avere al massimo 2 asintoti orizzontali diversi, uno per lato.

Esempio 14

- La funzione $f\left(x\right)=e^x$ ha l'asse x come asintoto orizzontale sinistro, dato che $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x=0$, ma non ha asintoto orizzontale destro, dato che $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x=+\infty$.



- La funzione $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ ha la retta $y = 1$, come asintoto orizzontale destro, dato che $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1$, mentre ha asintoto orizzontale sinistro la retta $y = -1$, infatti $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}\right)=-1$. La motivazione del segno meno davanti alla radice quadrata, quando portiamo x dentro la radice è motivata dal fatto che per x che tende a meno infinito, il denominatore è negativo, portando il fattore all'interno della radice diventerebbe positivo.



In effetti per alcune funzioni è possibile l'esistenza di un asintoto di tipo diverso, ossia una retta non parallela ad alcuno degli assi coordinati.

Definizione 6

Per una funzione $f(x)$ la retta di equazione $y = mx + p$ è un

- **asintoto obliquo sinistro** se $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx-p\right]=0$;
- **asintoto obliquo destro** se $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx-p\right]=0$;
- **asintoto obliquo** se $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx-p\right]=0$.

Il seguente risultato permette la determinazione dei coefficienti della retta asintotica.

Teorema 9

La retta $y = mx + p$ è un **asintoto obliquo** per la funzione $f(x)$ se

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-m\cdot x\right]=p\in\mathbb{R}.$$

Dimostrazione

Dalla definizione abbiamo:

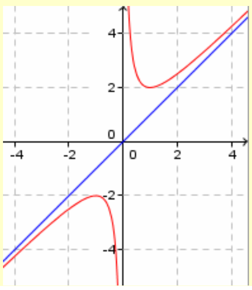
$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx-p\right]=0\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(mx+p)\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{mx+p}{x}=m$$

E, nel momento in cui m è reale e diverso da zero: $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=p$.

Esempio 15

La funzione $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ ha un asintoto obliquo che andiamo a determinare usando i risultati del Teorema 9: $m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1$. Essendo m diverso da zero, andiamo a determinare p.

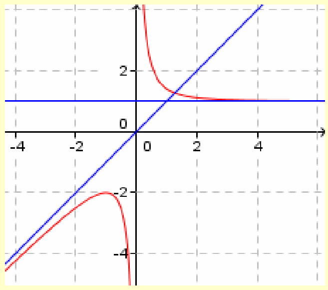
$p=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x^2}=0$. Quindi l'asintoto obliquo ha equazione $y = x$.



Ovviamente una funzione non può avere contemporaneamente un asintoto orizzontale e uno obliquo *dalla stessa parte*, ma può averli da *parti opposte*.

Esempio 16

La funzione $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x} & x<0\\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} & x>0\end{cases}$, per quanto visto negli esempi precedenti, ha asintoto obliquo sinistro di equazione $y = x$ e asintoto orizzontale destro di equazione $y = 1$.



Per alcune funzioni gli asintoti si determinano quasi senza calcoli.

Definizione 7

Una funzione $f(x)$ che può esprimersi come somma di prodotti di numeri per potenze reali di x si chiama **polinomio generalizzato di grado la massima potenza di *x***. Il coefficiente della potenza massima si chiama **coefficiente direttore**.

Esempio 17

La funzione $f(x)=x+\sqrt{x}-2\cdot\sqrt[3]{x^4}+x^{\pi}-4$, è un polinomio generalizzato di grado π.

Corollario 1

Data la funzione $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, in cui $P(x)$ e $Q(x)$ sono due polinomi generalizzati di gradi α e β e di coefficienti direttori a e b. Allora $f(x)$:

- ha asintoto orizzontale se è $\alpha \le \beta$ ($y = 0$ se $\alpha < \beta$; $y = a/b$ se $\alpha = \beta$);
- non ha asintoti orizzontali se è $\alpha > \beta$;
- ha un asintoto obliquo se è $\alpha = \beta + 1$.

Dimostrazione ovvia, dal calcolo dei limiti.

Esempio 18

- La funzione $f(x)=\dfrac{x^2+\sqrt{x}-x^e}{x^3-1}$ ha l'asse x come asintoto orizzontale, poiché $e < 3$.
- La funzione $f(x)=\dfrac{x^3+\sqrt{x}}{2x^3-1}$ ha la retta $y = ½$., come asintoto orizzontale, poiché entrambi i polinomi hanno grado 3.
- La funzione $f(x)=\dfrac{x^4+\sqrt{x}-1}{2x^3-x+\sqrt{x}}$ ha asintoto obliquo, poiché il numeratore ha grado 4 e il denominatore grado 3. I coefficienti dell'equazione dell'asintoto: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+\sqrt{x}-1}{2x^4-x^2+x\cdot\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{2x^4}=\dfrac{1}{2}$ e $p=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4+\sqrt{x}-1}{2x^3-x+\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2}\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{2x^4}+2\sqrt{x}-2-\cancel{2x^4}+x^2-x\cdot\sqrt{x}}{2\cdot\left(2x^3-x+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{4x^3}=0$. Quindi l'asintoto è $y = ½x$.

A questo punto siamo in grado di studiare una funzione. Possiamo fare uno schema di passi da effettuare, sottolineando che non sempre possono effettuarsi e non sempre sono utili.

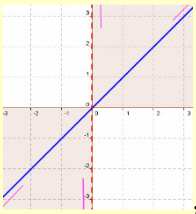
Schema per lo studio di una funzione

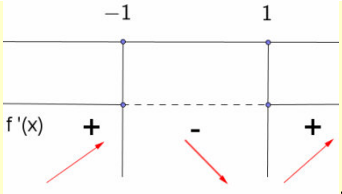
1. Determinazione del dominio.
2. Determinazione di eventuali simmetrie.
3. Studio del segno e ricerca di eventuali intersezioni con gli assi coordinati.
4. Studio del comportamento agli estremi con conseguente ricerca di eventuali asintoti.
5. Studio del segno della derivata prima, con conseguente determinazione degli intervalli di crescenza e decrescenza ed eventuali estremi relativi.
6. Studio di quel che accade dove la funzione è continua ma non derivabile.
7. Studio del segno della derivata seconda, con conseguente determinazione degli intervalli di concavità e convessità ed eventuali estremi relativi e flessi a tangente obliqua.

Adesso vediamo alcuni esempi.

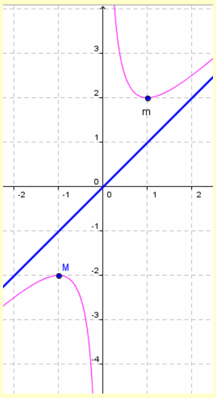
Esempio 19

Studiamo la funzione $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. È buona norma rappresentare man mano tutto ciò che otteniamo.

1. *Determinazione del dominio della funzione*
   Facilmente si ha: $x \neq 0$.
2. *Determinazione di eventuali simmetrie della funzione*
   Intanto osserviamo che ha senso effettuare questa ricerca perché il dominio è esso stesso simmetrico, essendo privo solo di $x = 0$. In effetti la funzione è dispari: $f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -f(-x)$. Ciò vuol dire che possiamo studiare la funzione solo per $x > 0$, o comunque che ci aspettiamo valori simmetrici, quindi se troviamo un estremo relativo in $(a; b)$ deve esserci un estremo relativo di tipo diverso in $(-a; -b)$.
3. *Studio del segno della funzione e sue eventuali intersezioni con gli assi coordinati*
   La funzione ovviamente non può avere intersezioni con l'asse y perché tale retta non appartiene al dominio. Non ha neppure intersezioni con l'asse delle ascisse perché il numeratore è sempre positivo. Quindi il segno della funzione è dato solo dal denominatore. Pertanto la funzione è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$.
4. *Studio del comportamento agli estremi con conseguente ricerca di eventuali asintoti*.
   Vediamo cosa accade nell'intorno di $x = 0$. $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$. Quindi l'asse y è asintoto verticale. Dal Corollario 1 sappiamo che non vi sono asintoti orizzontali, ma vi è un asintoto obliquo, che abbiamo già determinato nell'Esempio 15, la retta di equazione $y = x$.
   Fino adesso abbiamo le seguenti informazioni, in cui indichiamo con il colore fucsia i tratti di funzione: , quindi ci aspettiamo almeno un minimo relativo per $x > 0$ e almeno un massimo relativo per $x < 0$, con ascisse e ordinate fra loro opposte.
5. *Studio del segno della derivata prima della funzione*.
   Abbiamo: $f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+1)\cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$, che si annulla per $x = \pm 1$. Il segno dipende

solo dal numeratore e si ha: 

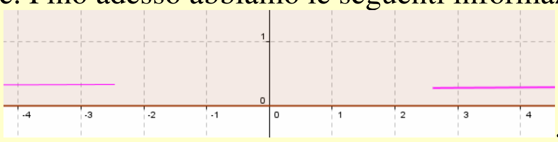
. Quindi abbiamo un massimo relativo per $x = 1$, la cui ordinata è $f(1) = 2$, e un minimo relativo per $x = –1$, la cui ordinata è $f(–1) = –2$. In accordo con la simmetria della funzione e con quanto congetturato al punto 4.

6. *Studio di quel che accade dove la funzione è continua ma non derivabile*
   Non ci sono di questi punti.
7. *Studio del segno della derivata seconda della funzione.*
   Dalle informazioni ottenute non è necessario, poiché facilmente si capisce che non ci possono essere punti di flesso e che la curva volge la concavità verso il basso per $x < 0$ e verso l'alto per $x > 0$. Facciamolo lo stesso per verifica e per esercitarci. Si ha: $f''(x) = \dfrac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 1) \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{\cancel{2x^3} - \cancel{2x^3} + 2x}{x^4} = \dfrac{2}{x^3}$. Effettivamente non si annulla mai e ha il segno di x. Ecco perciò il grafico cercato. 

Consideriamo adesso una funzione esponenziale.

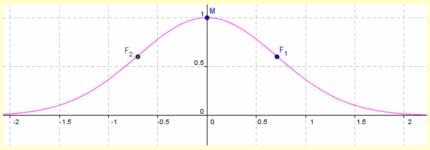
Esempio 20

Studiamo la funzione $f(x) = e^{-x^2}$.

1. *Determinazione del dominio della funzione*
   Tutti i reali
2. *Determinazione di eventuali simmetrie della funzione*
   La funzione è pari, dato che contiene solo la x di grado 2. Ciò vuol dire che possiamo studiare la funzione solo per $x > 0$, o comunque che ci aspettiamo valori simmetrici, quindi se troviamo un estremo relativo in $(a; b)$, deve esserci un altro estremo relativo dello stesso tipo in $(–a; b)$. Ovviamente se è $a = 0$, l'estremo relativo è uno solo.
3. *Studio del segno della funzione e sue eventuali intersezioni con gli assi coordinati*
   La funzione è ovviamente sempre positiva.
4. *Studio del comportamento agli estremi con conseguente ricerca di eventuali asintoti*
   Non ci possono essere asintoti verticali perché il dominio è $\mathbb{R}$. Cerchiamo quelli orizzontali $\lim_{x \to \infty} e^{-x^2} = 0$. Quindi la retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale. Fino adesso abbiamo le seguenti informazioni, in cui indichiamo con il colore fucsia i tratti di funzione: . Quindi ci aspettiamo almeno un massimo relativo, probabilmente sull'asse delle ordinate, per quanto detto sulla simmetria. Inoltre, data l'asintoticità e la simmetria ci devono essere due flessi.
5. *Studio del segno della derivata prima della funzione*
   Abbiamo: $f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x)$, che si annulla per $x = 0$. Calcoliamo la derivata seconda:

$f''(x) = e^{-x^2} \cdot (4x^2 - 2)$, calcoliamola in zero: $f''(0) < 0$. Quindi in $M \equiv (0; 1)$ vi è un massimo relativo, come ci aspettavamo.

6. *Studio di quel che accade dove la funzione è continua ma non derivabile*
   Non ci sono di questi punti
7. *Studio del segno della derivata seconda della funzione*
   La abbiamo già calcolata, si annulla per $x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Quindi ci sono effettivamente i due flessi in posizioni simmetriche: $F \equiv \left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$. Ecco perciò il grafico cercato.



Nelle verifiche vedremo altri esempi.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare gli eventuali asintoti della funzione $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$.

Il dominio della funzione è $x \neq \pm 1$. Quindi studiamo il comportamento della funzione nell'intorno di questi valori: $\lim_{x \to -1^-} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 1} = +\infty$, $\lim_{x \to -1^+} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 1} = -\infty$, $\lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 1} = -\infty$, $\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 1} = +\infty$.

Quindi $x = -1$ e $x = 1$ sono asintoti verticali. Per quanto detto nel Corollario 1 vi è anche un asintoto orizzontale: $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$, cioè la retta $y = 2$.

Determinare gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni, se la risposta è vuota non ve ne sono, Dx = destro, Sx = sinistro

Livello 1

1. $f(x) = \frac{3x^2 - x + 7}{x^2 + 1}$ [$y = 3$] $f(x) = \frac{7x^3 - 5x + 2}{x^2 + 5}$ [] $f(x) = \frac{x^3 - x}{x - 1}$ []
2. $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x - 2}$ [$x = 2$] $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$ [$y = x + 3$] $f(x) = e^{-x}$ [$x = 0$ (Dx)]
3. $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{5x + 2}$ [$x = -2/5$; $y = 4/5x - 8/25$] $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{4x^2 - 9}$ [$x = \pm 3/2$; $y = 1/4$]
4. $f(x) = ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ [$x = -1$ (Sx), $x = 1$ (Dx), $y = 0$] $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ []

Livello 2

5. $f(x) = \frac{x + \sqrt{x} - 1}{x^2}$ [$x = 0$ (Dx); $y = 0$ (Dx)] $f(x) = ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + x$ [$y = x$ (Dx)]
6. $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1}$ [$y = 2x$ (Dx), $y = -2x$ (Sx)] $f(x) = tan^{-1}(2x+3)$ [$y = -\pi/2$ (sx); $y = \pi/2$ (Dx)]
7. $f(x) = \frac{e^{-x} + 3e^x}{e^x + 1}$ [$y = 3$ (Dx)] $f(x) = tan^{-1}\left(\frac{x+3}{3x-1}\right)$ [$y = tan^{-1}(1/3)$] $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$ [$y = 0$]

8. $f(x)=sin^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ [$y = \pi/2$] $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ [$y = e$; $x = -1$ (Sx)]

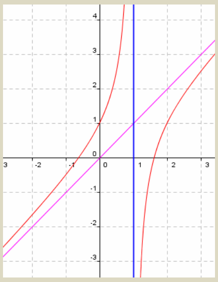
Lavoriamo insieme

Data la funzione $y=\frac{ax^2+bx-1}{cx-1}$, determinare i valori dei parametri *a, b, c* sapendo che: ammette la retta di equazione $x=1$ come un asintoto verticale e la retta di equazione $y = x$ come un asintoto obliquo.
Prima di imporre le condizioni spieghiamo cosa significano. Nel primo caso deve essere: $\lim_{x\to 1}\frac{ax^2+bx-1}{cx-1}=\infty$, il che significa che per $x = 1$ si deve annullare il denominatore ma non il numeratore, diversamente avremmo una forma indeterminata 0/0. Nel secondo caso invece deve essere:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx-1}{(cx-1)\cdot x}=\frac{a}{c},\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+bx-1}{cx-1}-\frac{a}{c}\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{acx^2}+bcx-c-\cancel{acx^2}+ax}{c\cdot(cx-1)}=\frac{bc+a}{c^2}$$

Quindi si ha: $\begin{cases}c-1=0\\ a+b-1\neq 0\\ \frac{a}{c}=1\\ \frac{bc+a}{c^2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=1\\ a+b-1\neq 0\\ a=1\\ b=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=1\\ 1-1-1\neq 0\\ a=1\\ b=-1\end{cases}$. Infine la funzione cercata è $y=\frac{x^2-x-1}{x-1}$.

La rappresentiamo con Geogebra, per conferma:



Nei seguenti quesiti determinare i valori dei parametri *a, b, c*, in modo che le date funzioni soddisfino quanto richiesto (l'equazione di una retta indica un asintoto; *M* un massimo; *m* un minimo; *F* un punto di flesso a tangente obliqua; *E* un estremo relativo generico, *P* è un punto appartenente alla funzione)

Livello 2

9. $y=\frac{x^2+ax+b}{cx-5}$; $x = 5$; $M \equiv (3; 1)$ [$a = -5$, $b = 4$, $c = 1$] $y=\frac{a+bx^4}{x^3+c}$; $x = 1$; $y = x$ [$a \neq -1$, $b = 1$, $c = -1$]

10. $y=\frac{ax^2+bx-1}{cx-1}$; $x = 1$; $y = x$ [$a = 1$, $b = -1$, $c = 1$] $y=\frac{ax^2+bx+c}{x^2-bx+4}$; $x = -4$; $E_{1,2} \equiv (\pm 2; y)$ [Indet.to]

11. $y=\frac{ax^2+bx+1}{x^2+c}$; $y = 1$; $x = -1$; $P \equiv (2; 7/3)$ [$a = 1$, $b = 1$, $c = -1$]

12. $y=\frac{e^x+a}{e^x+b}$; $F \equiv (ln(3); 5/6)$ [$a = 2$, $b = 3$] $y=\frac{a\cdot x^2+bc}{cx^2-1}$; $x =1$; $y = ½$; $P \equiv (-2; 1)$ [$\varnothing$]

13. $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 4x$; $E_1 \equiv (½; y)$ $E_2 \equiv (-2/3; y)$ [$a = 3/2$, $b = -11/3$, $c = -2$]

Livello 3

14. $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$; $E \equiv (4; -16/3)$; $F \equiv (2; -8/3)$ [$a = 0$, $b = 1/6$, $c = -1$, $d = 0$]

15. $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$; $y = x-7/2$; $P \equiv (2; 0)$ [$a = 1$, $b = -7$, $c = 10$]

16. $y=\sqrt{\frac{ax+b}{c+x}}$; $x = 0$; $y = 2$; $P \equiv (2; 5/\sqrt{6})$ [$a = 4$, $b = 1/3$, $c = 0$]

17. $y=\dfrac{a\cdot sin(x)+b}{cos(x)+c}$; $x = \pi$; $E \equiv (2\cdot tan^{-1}(-2); -3/2)$ (Sugg. usare le formule parametriche per calcolare i valori della funzione e della sua derivata) [a = 2, b = 1, c = 1]

18. $y=\dfrac{a+cos(x)}{b\cdot sin(x)+c\cdot cos(x)}$; $M \equiv (\pi/2; 1)$; $x = 3/4\pi$ [a = 1, b = 1, c = 1]

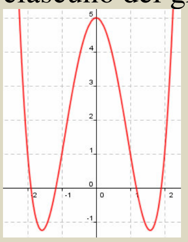
Livello 3

Giustificare le risposte ai seguenti quesiti

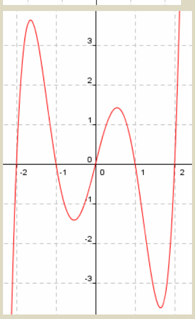
19. Se non esiste $f(a)$, possiamo dire che certamente $x = a$ è asintoto verticale per $f(x)$? [No]
20. Quali condizioni devono necessariamente accadere perché $x = a$ possa essere asintoto verticale per $f(x)$? [Non deve esistere $f(a)$ e $x = a$ deve essere punto di accumulazione]
21. È possibile che una funzione dispari abbia la retta $x = 1$ come asintoto verticale destro e sinistro? [No]
22. È possibile che una funzione pari abbia la retta $x = 1$ come asintoto orizzontale destro e sinistro? [Sì]
23. È possibile che una funzione dispari abbia un unico asintoto verticale destro e sinistro? [Sì; solo x =0]
24. È possibile che una funzione dispari abbia la retta $y = 1$ come asintoto orizzontale destro e sinistro? [No]
25. È possibile che una funzione pari abbia la retta $y = 1$ come asintoto orizzontale destro e sinistro? [Sì]
26. Se una funzione dispari ha la retta $y = 1$ come asintoto obliquo destro, quale è certamente il suo asintoto obliquo sinistro? [$y = -1$]
27. È possibile che una funzione dispari abbia un unico asintoto orizzontale destro e sinistro? [No]
28. È possibile che una funzione dispari abbia la retta $y = x + 1$ come asintoto obliquo? [No]
29. È possibile che una funzione pari abbia la retta $y = x + 1$ come asintoto obliquo? [No]
30. È possibile che una funzione dispari abbia la retta $y = x$ come asintoto obliquo destro e sinistro? [Sì]
31. È possibile che una funzione pari abbia la retta $y = x$ come asintoto obliquo destro e sinistro? [No]
32. Se una funzione pari ha la retta $y = x$ come asintoto obliquo destro, quale è certamente il suo asintoto obliquo sinistro? [$y = -x$]

Lavoriamo insieme

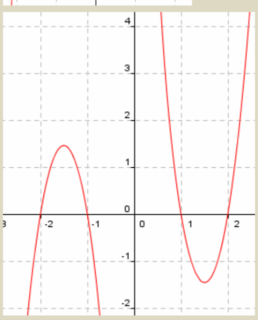
Consideriamo la funzione $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4)$, vogliamo stabilire senza effettuare alcun calcolo perché ciascuno dei grafici di seguito rappresentati non può riferirsi a questa funzione.



Non incontra l'asse x nei punti di ascissa ±1 e ±2

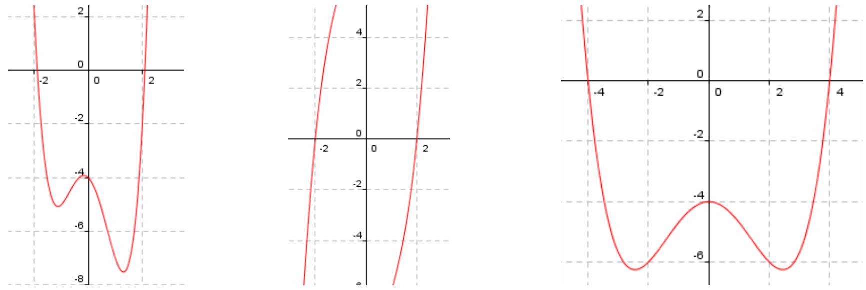


Passa per l'origine degli assi.

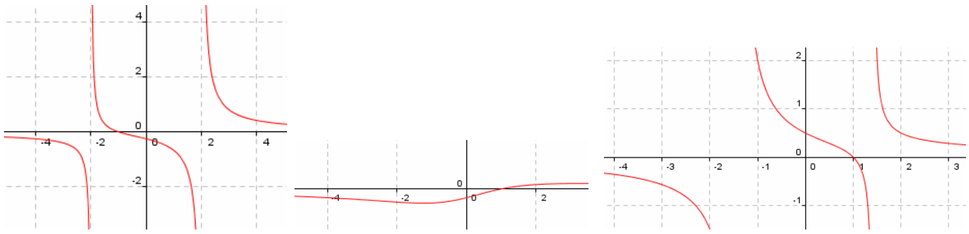


Ha una discontinuità, almeno apparentemente

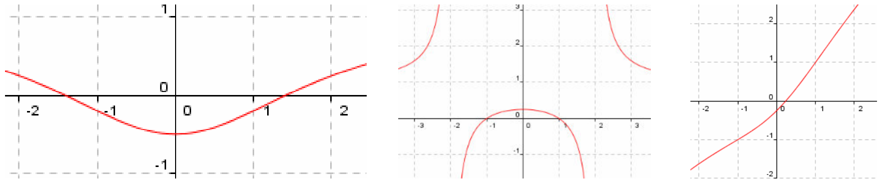
Ciascuno dei seguenti grafici NON si riferisce alla funzione indicata, fornire una o più motivazioni
Livello 2



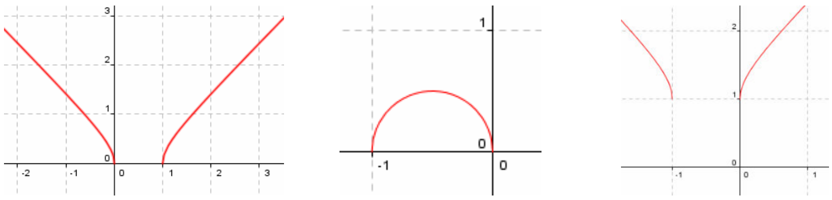
33. $f(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 4)$



34. $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 4)$



35. $f(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 4)$

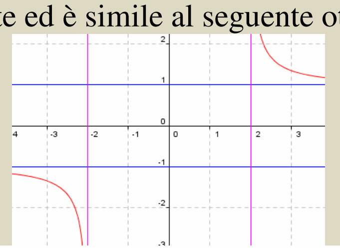


36. $y = \sqrt{x^2 + x}$

Lavoriamo insieme

Studiamo la funzione $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$. L'insieme di esistenza si ha per $x^2 - 4 > 0$, cioè per $x < -2 \vee x > 2$. La funzione è dispari, dato che $f(x) = -f(-x)$. Non ci sono intersezioni con gli assi perché $x = 0$, che annulla il numeratore, non fa parte del dominio. Il segno dipende solo dal numeratore, dato che il denominatore è sempre positivo nel dominio. Quindi la funzione è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. Si ha: $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty$, quindi $x = -2$ è un asintoto verticale sinistro e $x = 2$ un asintoto verticale destro. Inoltre si ha: $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{-x} = -1$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x} = 1$. Quindi $y = -1$ è un asintoto orizzontale sinistro e $y = 1$ un asintoto orizzontale destro.

La derivata prima è $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4} - x \cdot \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\cdot\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \dfrac{\cancel{x^2} - 4 - \cancel{x^2}}{(x^2-4)\cdot\sqrt{x^2-4}} = \dfrac{-4}{(x^2-4)\cdot\sqrt{x^2-4}}$, che è sempre negativa nel dominio. Quindi la funzione è sempre decrescente. Non è necessario studiare la derivata seconda. Il grafico si costruisce facilmente ed è simile al seguente ottenuto con Geogebra:



Studiare e rappresentare graficamente le seguenti funzioni

Livello 1

37. $f(x) = x^3 - x$ $\left[M \equiv \left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{2\cdot\sqrt{3}}{9}\right), m \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{9}\right), F \equiv (0;0)\right]$

38. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ $\left[M \equiv (-1;2), m \equiv \left(-\frac{1}{3};\frac{50}{27}\right), F \equiv \left(-\frac{2}{3};\frac{52}{27}\right)\right]$

39. $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ $\left[m \equiv \left(-\frac{\sqrt{6}}{2};-\frac{25}{4}\right), M \equiv (0;-4)\, m \equiv \left(\frac{\sqrt{6}}{6};-\frac{25}{4}\right), F \equiv \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{21}{4}\right)\right]$

40. $f(x) = x^4/4 - x^3/3 + x^2/2 - x$ [$M \equiv (1; -7/12)$] $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ [$F \equiv (0; 0)$, $x = \pm 1$, $y = 0$]

41. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ [$M \equiv (-1; -½)$, $M \equiv (1; ½)$; $F \equiv (0; 0)$, $F \equiv (\pm\sqrt{3}; \pm\sqrt{3}/4)$; $y = 0$]

42. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ [$M \equiv (0; 1)$, $F \equiv (\pm 1/\sqrt{3}; ¾)$, $y = 0$]

43. $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x}$ [$M \equiv (1; 0)$; $F \equiv (-1; 0)$; $x = 0$]

44. $f(x) = \frac{4x}{x^2+36}$ [$M \equiv (-6; -1/3)$, $M \equiv (6; 1/3)$, $F \equiv (0; \pm 6\cdot\sqrt{3})$, $y = 0$]

45. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ [$M \equiv (-\sqrt{3}; -3\sqrt{3}/2)$, $F \equiv (0; 0)$, $m \equiv (\sqrt{3}; 3\sqrt{3}/2)$, $x = \pm 1$, $y = x$]

46. $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$ [$m \equiv (-1; 3/2)$, $M \equiv (1; 3/2)$, $F_1 \equiv (0; 0)$, $F_{23} \equiv (\pm\sqrt{3}; \pm ¾\sqrt{3})$, $y = 0$]

Livello 2

47. $f(x) = x\cdot\sqrt{1-x}$ [$M \equiv (2/3; 2\sqrt{3}/9$] $f(x) = x\cdot\sqrt{x^2-1}$ [$F \equiv (\pm\sqrt{6}/2; \pm\sqrt{3}/2)$]

48. $f(x) = x\cdot\sqrt{1-x^2}$ [$M \equiv (-\sqrt{2}/2; -½)$, $F \equiv (0; 0)$, $M \equiv (\sqrt{2}/2; ½)$]

49. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ [Funzione sempre decrescente e con concavità verso l'alto, $x = 1$ Sx]

50. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ [$F \equiv (0; 0)$, $x = -1$(Dx), $x = 1$(Sx)] $f(x) = ½\, e^{2x} - x$ [$M \equiv (0; ½)$, $y = -x$ (Sx)]

51. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ [$x = -1$(Sx), $x = 1$(Dx), $y = 1$(Dx), $y = -1$(Sx)] $f(x) = e^{1/x}$ [$F \equiv (-½; e^{-2})$, $x = 0$, $y = 1$]

52. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ [$F \equiv (0; 0)$, $y = 1$ (Dx), $y = -1$ (Sx)] $f(x) = x\cdot e^{x^2}$ [$F \equiv (0; 0)$]

53. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x}$ [$x = 1$, $y = 0$ (Dx)] $f(x) = \sqrt{x^2-2x+3}$ [$M \equiv (1; \sqrt{2})$, $y = x - 1$ (Dx), $y = -x + 1$(Sx)]

54. $f(x) = 4\cdot ln(x-3) - 3\cdot ln(x-2)$ [Sempre crescente, e concavità verso il basso, $x = 3$ (Sx)]

55. $f(x) = x^2\cdot e^{-x}$ $\left[m \equiv (0;0), M \equiv (2;4e^{-2}), F \equiv (2-\sqrt{2};\approx 0{,}19), F \equiv (2+\sqrt{2};\approx 0{,}38), x = 0(Dx)\right]$

56. $f(x) = sin(x) - x/2$, $x \in [0;2\pi]$ $\left[F \equiv (0;0), M \equiv \left(\frac{\pi}{3};\frac{3\cdot\sqrt{3}-\pi}{6}\right), F \equiv \left(\pi;-\frac{\pi}{2}\right), m \equiv \left(\frac{5\pi}{3};-\frac{5\pi+3\cdot\sqrt{3}}{6}\right)\right]$

Livello 3

57. $f(x) = cos(x) + sin^2(x) - 2sin(x) + x$, $x \in [0;2\pi]$ [$M \equiv (\pi/3; \approx 0{,}56)$, $F \equiv (\pi/2; \pi/2 - 1)$, $M \equiv (5\pi/3; \approx 8{,}22)$]

58. $f(x) = x^2 \cdot ln(x)$ $\left[m \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{e}}; -\frac{1}{2e}\right), F \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}; -\frac{3}{2e^3}\right)\right]$

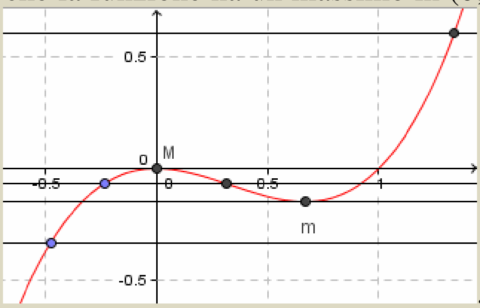
59. $f(x) = x - 2tan^{-1}(x)$ [$M \equiv (-1; \pi/2 - 1)$, $F \equiv (0; 0)$, $M \equiv (1; 1 - \pi/2)$]

60. $f(x) = x - \frac{3}{2} \cdot ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ $\left[M \equiv \left(-2; -\frac{ln(27)+2}{2}\right), m \equiv \left(2; \frac{ln(27)+2}{2}\right), x = -1(Sx), x = 1(Dx), y = x\right]$

61. $f(x) = ½ e^{2x} - 3e^x + 2x$ [$M \equiv (0; -5/2)$, $F \equiv (ln(3/2); ln(9/4) - 27/8)$, $M \equiv (ln(2); ln(4) - 4)$]

62. $f(x) = \frac{e^{-x} + 3e^x}{e^x + 1}$ [$y = 3$ (Dx), $m \equiv (0; 2)$, $F \equiv (\approx 1; \approx 2{,}3)$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare quante soluzioni ha l'equazione: $x^3 - x^2 + 5k - 1 = 0$, al variare del parametro k. Scriviamo $x^3 - x^2 = 1 - 5k$, riconducendo il problema alla determinazione di quante intersezioni vi sono fra la funzione $y = x^3 - x^2$ e la retta $y = 1 - 5k$. Rappresentiamo la funzione. Poiché $y' = 3x^2 - 2x$, che si annulla per $x = 0$ e $x = 2/3$, abbiamo che la funzione ha un massimo in (0; 0) e un minimo in (2/3; –4/27), quindi il suo grafico è quello in figura 

. Da esso si vede che abbiamo una soluzione se $1 - 5k < -4/27 \vee 1 - 5k > 0$, cioè $k > 131/35 \vee k < 1/5$. Ovviamente vi sono 2 soluzioni se $k = 1/5 \vee 113/35$ e tre soluzioni se $1/5 < k < 131/35$.

Livello 2

Si determini, al variare di *k*, il numero delle soluzioni reali delle equazioni seguenti

63. $x^3 - 4x^2 + k = 0$ [1 per $k < 0 \vee k > 256/27$; 2 per $k = 256/27 \vee k = 0$; 3 per $0 < k < 256/27$]

64. $2x^3 - 9x^2 + 12x - k = 0$ [1 per $k < 4 \vee k > 5$; 2 per $k = 4 \vee k = 5$; 3 per $4 < k < 5$]

65. $2x^3 + 9x^2 - 24x + 2 - 3k = 0$ [1 per $k < 110/3 \vee k > 5$; 2 per $k = 110/3 \vee k = 5$; 3 per $110/3 < k < 5$]

66. $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 2 + 5k = 0$
[0 per $k < -7/5$; 2 per $k = -7/5 \vee k > 9/5$; 3 per $k = 9/5$; 4 per $-7/5 < k < 9/5$]

67. $3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 24x + 2 + 3k = 0$ [0 per $k > 38/3$; 1 per $k = 38/3$; 2 per $k < 38/3$]

Livello 3

68. $e^x - x + 2 + k = 0$ [0 per $k < -e - 1$; 1 per $k = -e - 1$; 2 per $k > -e - 1$]

69. $x\, ln(x) - 3x - 1 + 2k = 0$ [0 per $k > ½ (e^2 + 1)$; 1 per $k = ½ (e^2 + 1)$; 2 per $k < ½ (e^2 + 1)$]

70. $e^{2x} - 4e^x + 2x + 3k - 4 = 0$ [1 per $\forall k \in \mathbb{R}$]

Lavoriamo insieme

Studiamo la funzione $f(x) = ax^3 - x^2 + x - a$, al variare del parametro reale a. Possiamo scrivere:

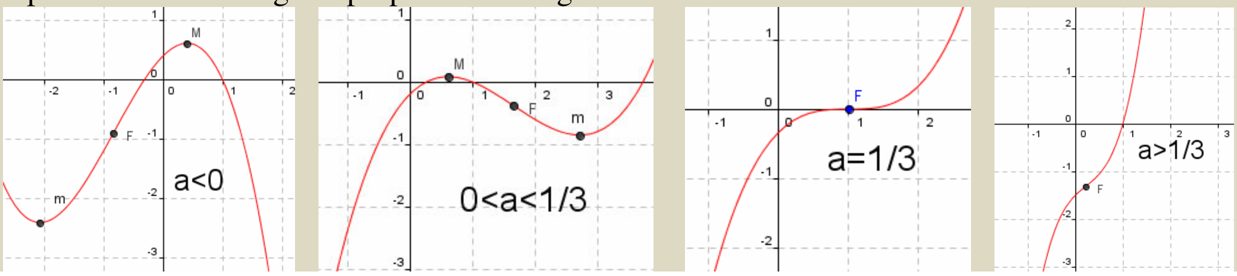
$$a \cdot (x^3 - 1) - x \cdot (x - 1) = a \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + x - 1) - x \cdot (x - 1) = (x - 1) \cdot (ax^2 + ax + a - x) =$$
$$= (x - 1) \cdot [ax^2 + (a - 1) \cdot x + a]$$

Quindi la curva incontra l'asse x nel punto (1; 0). Se poi si ha: $\Delta = (a - 1)^2 - 4a^2 = -3a^2 - 2a + 1 < 0 \Rightarrow a < -1 \vee a > 1/3$, allora vi è una sola intersezione con l'asse x. Se invece è $\Delta > 0 \Rightarrow -1 < a < 1/3$, ci sono altre due intersezioni. E se $\Delta = 0 \Rightarrow a = -1 \vee a = 1/3$, vi è anche il punto (–1; 0). Ciò ovviamente influenza anche il segno della funzione.

Essendo in ogni caso un polinomio non vi sono asintoti. Passiamo alla derivata prima: $f'(x) = 3ax^2 - 2x + 1$.

Tutto dipende sempre dal $\Delta = 4 - 12a$. Così se $a > 1/3$, $\Delta < 0$ quindi $f'(x) > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, la funzione è sempre crescente. Se $a = 1/3$, $\Delta = 0$, $f'(x) = 0$ se $x = 1$, per il resto è sempre positiva, la funzione è sempre crescente, ma $F \equiv (1; 0)$ è flesso ascendente a tangente orizzontale. Infine se $a < 1/3$, $\Delta > 0$, $f'(x) = 0$ in $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-3a}}{3a}$.

Se $a < 0$, $f'(x) > 0$ per $\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3a} < x < \frac{1+\sqrt{1-3a}}{3a}$ e negativa altrimenti, quindi ci sono un minimo e un massimo nell'ordine. Se $0 < a < 1/3$ invece si ha prima il massimo e poi il minimo.
Passiamo alla derivata seconda: $f''(x) = 6ax - 2$. Che si annulla per $x = 1/(3a)$, ovviamente se è $a \neq 0$. Quindi vi è sempre un flesso. Di seguito proponiamo dei grafici che mostrano tutti i casi trattati.



Studiare al variare del parametro reale $a \neq 0$, le funzioni seguenti

Livello 3

71. $f(x) = ax^3 - ax^2 + x - 1$ [$P \equiv (1; 0)$, $F \equiv (1/3; -2/27\cdot(a + 9))$; min e max per $a < 0 \vee a > 3$]
72. $f(x) = ax^3 - 2x^2 - ax + 2$ [$P \equiv (\pm 1; 0)$, Flesso, min e max per $\forall\ a \neq 0$]
73. $f(x) = ax^4 - x^2 + a$ [$m \equiv (0; a)$, 2 Flessi e 2 max per $a < 0$]
74. $f(x) = ax^4 - 2x^2 + a + 1$ [$M \equiv (0; a + 1)$, 2 Flessi e 2 min per $a > 0$]
75. $f(x) = \frac{ax^2 - 1}{3x + a}$ [$x = -a/3$; $y = a/3x - a^2/9$; Max e min per $a < 0 \vee a > \sqrt{27}$]
76. $f(x) = \frac{ax^2 - x}{x + a}$ [$x = -a$; $y = ax - a^2 - 1$; Max e min per $\forall\ a \neq 0$]
77. $f(x) = \frac{ax^2}{x^2 + a}$ [$x = \pm\sqrt{-a}$ per $a < 0$; $y = a$; $m \equiv (0; 0)$, F $\equiv (\pm\sqrt{3a}/3; a/4)$ per $a > 0$]
78. $f(x) = \frac{ax^2 - a}{x^2 + 1}$ [$y = a$; $m \equiv (0; 0)$ per $a > 0$; $M \equiv (0; 0)$ per $a < 0$, F $\equiv (\pm\sqrt{3}/3; -a/2)$]
79. $f(x) = \frac{ax^3}{ax + 1}$ [$x = -1/a$; $F \equiv (0; 0)$; F $\equiv (-3/(2a); 27/(4a^2)$]
80. $f(x) = \frac{a}{x^2 - a^2}$ [$x = \pm a$; $y = 0$; $m \equiv (0; 0)$ per $a < 0$; $M \equiv (0; 0)$ per $a > 0$]
81. $f(x) = \frac{x + a}{ax^2 - x}$ [$x = 1/a$, $x = 0$; $y = 0$; min, Max e Flesso]
82. $f(x) = \sqrt{a^2x^2 - x + 1}$ [$y = |a|x - ½|a|$ (Dx), $y = -|a|x + ½|a|$ (Sx), $x_m = 1/(2a^2)/3$; per $a < -½ \vee a < ½$]

Rispondere alle seguenti domande giustificando la risposta

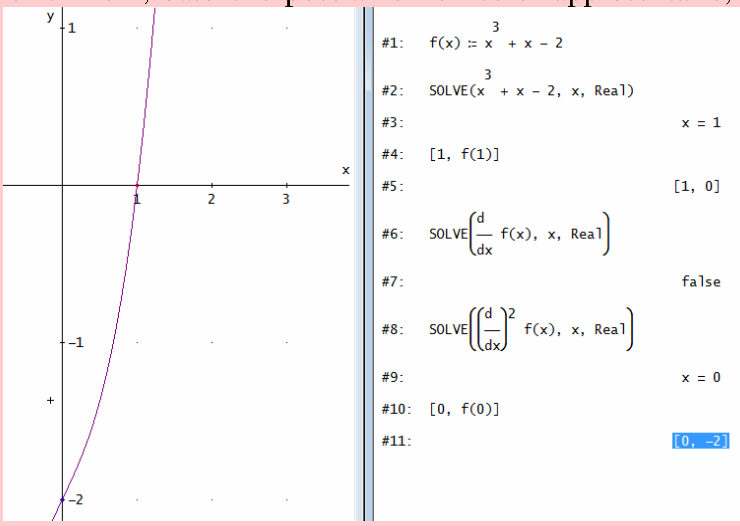
Livello 2

112. Se una funzione ha un massimo relativo in (1; 3) e l'asintoto orizzontale destro $y = 2$, possiamo dire che ha un punto di flesso in $(3; +\infty)$? [Solo se è continua in $[3; +\infty)$]
113. Se una funzione ha un massimo relativo in (1; 3) e l'asintoto orizzontale sinistro $y = 2$, possiamo dire che ha un punto di flesso in $(3; +\infty)$? [No]
114. Se una funzione ha un minimo relativo in (1; 3) e l'asintoto orizzontale destro $y = 4$, possiamo dire che ha un punto di flesso in $(3; +\infty)$? [Solo se è continua in $[3; +\infty)$]
115. Se una funzione ha la retta $y = 3$ come asintoto orizzontale, è possibile che contenga il punto (1; 3)? [Sì]

116. Se una funzione dispari ha asintoti orizzontali destro e sinistro i due sono uguali, diversi o possono essere sia uguali che diversi? [Diversi, $y = a$ e $y = -a$]
117. Se una funzione pari ha asintoti orizzontali destro e sinistro i due sono uguali, diversi o possono essere sia uguali che diversi? [Uguali]
118. Una funzione pari può avere un asintoto orizzontale destro e un asintoto obliquo sinistro o viceversa? [No]
119. Una funzione dispari può avere un asintoto orizzontale destro e un asintoto obliquo sinistro o viceversa? [No]

L'angolo di Derive

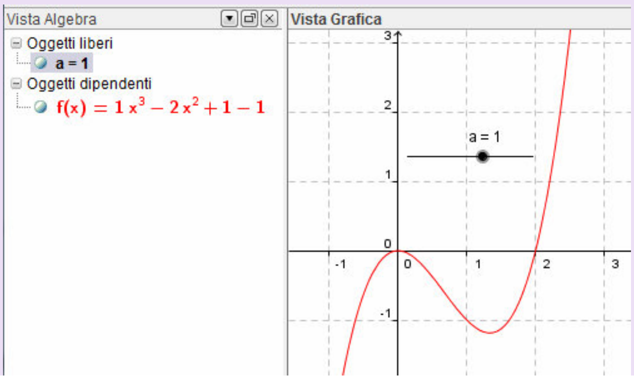
Derive è l'ambiente ideale per studiare le funzioni, dato che possiamo non solo rappresentarle, ma anche



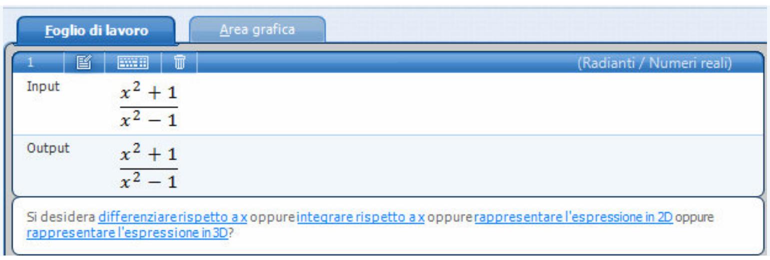
calcolare derivate, asintoti e così via.

L'angolo di Geogebra

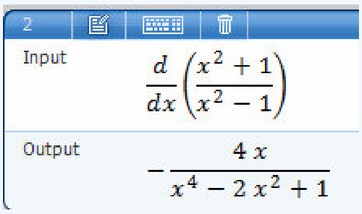
Anche con Geogebra possiamo studiare agevolmente le funzioni, specialmente quelle parametriche, usando la slidebar.



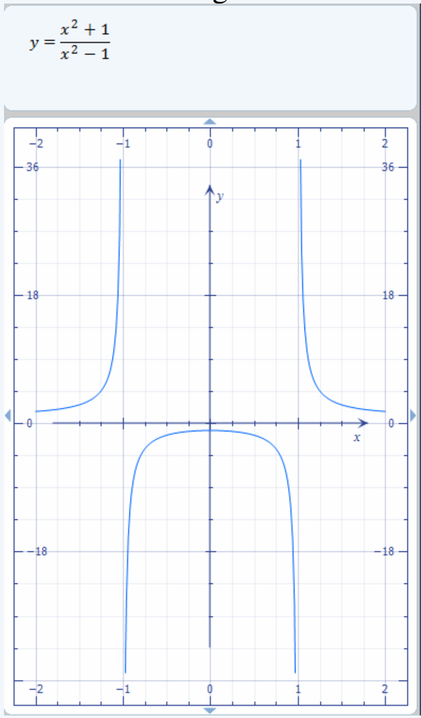
L'angolo di Microsoft Mathematics



Come si vede, dopo avere immesso la funzione ci viene subito richiesto cosa vogliamo farne. Possiamo differenziare



oppure rappresentarla



Ovviamente possiamo anche effettuare altri calcoli non proposti.

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Fornire degli esempi di polinomi di quinto grado che hanno esattamente 0, 1, 2, 3 e 4 estremi relativi. Se qualcuna delle possibilità non potesse accadere giustificarne le motivazioni. [$x^5 + x$; $\varnothing$; $x^5 - x$; $\varnothing$; $x^5 - x^4 - x^3 + x^2$]
2. Tenuto conto del precedente quesito possiamo dire che in generale un polinomio di grado dispari, se ha estremi relativi, questi sono sempre … [In quantità pari]
3. Fornire degli esempi di polinomi di IV grado che hanno esattamente 0, 1, 2 e 3 estremi relativi. Se qualcuna delle possibilità non potesse accadere giustificare le motivazioni. [$\varnothing$; x^4; $x^4 - x^3$; $x^4 + x^3 - x^2$]
4. Un polinomio di grado pari ha sempre estremi relativi? Giustificare la risposta. [Sì]
5. Nella seguente tabella indichiamo alcune informazioni relative a una funzione continua definita in [0; 4]. La funzione è derivabile fino al secondo ordine per ogni x tranne che in $x = 2$.

x	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$2 < x < 3$	3	$3 < x < 4$
$f(x)$	–1	<0	0	>0	2	>0	0	<0
$f'(x)$	4	>0	0	>0	$\nexists$	<0	–3	<0
$f''(x)$	–2	<0	0	>0	$\nexists$	<0	0	>0

a) Tenuto conto di essa determinare i punti di estremo relativo, specificandone il tipo (massimo o minimo); [Massimo in M ≡ (2; 2)]
b) Rappresenta una funzione che potrebbe verificare la tabella;
c) Consideriamo una funzione $g(x)$ la cui derivata è $f(x)$ in (0; 4). Rispondere alle stesse domande di a) per la $g(x)$, determinando solo le ascisse; [$x_{min} = 1$; $x_{Max} = 3$]
d) Determinare le ascisse degli eventuali punti di flesso di $g(x)$. [$x = 2$]

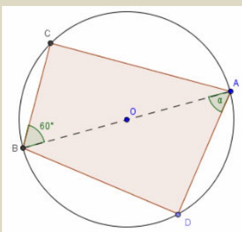
Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni Esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi
I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito
http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

1. (Liceo scientifico 1966/67) In un piano, riferito ad uni sistema cartesiano ortogonale *Oxy*, si considerino le parabole di equazione: $y = mx^2 + x + 3 - 4m$ (1), essendo *m* un parametro diverso da zero.
   (a) Si determinino le coordinate del vertice della generica parabola di equazione (1), in funzione del parametro *m*. Successivamente, eliminando *m* fra le due relazioni così trovate, si studi la curva di equazione $y = f(x)$ che così si ottiene (luogo dei vertici delle parabole) e in particolare si trovino i punti *A* e *B* in cui la funzione $f(x)$ ha rispettivamente un massimo e un minimo relativo.
   $$\left[V \equiv \left(-\frac{1}{2m};\frac{-16m^2+12m-1}{4m}\right); f\left(x\right) = \frac{x^2+6x+4}{2x}; A \equiv \left(-2;1\right), B \equiv \left(2;5\right)\right]$$
   (b) Si verifichi che tutte le parabole considerate passano per i punti *A* e *B* e si dia una giustificazione di ciò.
2. (Liceo scientifico 1970/71) È dato il triangolo *AOB* rettangolo in *O*, del quale sia *h* l'altezza relativa all'ipotenusa. Detta *x* l'ampiezza dell'angolo $O\hat{A}B$, e posto $t = tan(x/2)$, si esprima per mezzo di *h* e di *t* il perimetro del triangolo e si studi l'andamento della funzione così ottenuta.
   $$\left[h \cdot \frac{1+t^2}{t\cdot\left(1-t\right)}, 0 < t < 1, t_{\min} = -1-\sqrt{2}\right]$$
3. (Liceo scientifico 1970/71) Si studi il grafico della funzione $y = 2sin(x) + sin(2x)$ per $0 \le x \le 2\pi$.
   $[x_{MAX} = \pi/3,\ x_{Min} = 5\pi/3]$
4. (Liceo scientifico suppletiva 1970/71) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *xOy* si rappresenti la curva di equazione $y = \frac{x-1}{x+1}$. Condotta poi la retta di coefficiente angolare *m* per il punto (–1; 1), si dica per quali valori di *m* una delle sue intersezioni con la curva appartiene al primo o al quarto quadrante o al terzo quadrante. Si determini inoltre la lunghezza della corda minima intercettata sulla retta dalla curva e si dica qual è il rapporto, maggiore di uno, tra le aree dei triangoli che le tangenti negli estremi di tale corda formano con gli assi cartesiani.
   $$\left[I: -\frac{1}{2} < m < 0, IV: -2 < m < -\frac{1}{2}, III: m < -2; L_{\min} = 4; 17 - 12\cdot\sqrt{2}\right]$$

Lavoriamo insieme

Consideriamo il problema assegnato agli esami di Liceo scientifico 1971/72**.**
Data una circonferenza di diametro $AB = 2r$, si prendano su di essa da parte opposta di *AB*, due punti *C* e *D* tali che $A\hat{B}C = \pi/3$, $B\hat{A}D = \alpha$. Si consideri la funzione $y = \frac{\overline{AD}^2 - \overline{CD}^2}{\overline{BC}^2}$, espressa per mezzo di $x = tan(\alpha)$ e se ne studi il grafico.

Consideriamo la figura: 

, usando la trigonometria abbiamo:

$\overline{AD} = 2r \cdot cos(\alpha), \overline{BC} = 2r \cdot sin(30°) = r, \overline{AC} = 2r \cdot sin(60°) = r \cdot \sqrt{3}$

$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AC} \cdot cos(30° + \alpha) = 4r^2 \cdot cos^2(\alpha) + 3r^2 - 4r^2 \cdot \sqrt{3} \cdot cos(\alpha) \cdot cos(30° + \alpha) = ... =$

$= -2r^2 \cdot cos^2(\alpha) + 2r^2 \cdot \sqrt{3} \cdot sin(\alpha) \cdot cos(\alpha) + 3r^2$

Sostituendo si ha: $y = \dfrac{4r^2 \cdot cos^2(\alpha) + 2r^2 \cdot cos^2(\alpha) - 2r^2 \cdot \sqrt{3} \cdot sin(\alpha) \cdot cos(\alpha) - 3r^2}{r^2} =$

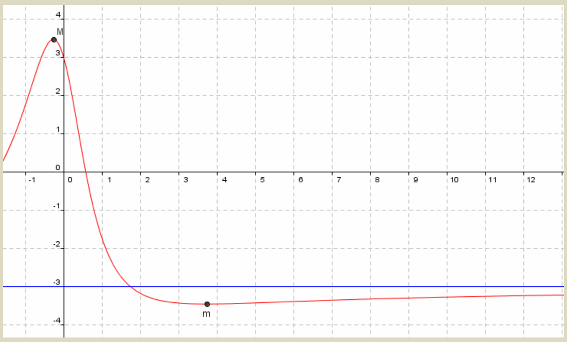
$= 6cos^2(\alpha) - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot sin(\alpha) \cdot cos(\alpha) - 3$

Trasformiamo in *tan*(α) e sostituiamo ottenendo la funzione $y = \dfrac{-3x^2 - 2 \cdot \sqrt{3}x + 3}{1 + x^2}$. Il cui dominio sono tutti i reali. Ha per asintoto orizzontale la retta *y*=–3: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-3x^2 - 2 \cdot \sqrt{3}x + 3}{1 + x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-3x^2}{x^2} = -3$. Interseca l'asse delle ascisse nei punti di ascissa $x = \dfrac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3+9}}{-3} = \dfrac{\sqrt{3} \pm 2 \cdot \sqrt{3}}{-3} = \prec \begin{matrix} -\sqrt{3} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{matrix}$. L'asse delle ordinate nel punto (0; 3). La derivata prima è

$$= \frac{\left(-6x - 2 \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \left(1 + x^2\right) - 2x \cdot \left(-3x^2 - 2 \cdot \sqrt{3}x + 3\right)}{\left(1 + x^2\right)^2} = \frac{-6x - 2 \cdot \sqrt{3} - \cancel{6x^3} - 2 \cdot \sqrt{3}x^2 + \cancel{6x^3} + 4 \cdot \sqrt{3}x^2 - 6x}{\left(1 + x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sqrt{3}x^2 - 12x - 2 \cdot \sqrt{3}}{\left(1 + x^2\right)^2}$$

che si annulla per $2 \cdot \sqrt{3}x^2 - 12x - 2 \cdot \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sqrt{3}x^2 - 6x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot \sqrt{3}x - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3} \pm 2$. Non avendo cambiato i segni avremo valori positivi all'esterno dell'intervallo e negativi all'interno, quindi vi è un punto di massimo relativo di ascissa $\sqrt{3} - 2$ e un minimo relativo di ascissa $\sqrt{3} + 2$. Ovviamente vi deve essere un flesso che si determina studiando la derivata seconda, che risulta essere: $\dfrac{-4 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(x^3 - 3 \cdot \sqrt{3} \cdot x^2 - 3x + \sqrt{3}\right)}{\left(1 + x^2\right)^3}$, che risulta complicata da risolvere.

Il grafico qualitativo è il seguente: 

5. (Liceo scientifico 1971/72) Si studi la funzione $y = sin(2x) \cdot cos(x)$ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.

$$\left[\begin{array}{l} x_{Max} = cos^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) \vee \pi - cos^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) \vee \dfrac{3}{2}\pi; \\ x_{min} = 2\pi - cos^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) \vee \pi + cos^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) \vee \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right]$$

6. (Liceo scientifico 1972/73) Si disegni il grafico della funzione $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ e se ne determinino i punti per i quali la distanza dal punto $A \equiv (0; 1)$ assume valore minimo.
[$x_{Max} = 0$, Punti di minima distanza: $B \equiv (-\sqrt{3}; 2)$, $C \equiv (0; -1)$, $D \equiv (-\sqrt{3}; 2)$]

7. (Liceo scientifico suppletiva 1972/73) Dato il triangolo rettangolo AOB di cateti $\overline{OA}=a$ e $\overline{OB}=b$, si prenda sull'ipotenusa AB un punto OP di cui sia Q la proiezione ortogonale su OB e si ponga $\overline{QP}=x$; si consideri poi la funzione $y(x)=\frac{V_1}{V_2}$, essendo V_1 e V_2 i volumi dei due solidi generati dalla rotazione completa del trapezio $OAPQ$ attorno al cateto OA e al cateto OB rispettivamente e, indipendentemente dalla questione geometrica, la si studi per x variabile in tutto il campo reale.
$$\left[y(x)=\frac{-b\cdot\left(2x^2-ax-a^2\right)}{a\cdot\left(x^2+ax+a^2\right)}; x_{Max}=-2a; x_{\min}=0\right]$$

8. (Liceo scientifico 1973/74) Si studi la funzione $y=\frac{x^3}{2x^2-1}$ e se ne disegni il grafico. Presi sulla curva i punti A e B rispettivamente di ascissa $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{3}$, si determinino i punti dell'arco AB nei quali la tangente alla curva è parallela alla retta AB.
$$\left[x_{Max}=-\frac{\sqrt{3}}{2}; x_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}; P\equiv\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{4\cdot\sqrt{6}}\right), Q\equiv\left(\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{4\cdot\sqrt{6}}\right)\right]$$

9. (Liceo scientifico suppletiva 1973/74) Data la funzione $f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}$ si determinino i valori delle costanti a, b, c in modo che risulti $f(1)=\frac{1}{6}, f(2)=\frac{1}{24}, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{8}{15}$. Si studi la funzione così ottenuta.
$$\left[a=\frac{1}{2}, b=-1, c=\frac{1}{2}: x_{Max}=\frac{\sqrt{3}-3}{3}; x_{\min}=-\frac{\sqrt{3}+3}{3}\right]$$

10. (Liceo scientifico 1974/75) Assegnata una circonferenza di diametro $\overline{AB}=2$, si conduca per A la retta tangente e su di essa si consideri un punto M tale che $\overline{AM}=x$. Da M si tracci la ulteriore retta tangente alle circonferenze e sia C il punto in cui essa incontra il prolungamento di AB. Posto $\overline{AC}=y$, si esprima y in funzione di x e si disegni il grafico relativo.
$$\left[y=\begin{cases}\frac{2x^2}{1-x^2} & 0<x<1\\ \frac{-2x^2}{1-x^2} & x>1\end{cases}\right]$$

11. (Liceo scientifico suppletiva 1974/75) Si studi la funzione $y = x^2 \cdot (3 - x)$ e se ne disegni il grafico.
[$x_{Max} = 2$, $x_{min} = 0$]

12. (Liceo scientifico 1975/76) Si studi la funzione $y = x + 2\,sin(x)$ e se ne disegni il grafico nell'intervallo $-2\pi \le x \le 2\pi$.
[$x_{MAX} = -4\pi/3 \vee 2\pi/3$, $x_{Min} = 4\pi/3$]

13. (Liceo scientifico 1975/76) In un sistema di assi coordinati cartesiani si studi la funzione $y=\frac{2x-1}{2x^3}$ e se ne disegni il grafico. Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx$ in modo che la parabola da essa rappresentata passi per il flesso e per l'ulteriore punto d'intersezione della curva con la tangente inflessionale.
[$x_{Max} = ¾$; $x_{Fle} =1$; $a = 1$, $b = -½$]

14. (Liceo scientifico suppletiva 1975/76) Presi su una circonferenza di raggio unitario tre punti A, B, C, tali che $\overline{AB}=\overline{BC}$, si studi la funzione $y=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$ e se ne disegni il grafico.
[$y = 6x^2 - x^4$, $1 - \sqrt{6} < x < \sqrt{6}$, $x_{Max} = \sqrt{3}$]

15. (Liceo scientifico 1976/77) Data la funzione $y = a \cdot sin(x) + b \cdot cos(x)$ si determinino i coefficienti a, b in modo che per $x = \frac{2}{3}\pi$ sia $y = 0$ e che i valori estremanti di y siano –2 e 2. Se ne disegni il grafico nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$. Posto $y = c \cdot sin(x + \phi)$ si calcolino c, ϕ in modo che questa funzione coincida con quella assegnata. Fatte le sostituzioni $y = s$, $x = 2\pi t$, dove s rappresenta lo spostamento dall'origine di un punto P che si muove su una retta nel tempo t, si aggiunga, facoltativamente, la descrizione del moto di P, determinando, in particolare gli istanti nei quali la velocità è nulla e quelli nei quali è massima. $[(a = 0, b = -2) \vee (a = \sqrt{3}, b = 1)]$

16. (Liceo scientifico suppletiva 1976/77) Dato l'angolo $a\hat{O}b = \gamma$, si fissino alla semiretta Ob i punti P e Q tali che $\overline{OP} = 1, \overline{OQ} = 2$; preso sulla semiretta Oa un punto A, si studi la funzione $y = \frac{\overline{AP}^2 - \overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2}$, della quale si disegni il grafico nell'ipotesi che $\gamma = \frac{\pi}{6}$. In questo caso particolare si costruiscano sulla semiretta Oa i punti aventi distanze da P e da Q distanze estremanti per y.

$$\left[y = \frac{-3+\sqrt{3}\cdot x}{5+2x^2-3\cdot\sqrt{3}\cdot x}, m \equiv \left(\sqrt{3}-1; -\frac{3+4\cdot\sqrt{3}}{13}\right), M \equiv \left(\sqrt{3}+1; \frac{4\cdot\sqrt{3}-3}{13}\right)\right]$$

17. (Liceo scientifico suppletiva 1976/77) Si studino le funzioni $y = \frac{2}{x^2}$, $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$ e se ne disegnino i grafici in un sistema cartesiano ortogonale. Si verifichi che i loro punti comuni stanno su una retta di cui si chiede l'equazione. [La prima funzione non ha estremi relativi, la seconda: $x_{min} = 2$; i punti comuni sono $A \equiv \left(1-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}\right), B \equiv \left(1+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}\right)$, $C \equiv (1; 2)$, appartenenti a $x + y - 3 = 0$]

18. (Liceo scientifico 1977/78) Si studi la funzione $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ e se ne disegni il grafico. Si scriva l'equazione della circonferenza tangente ai tre rami delle curve e si calcolino il perimetro e l'area del triangolo individuato dai tre punti di contatto. [$x_{min} = 0$; $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$; Area = $3 \cdot \sqrt{3}$]

19. (Liceo scientifico suppletiva 1978/79) Data la funzione $y = \frac{4x^2+1}{3x}$ se ne rappresenti il grafico. Preso un punto P sull'arco di curva che appartiene al primo quadrante, si conducano per esso le parallele agli asintoti che incontrano questi nei punti A e B rispettivamente e si determini la posizione di P per la quale è minima la somma dei segmenti PA e PB. $\left[x_{Max} = -\frac{1}{2}, x_{min} = \frac{1}{2}, f(x) = \frac{1}{3x} + \frac{5}{3}x, x_{min}(P) = \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$

20. (Liceo scientifico 1978/79) Si studi la funzione $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ e se ne disegni il grafico. Si scrivano l'equazione della parabola avente come asse l'asse delle ordinate, vertice nel punto (0; 1) e tangente alla curva e quella della parabola a questa simmetrica rispetto alla congiungente i due punti di contatto. [m: (–1; 2), (1; 2); $y = \frac{3}{4} x^2 + 1$, $y = \frac{3}{4} x^2 + 4$]

21. (Liceo scientifico suppletiva 1978/79) Si studi la funzione $y = x + \frac{4}{x^2}$ e se ne disegni il grafico. Detti A il punto estremo relativo e B l'ulteriore punto di intersezione della curva con la tangente in A, si scriva l'equazione della parabola passante per A e tangente alla curva in B. [$x_{Min} = 2$; $y = -3x^2 + 3x + 9$]

22. (Liceo scientifico suppletiva 1979/80) Data la funzione $y = \frac{1+sin(x)}{sin(x)}$ se ne rappresenti il grafico dopo aver determinato i massimi e i minimi valori di x nell'intervallo (0; 2π). Si consideri poi facoltativamente la funzione $y = log\left|\frac{1+sin(x)}{sin(x)}\right|$ e la si rappresenti utilizzando gli elementi ottenuti per la rappresentazione della funzione precedente. [($x_{Max} = 3/2\pi$, $x_{min} = \pi/2$); $x_{min} = \pi/2$]

23. (Liceo scientifico 1979/80) Si rappresenti la funzione: $y = \frac{6x^2 + 2x + 3}{2 \cdot (2x^2 + 1)}$ dopo aver determinato massimi, minimi, flessi e asintoti. Effettuata la sostituzione $x = t$, $y = s$, si interpreti la s come la distanza percorsa su di una retta da un punto al variare del tempo t; si dica per quali valori del tempo t positivo la velocità è massima in modulo e si descriva il moto del punto.

$$\left[x_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}, x_{\min} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_{fle} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \vee 0 \vee \sqrt{\frac{3}{2}}, as.: y = \frac{3}{2}, v_{\max} = v(0)\right]$$

24. (Liceo scientifico suppletiva 1980/81) Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2}$ in modo che la curva da essa rappresentata ammetta come asintoto obliquo la retta di equazione $y = x - 2$, abbia un estremo relativo nel punto di ascissa $x = 2$ e un flesso nel punto di ascissa $x = -1$. Se ne disegni il grafico. Si determinino inoltre le intersezioni della curva con l'iperbole equilatera avente per asintoti gli assi coordinati e passante per il punto (1; 3).

$$\left[a = 1, b = -2, c = 3, d = 1; A \equiv (1;3), B \equiv \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; -\frac{3\cdot\sqrt{5}+3}{2}\right), C \equiv \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-3\cdot\sqrt{5}+3}{2}\right)\right]$$

25. (Liceo scientifico 1980/81) Si studi la funzione $y = x^2 + \frac{16}{x^2}$ e se ne disegni il grafico. [$x_{\min} = \pm 2$]

26. (Liceo scientifico 1981/82) Si studi la funzione $y = sin^3(x) + cos^3(x)$ nell'intervallo [0; 2π] e se ne disegni il grafico. $\left[x_{Max} = 0 \vee \frac{\pi}{2} \vee \frac{5}{4}\pi \vee 2\pi; x_{\min} = \frac{\pi}{4} \vee \pi \vee \frac{3}{2}\pi\right]$

27. (Liceo scientifico 1981/82) Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ in modo che la curva da essa rappresentata tocchi la retta $y = x$ nel punto $A \equiv (1; 1)$ e la retta $y = 0$ in $B \equiv (3; 0)$. Se ne disegni il grafico. [$y = ½x^3 - 13/4x^2 + 6x - 9/4$; $F \equiv (13/6; 125/6$, $m \equiv (3; 0)$, $M \equiv (4/3; 125/108)$]

28. (Liceo scientifico 1982/83) Si studi la funzione $y = sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ e se ne disegni il grafico. Utilizzando il grafico precedente si studi la funzione $y = e^{f(x)}$, dove $f(x)$ è la funzione precedentemente studiata. [La seconda funzione: $x_{Max}= \pi/6$, $x_{min}= 7\pi/6$ in $(0; 2\pi)$]

29. (Liceo scientifico 1982/83) Si studi la funzione $y = \frac{a^2}{x^2} - 1$ e se ne disegni il grafico. Si determinino le intersezioni della curva da essa rappresentata con la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = a^2$ e si trovi il valore di a per cui dette intersezioni sono vertici di un esagono regolare.

$$\left[(\pm a; 0), \left(\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{4a^2+1}}{2}}; \frac{-1+\sqrt{4a^2+1}}{2}\right); a = 2\cdot\sqrt{3}\right]$$

30. (Liceo scientifico suppletiva 1982/83) Si determinino i coefficienti di $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ in modo che la curva da essa rappresentata abbia due estremi relativi nei punti $A \equiv (1; 1)$ e $B \equiv (-1; -1)$. Se ne disegni il grafico. Si scriva l'equazione della parabola, con l'asse parallelo all'asse delle ordinate, passante per il punto A e per i punti in cui la curva data incontra il semiasse positivo delle ascisse.

$$\left[a = -\frac{1}{2}, b = 0, c = \frac{3}{2}, d = 0; y = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{3+\sqrt{3}}{2}x\right]$$

31. (Liceo scientifico suppletiva 1982/83) Si studi la funzione $y = a \cdot sin(x) + cos^2(x)$ e se ne disegni il grafico dopo aver determinato a in modo che la curva abbia un flesso nel punto di ascissa $x = 7\pi/6$. [$a = 2$]

32. (Liceo scientifico 1983/84) Si studi la funzione $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ e se ne disegni il grafico. Si individui la traslazione di equazioni: $x = X + a$; $y = Y + b$ che rende la curva simmetrica rispetto all'origine e si scriva l'equazione della curva trasformata. Si determinino le coordinate dei punti in cui la curva data incontra la bisettrice del primo e del terzo quadrante.

$$\left[M\equiv(0;1),m\equiv(1;0);a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{2};Y=2X^3-\frac{3}{2}X;A\equiv\left(\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2}\right),B\equiv\left(-\frac{\sqrt{5}}{2};-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

33. (Liceo scientifico suppletiva 1983/84) Si disegni il grafico della funzione $y = x^3 - 2x^2 + x + a$ attribuendo ad a un valore particolare a scelta del candidato. Si dica come deve essere scelto a perché la curva rappresentativa incontri l'asse delle ascisse in uno, due o tre punti.

$$\left[a=0\Rightarrow M\equiv\left(\frac{1}{3};\frac{4}{27}\right),m\equiv(1;0);\begin{cases}a<-\frac{4}{27}\vee a>0 & \textit{un punto}\\ -\frac{4}{27}\le a\le 0 & \textit{tre punti}\end{cases}\right]$$

34. (Liceo scientifico 1985/86) Si studi la funzione $y = x^4 - kx^2$ distinguendo vari casi, a seconda dei valori assunti dal parametro reale k. In particolare si calcoli il minimo della funzione per ogni valore di k. Si disegnino i grafici corrispondenti ai valori $k = -1$ e $k = 1$.

$$\left[x_{\min}=\begin{cases}0 & \forall k\in\mathbb{R}\\ \pm\sqrt{\frac{k}{2}} & k>0\end{cases}\right]$$

35. (Liceo scientifico PNI 1989/90) Si studi la funzione $f(x)=\frac{1-x}{x^2-3x}$. [Nessun estremo relativo]

36. (Liceo scientifico suppletiva 1990/91) Si disegni in un piano cartesiano ortogonale Oxy la curva C di equazione $y=\frac{\sqrt{2x^2-1}}{x}$. [Nessun estremo relativo]

37. (Liceo scientifico PNI 1991/92) In un piano cartesiano ortogonale Oxy si considerino le parabole C e C' di equazione rispettivamente: $y - x^2 = 0$, $y^2 + 8x - 6y - 3 = 0$. Si verifichi che C e C' sono tangenti in $A \equiv (1; 1)$ e che hanno in comune un ulteriore punto B. Detto P un punto della retta AB sia QQ' la corda intercettata da C sulla parallela per P all'asse delle ascisse, RR' la corda intercettala da C' sulla parallela per P all'asse delle ordinate e S la proiezione di P sulla retta di equazione $y + 2 = 0$. Si studi come varia il rapporto: $\frac{8\cdot\overline{PS}^2}{\overline{QQ'}\cdot\overline{RR'}}$ al variare di x ordinata di P, determinando in particolare il suo valore minimo.

$$\left[\frac{(x+2)^2}{x},x_{\min}=2\right]$$

38. (Liceo scientifico PNI 1991/92) In un piano cartesiano ortogonale si indichino con x e y le coordinate di un punto P e con X e Y le coordinate di un punto P'. a) Si consideri la trasformazione di equazioni: $X = ax + by$; $Y = a'x + b'y$, tale che al punto $A \equiv (1; 1)$ corrisponda il punto $A' \equiv (0; 2)$ e al punto $B \equiv (1; 0)$ corrisponda $B' \equiv (1; 0)$. [$a = 1$, $b = -1$, $a' = 0$, $b' = 2$] b) Si studi la trasformazione ottenuta determinando in particolare i punti e le rette che si trasformano rispettivamente in se stessi. [$(x; 0)$, $ax + ay + c = 0$] c) Detto α l'angolo acuto formato dalla retta r di equazione $y = mx$ e dalla sua trasformata r' si studi come varia la tangente trigonometrica di α al variare della retta r, determinando in particolare il massimo relativo e quello assoluto di $tan(\alpha)$.

$$\left[tan(\alpha)=\frac{|m^2+m|}{2m^2-m+1},x_{Max}=-\frac{1}{3}\vee 1\right]$$

39. (Liceo scientifico suppletiva 1991/92) Studiare la funzione $y(x) = cos(x)\cdot e^{-x}$ per $x \ge 0$.

[$x_{Max}= 7\pi/4 + 2k\pi$, $x_{min}= 3\pi/4 + 2k\pi$]

40. (Liceo scientifico suppletiva 1991/92) In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2r$ inscrivere il triangolo ABD retto in D. Tracciare la bisettrice dell'angolo $D\hat{A}B$: tale bisettrice intersechi il segmento BD in E. Indicato con x l'angolo $B\hat{A}E$, determinare il rapporto y tra la lunghezza del segmento BE e la lunghezza del segmento BD: $y=\frac{\overline{BE}}{\overline{BD}}$. Calcolare il rapporto y per x che tende a zero, quindi

rappresentare la funzione $y = f(x)$. $\left[\lim_{x\to 0} y = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{2\cdot cos^2(x)}\right]$

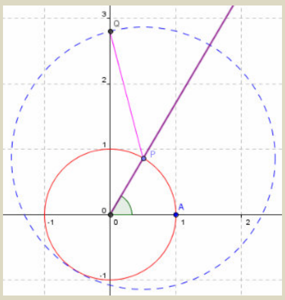
41. (Liceo scientifico suppletiva 1991/92) Dati i due punti $A \equiv (-1; 0)$ e $B \equiv (1; 0)$ determinare il luogo dei punti $P \equiv (x, y)$ tali che $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = K$, con $K > 0$. Descrivere le caratteristiche delle curve trovate come luogo. Trovato, per $K \neq 1$, il centro C di tali curve in funzione di K, studiare l'andamento dell'ascissa del centro di tali curve al variare di K. $\left[x^2 + y^2 + 2\cdot\frac{1+K^2}{1-K^2}\ \ x + 1 = 0, C \equiv \left(\frac{1+K^2}{K^2-1};0\right)\right]$

42. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1991/92) Si consideri in un piano cartesiano ortogonale Oxy la circonferenza di centro $A \equiv (1; 0)$, passante per l'origine degli assi. Detta r la retta di equazione $y = mx$, sia OPQ il triangolo rettangolo inscritto nella circonferenza il cui cateto OP appartiene alla retta r. Si studi come varia l'area $f(m)$ del rettangolo avente come lati i cateti del triangolo OPQ e si tracci in un piano, riferito a un sistema cartesiano ortogonale $O'ms$, la curva C di equazione $s = f(m)$.
$\left[f(m) = \frac{4m}{m^2+1}; M_1 \equiv (1;2), M_1 \equiv (-1;-2), m \equiv (0;0)\right]$

43. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1991/92) Si consideri l'insieme delle curve avente, in un piano cartesiano ortogonale Oxy, equazione: $y = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x}$. Si determinino le curve C e C' dell'insieme passanti per i due punti P e P' dell'asse delle ascisse, ciascuno a distanza 2 dall'origine degli assi, e tali che P sia estremo per C e P' estremo per C'. Si dimostri che P e P' sono punti di flesso rispettivamente per C' e per C. Si calcolino le tangenti nei punti di flesso e si disegnino le curve, Scritta l'equazione della curva C'' corrispondente della curva C' nella simmetria avente per asse la retta di equazione $y = 2$, si dimostri che le curve C e C' si corrispondono in una trasformazione T. Si individuino la natura di T e i suoi punti e rette unite. [per C: $a = -2$, $b = -4$, $c = 8$; per C': $a = 2$, $b = -4$, $c = -8$; T una simmetria ci centro $A \equiv (0; -2)$, punto unito: A, rette unite: $ax + by + 2b = 0$]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il problema assegnato agli esami di Liceo scientifico 1992/93. Dato un sistema di assi cartesiani ortogonali di centro O, tracciare la circonferenza γ di raggio unitario e centro O. Detto A il punto di coordinate (1; 0), indicare con θ l'angolo formato da una generica semiretta uscente dall'origine con il semiasse positivo delle x e con P il punto in cui tale semiretta interseca γ ($P\hat{O}A = \theta$). Determinare in funzione di θ l'ordinata y del punto Q appartenente al semiasse positivo delle y tale che $\overline{PQ} = 2$. Descrivere, limitandosi all'uso della derivata prima, la funzione $y = f(\theta)$ così trovata. Se P ruota sulla circonferenza γ con velocità angolare costante, il moto di Q quali caratteristiche presenta? Negli istanti in cui Q ha velocità nulla, P dove si trova?



La circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 = 1$. Consideriamo la figura.

La semiretta OP ha equazione $y = tan(\theta)\, x$, quindi le coordinate di P sono:

$$\begin{cases} y = tan(\theta)\cdot x \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = tan(\theta)\cdot x \\ x^2+tan^2(\theta)\cdot x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = tan(\theta)\cdot x \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{1+tan^2(\theta)}} = cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = sin(\theta) \\ x = cos(\theta) \end{cases}$$

Determiniamo le coordinate di Q:

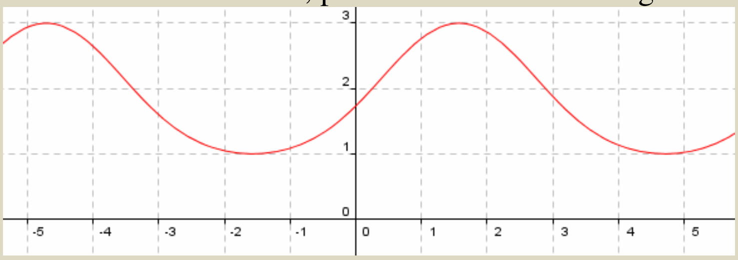
$$\overline{PQ} = 2 \Rightarrow cos^2(\theta)+\left[y_Q - sin(\theta)\right]^2 = 4 \Rightarrow \left[y_Q - sin(\theta)\right]^2 = 4 - cos^2(\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_Q = sin(\theta)+\sqrt{4-cos^2(\theta)} \Rightarrow y_Q = sin(\theta)+\sqrt{3+sin^2(\theta)}$$

Studiamo questa funzione, che è sempre positiva, date le limitazioni imposte dal problema, periodica di 2π, quindi non ha asintoti di nessun genere. Studiamo la derivata prima:

$$y' = cos(\theta)+\frac{2\cdot sin(\theta)\cdot cos(\theta)}{2\cdot\sqrt{3+sin^2(\theta)}} = \frac{cos(\theta)}{\sqrt{3+sin^2(\theta)}}\cdot\left[\sqrt{3+sin^2(\theta)}+sin(\theta)\right]$$

Il secondo fattore è sempre positivo, quindi essa si annulla solo per θ = π/2 o θ = 3π/2, più le periodicità. Ovviamente per il primo valore si ha un massimo, per l'altro un minimo. Il grafico è il seguente:



Se P ruota sulla circonferenza γ con velocità angolare costante, anche Q effettua un moto periodico che varia dall'ordinata dei minimi: 1, a quella dei massimi: 3. Se Q ha velocità nulla, vuol dire che la derivata prima della funzione è nulla, cioè P e Q avrebbero la stessa ordinata.

44. (Liceo scientifico 1992/93) Sia $\begin{cases} x = sin(t) \\ y = sin(2t) \end{cases}$. Esprimere y in funzione di x rappresentare le due funzioni $y = \pm f(x)$ in uno stesso sistema cartesiano. Individuare simmetrie e caratteristiche del grafico trovato. $\left[y = \pm 2x\cdot\sqrt{1-x^2}\right]$

45. (Liceo scientifico suppletiva 1992/93) $y = \sqrt[3]{x^3-x^2}$. Quali considerazioni si possono fare sui punti di ascissa $x = 0$ e $x = 1$? [x_{min}= 2/3, non esistono $y'(0)$, $y'(1)$]

46. (Liceo scientifico suppletiva 1992/93) Studiare $f(x) = \left|\dfrac{sin(x)}{k-cos(x)}\right|$ dopo aver determinato il valore di k in modo che la funzione abbia un massimo per $x = \pi/3$. [$k = 2$]

47. (Liceo scientifico PNI 1992/93) Si studi la funzione $f(x) = 1+\sqrt{x^2-2x+5}$ e si tracci, in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, la curva c di equazione $y = f(x)$, verificando che essa è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = 1$. Si determinino in particolare le equazioni $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$ degli asintoti di C. [$g_1(x) = x$, $g_2(x) = -x + 2$]

48. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1992/93) Si studi la funzione $f(x) = \sqrt[3]{1+3x^2}$ e si tracci, in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, il grafico della curva C di equazione $y = f(x)$, determinando in particolare l'ascissa a del suo punto di flesso F appartenente al primo quadrante. Sia S l'area della parte finita di piano delimitata dalla curva C, dagli assi coordinati e dalla parallela all'asse delle ordinate passante per F. Si divida l'intervallo I, appartenente all'asse delle ascisse, di estremi 0 e a, in n parti uguali di estremi $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = a$. Siano T_n e R_n rispettivamente le aree dei poligoni, il primo somma dei trapezi aventi per altezza i segmenti in cui è stato diviso I e per basi i segmenti di lunghezza $f(x_h)$ e $f(x_{h+1})$ ($h = 0, 1, 2, ..., n - 1$) e il secondo somma dei rettangoli aventi per lati le altezze dei trapezi e i segmenti di lunghezza $f(x_h)$ ($h = 0, 1, 2, ..., n - 1$). Si dimostri che $R_n < S <$

T_n e si determini il valore minimo di n per il quale risulta $T_n - R_n < \frac{1}{10^k}$ (k intero).

$$\left[x_{\min} = 0, a = 1, n > \frac{\left(\sqrt[3]{4}-1\right)\cdot 10^k}{2} \right]$$

49. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1992/93) Si stabiliscano le relazioni cui debbono soddisfare a e b affinché il sistema di equazioni: $\begin{cases} ax + 2y + bz = 1 \\ x + y + az = 1 \\ x + ay + bz = 1 \end{cases}$ ammetta un'unica soluzione o infinite soluzioni o nessuna soluzione. Nella relazione cui debbono soddisfare a e b affinché il sistema non ammetta un'unica soluzione si esegua la sostituzione: $a = X$; $b = XY$. Si tracci, in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, la curva C rappresentata dall'equazione a cui si perviene.

$$\left[\begin{cases} b \neq \frac{a\cdot\left(a^2-2\right)}{2a-3} & 1\ sol \\ \begin{cases} b = \frac{a\cdot\left(a^2-2\right)}{2a-3} \wedge a = 1 & \infty\, sol; Y = \frac{X^2-2}{2x-3} \\ b = \frac{a\cdot\left(a^2-2\right)}{2a-3} \wedge\ a \neq 1 & 0\, sol \end{cases} \end{cases} \right]$$

50. (Liceo scientifico 1993/94) Nel piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la curva k di equazione: $y = \frac{x^2}{2} + ln|x+1|$. Disegnare un andamento approssimato dopo aver verificato, fra l'altro, che essa ha due flessi. Calcolare l'area del triangolo formato dalla retta congiungente tali flessi e dalle tangenti inflessionali. [$F_1 \equiv (-2; 2)$, $F_2 \equiv (0, 0)$; area triangolo = 2]

51. (Liceo scientifico 1993/94) Una piramide ha per base il triangolo ABC, isoscele e rettangolo in A, e ha per altezza il segmento AV. Inoltre la faccia VBC forma un angolo di 45° col piano della base e lo spigolo VB è lungo $2h\cdot\sqrt{3}$, dove h è una lunghezza nota. Calcolare la distanza del vertice A dal piano della faccia VBC e trovare per quale valore di h tale distanza vale $4\cdot\sqrt{2}$. Verificato che questo valore di h è 4, con riferimento a esso secare la piramide con un piano parallelo alla base ABC e, proiettato ortogonalmente il triangolo sezione sulla base stessa, esprimere il volume del prisma triangolare così ottenuto in funzione della sua altezza x. Studiare, in rapporto alla questione geometrica, la funzione $f(x)$ ricavata e tracciarne l'andamento in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy. Calcolare infine quanti, fra i punti della regione piana compresa fra il grafico di $f(x)$ e l'asse x, escluso il contorno, hanno entrambe le coordinate intere. [$f(x) = x\cdot (8 - x)^2$; $x_{Max} = 8/3$; 329]

52. (Liceo scientifico suppletiva 1993/94) Studiare le funzioni: $y = x^3 + 1$ e $y = \sqrt{x^3+1}$ e disegnare i loro grafici, rispettivamente K' e K'', nello stesso piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy. Successivamente, tra i segmenti intercettati, dalla regione piana R delimitata da K' e K'', su una parallela all'asse y, determinare quello di lunghezza massima. $\left[L(k) = \sqrt{k^3+1} - k^3 - 1, k_{Max} = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \right]$

53. (Liceo scientifico suppletiva 1993/94) Considerato il rettangolo $ABCD$, il cui lato AB è lungo a, condurre per B la perpendicolare alla retta AC e chiamare H ed E i punti in cui essa seca le rette AC e AD nell'ordine. Condurre quindi per H la perpendicolare al piano della figura e su di essa prendere un punto P tale che: $\overline{HP} = 6\cdot\overline{AE}$. Esprimere il volume della piramide, avente per vertice il punto P e per base il quadrilatero $HDEC$, in funzione della lunghezza x del segmento BH. Studiare, indipendentemente dalla questione geometrica, la funzione $f(x)$ fornita dall'espressione del volume suddetto quando $a = 1$ e disegnare il grafico G in un piano cartesiano ortogonale Oxy.

$$\left[f(x)=\frac{\left(1-x^2\right)^2}{x^2};x_{\min}=\pm 1\right]$$

54. (Liceo scientifico PNI 1993/94) Si studi la funzione: $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2}$. Si tracci, in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*, il grafico della curva *C* di equazione $y = f(x)$ e si scrivano le equazioni delle rette tangenti a *C* nei suoi punti $(x, f(x))$, per i quali $f(x)$ assume valore estremo relativo, e della tangente nel suo punto di flesso. Detta *r* la parallela all'asse delle ascisse passante per il punto *P* di intersezione della curva *C* con il proprio asintoto *a*, si determini il rapporto dei segmenti *QR* e *OP*, essendo *Q* e *R* le proiezioni su *a* degli ulteriori punti di intersezione di *r* con *C*.

$$\left[x_{Max}=-2,x_{\min}=0;Tang:y=\sqrt[3]{4},x=0,x=-3;\frac{\overline{QR}}{\overline{QP}}=4\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\right]$$

55. (Maturità magistrale PNI 1993/94) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy* si considerino la circonferenza *C* di equazione $x^2 + y^2 - 2y = 0$ e la curva *C′*, ottenuta come trasformata mediante l'omotetia *T* di equazione: $\begin{cases} X=2x+2 \\ Y=2y \end{cases}$. Sia *P* il punto d'intersezione di *C* e *C′* appartenente all'asse delle ordinate. Si conduca per *P* una retta *r* e siano *PQ* e *PR* le corde intercettate da *r* su *C* e su *C′*. Si studi come varia, al variare di *r*, la quarta parte della somma dei quadrati delle misure delle due corde. Si determinino il centro A e il valore del rapporto *k* dell'omotetia *T* e si scrivano le equazioni delle tangenti comuni a *C* e *C′*. $\left[f(x)=\frac{x^2+4}{x^2+1};x_{\min}=0,x_{Max}=\frac{\sqrt{3}}{3};A\equiv(-2;0),k=2;y=\frac{4}{3}\cdot(x+2)\right]$

56. (Liceo scientifico PNI 1994/95) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy* si consideri la parabola Γ di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ e sia *P* il punto di Γ di ascissa λ. Il candidato: a) scriva l'equazione della parabola passante per l'origine *O* e avente il vertice nel punto *P*; $\left[y=\frac{\lambda-1}{2\lambda}x^2+(1-\lambda)x\right]$ b) determini l'equazione della curva Σ, luogo geometrico del fuoco della parabola al variare di λ; $\left[\frac{x^2\cdot(2-x)}{2\cdot(x-1)}\right]$ c) tracci il grafico della curva Σ individuandone in particolare il flesso *F*. $[F \equiv (2; 0)]$

57. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1994/95) È dato in un piano α il triangolo *ABC* retto in *B* con i lati $\overline{AB}=a,\overline{AC}=2a$. Si conducano in uno dei semispazi individuati dal piano α i segmenti *AA′*, *BB′*, *CC′* perpendicolari ad α, tali che $\overline{AA'}=\overline{BB'}=4a$ e l'angolo $B\hat{B}'C=\frac{\pi}{4}$. Il candidato a) indicato con *P* un punto del segmento *BB′* e posto $\overline{BP}=x$, studi come varia la somma $s=\overline{AP}+\overline{PC'}$ al variare di *P* determinando in particolare, con un metodo analitico o sintetico, il minimo e il massimo valore assoluto di *s*, e tracci in un piano riferito a un sistema di assi ortogonali *Oxs* la curva di equazione *s* = *s*(*x*); $\left[\begin{array}{l} s(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{x^2+2\cdot\left(\sqrt{3}-4\right)\cdot ax+\left(22-8\cdot\sqrt{3}\right)\cdot a^2}, \quad 0\le x\le 4a \\ s_{\min}=\sqrt{23-6\cdot\sqrt{3}}\cdot a;s_{\max}=\left(\sqrt{17}+\sqrt{6}\right)\cdot a \end{array}\right]$ b) dimostri che la faccia *A′B′C′* del solido *T* di vertici *ABCA′B′C′* è un triangolo rettangolo; c) calcoli la superficie totale e il volume di *T*. $\left[S=\frac{21+7\cdot\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}a^2,V=\frac{4\cdot\sqrt{3}-1}{2}a^3\right]$

58. (Liceo scientifico 1994/95) Nel cubo di vertici *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* le facce *ABCD* e *EFGH* sono opposte e i segmenti *AE*, *BF*, *CG* sono spigoli. Inoltre gli spigoli del cubo hanno lunghezza unitaria. Sullo spigolo *BF* prendere un punto *P* tale che: $\overline{BP}=x$. a) Verificare che la distanza *y* di *P* dalla

diagonale *AG* è espressa da: $y=\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\left(x^2-x+1\right)}$. b) Di essa disegnare il grafico in un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*, dopo avere trovato, fra l'altro, le equazioni dei suoi asintoti

$$\left[y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]$$

59. (Liceo scientifico suppletiva 1994/95) Studiare la funzione: $y=\sqrt[3]{x^2+1}$ e disegnarne il grafico *G* in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*. Verificato che *G* ha due flessi, *F′* e *F″*, calcolare l'area del triangolo di vertici *O*, *F′*, *F″*. Trovare i due interi consecutivi entro i quali è compresa quest'area. $\left[x_{\min}=0; F'\equiv\left(-\sqrt{3};\sqrt[3]{4}\right), F''\equiv\left(\sqrt{3};\sqrt[3]{4}\right); A_{OF'F''}=\sqrt[6]{432}; 2<\sqrt[6]{432}<3\right]$
60. (Istituto magistrale PNI 1994/95) Su una semiretta di origine A_0 è dato il segmento A_0A_1 di lunghezza 2. Si considerino i segmenti adiacenti A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$ tali che il rapporto tra ogni segmento e il precedente sia *k*. Il candidato: a) dimostri che le aree dei cerchi aventi per diametro i suddetti segmenti sono i termini di una progressione geometrica e calcoli l'area S_n della parte di piano delimitata dalla successione delle prime *n* circonferenze; b) determini il limite di S_n al tendere di *n* all'infinito quando $k = ½$; [$4\pi/3$] c) determini, in generale, il limite di S_n al tendere di *n* all'infinito, distinguendo i due casi: 1) $k < 1$, 2) $k \geq 1$; e verificando che nel caso 1) detto limite assume valore finito $S(k)$; $\left[1)\ 1;\ 2)\frac{\pi}{1-k^2}\right]$ d) studi, in detto caso, come varia $S(k)$ al variare di *k* e disegni, in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *OkS* la curva di equazione $S = S(k)$. [F. sempre crescente]
61. (Liceo scientifico 1995/96) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), è assegnata la curva *k* di equazione: $y=\frac{x^2}{4-x^3}$. Dopo averla studiata (dominio, eventuali zeri ed estremi, asintoti di *k*), disegnarne l'andamento. [$x_{\text{Min}} = 0$, $x_{\text{Max}} = -2$]
62. (Liceo scientifico suppletiva 1995/96) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), sono assegnate le curve di equazione: $y=\frac{2x^2+ax+b}{x^3}$ dove *a* e *b* sono parametri reali. Trovare quale relazione lega questi parametri quando le curve considerate hanno un punto di massimo e uno di minimo relativi e stabilire a quali altre condizioni devono soddisfare *a* e *b* affinché tali punti, quando esistono, abbiano ascisse dello stesso segno. Tra le curve assegnate determinare la curva *k* avente gli estremi relativi nei punti *A*, *B* di ascisse 1 e 3 rispettivamente e disegnarne l'andamento.

$$\left[0<b<\frac{a^2}{6}, k(x)=\frac{2\cdot(x-1)^2}{x^3}\right]$$

63. (Liceo scientifico suppletiva 1995/96) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), sono assegnate le curve di equazione: $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, dove *a*, *b*, *c* sono numeri reali. a) Determinare tra queste le due curve k_1 e k_2 che passano per l'origine e per il punto $A \equiv (2; 0)$ e sono tangenti all'asse delle ascisse rispettivamente in *O* e in *A*. Disegnare l'andamento di k_1 e k_2. [k_1: $y = x^2 \cdot (x - 2)$, k_2: $y = x \cdot (x - 2)$] b) Considerata la regione piana *R* delimitata dagli archi di k_1 e k_2, aventi gli estremi in *O* e in *A*, trovare tra le sue corde parallele all'asse delle ordinate quella di lunghezza massima. Calcolare poi l'area del quadrilatero convesso avente per vertici gli estremi di questa corda e i punti *O* e *A*. [max lungh: 2; Area di *R* = 8/3; Area quad. = 2] c) Verificare che le equazioni delle due curve k_1 e k_2 si trasformano l'una nell'altra con la sostituzione $\begin{cases}x=2-x'\\y=-y'\end{cases}$ ed esprimere questa proprietà in termini geometrici. [simmetria di centro (1; 0)]
64. (Liceo scientifico suppletiva 1995/96) Nel triangolo *ABC* rettangolo in *A*, risulta $\overline{AB}=a,\ sin\left(A\hat{B}C\right)=\frac{4}{5}$, dove *a* è una lunghezza nota. Indicato con *D* un punto della semicirconferenza di diametro *BC*, non contenente *A*, esprimere l'area *S* del triangolo *ABD* in funzione

dell'ampiezza dell'angolo $B\hat{A}D$. Constatato che $S = \frac{a^2}{6} \cdot [4 \cdot sin^2(x) + 3 \cdot sin(x) \cdot cos(x)]$, studiare questa funzione e disegnarne l'andamento con riferimento alla questione geometrica. Utilizzare il disegno ottenuto al fine di calcolare per quali valori di x l'area S risulta uguale a ka^2, dove k è un parametro reale. Determinare infine il perimetro del triangolo ABD per il quale è massima l'area S.

[1 sol. $0 \le k \le 2a^2/3$, 2 sol. $2a^2/3 < k < 3a^2/4$; perimetro = $(1+\sqrt{10}) \cdot a$]

65. (Liceo scientifico PNI 1995/96) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti $A \equiv (2; 0)$ e $B \equiv (0, 4)$. Sia $P \equiv (x, y)$ un punto di detto piano con $x > 0$ e $y > 0$, e C, D, E, F i punti medi dei lati OA, AP, PB, BO del quadrilatero $OAPB$. Il candidato: a) dica quali posizioni deve occupare P affinché il quadrilatero $OAPB$ degeneri in un triangolo; [$P \in AB$] b) dimostri che il quadrilatero $CDEF$ è un parallelogramma; c) dica quali posizioni deve occupare P affinché il parallelogramma $CDEF$ sia un rettangolo; [$P \equiv (x; x/2)$, $x > 0$] d) dica quali posizioni deve occupare P affinché il parallelogramma $CDEF$ sia un rombo; [$P \in x^2 + y^2 = 20$, $x > 0$, $y > 0$] e) dica dove si trova P quando il parallelogramma $CDEF$ è un quadrato e ne determini le coordinate; [$P \equiv (4: 2)$] f) dimostri che l'area del parallelogramma $CDEF$ è metà dell'area del quadrilatero $OAPB$; g) esprima in funzione dell'ascissa di P il rapporto z tra l'area del quadrato di lato EF e l'area del parallelogramma $CDEF$, quando P, oltre a rispettare le condizioni inizialmente assegnate, appartiene alla retta di equazione $y = 4 - x$; $\left[z = \frac{x^2 - 4x + 8}{x + 4}, 0 < x < 4\right]$ h) studi la funzione $z(x)$ e ne disegni il grafico in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali $O'xz$.

66. (Liceo scientifico PNI 1995/96) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è assegnata la parabola di equazione $y = -x^2 + 2x + 3$. Sia $P \equiv (x, y)$ un punto dell'arco γ, appartenente al primo quadrante, di detta parabola e H la proiezione di P sull'asse delle ascisse. Sul piano α passante per il punto P e perpendicolare all'asse delle ascisse, si consideri il triangolo APB, avente i lati AP e PB uguali, il segmento PH come altezza relativa al alto AB e tale che la somma delle lunghezze di AB e di PH sia 4. Il candidato: a) dica quali posizioni deve occupare P sull'arco considerato affinché il triangolo APB esista; [$0 \le x < 1 \vee 1 < x < 3$] b) limitatamente alle suddette posizioni di P, esprima l'area di S del triangolo APB in funzione dell'ascissa di P e studi come essa varia al variare di P; [$S = ½ (x - 1)^2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 3)$, $0 \le x < 3 \wedge x \ne 1$] c) calcoli il volume del solido, luogo del triangolo APB al variare di P sull'arco γ; [27/10] d) risponda alle domande a) e b) quando P varia sull'arco γ' della parabola considerata, appartenente al semipiano $x \ge 0$, verificando in particolare se esistono estremi relativi e assoluti di $S(x)$ ed eventualmente determinandoli.

$$\left[0 \le x < 1 + 2\cdot\sqrt{2}, x \ne 1 \wedge x \ne 3; x_{\max} = 1 + 2\cdot\sqrt{2} \vee 1 + \sqrt{6} \vee 0\right]$$

67. (Liceo scientifico 1996/97) Sono assegnate le funzioni in x: $\frac{x^4 + ax^2 + b}{x^2 + 1}$ dove a e b sono parametri reali. Fra tali funzioni indicare con $f(x)$ quella per cui la curva k di equazione $y = f(x)$, disegnata in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, soddisfi alle seguenti condizioni: la retta di equazione $y = 1$ sechi k in due punti e sia tangente a essa in un punto; l'asse x sia tangente a k in due punti distinti. $\left[y = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2 + 1}\right]$

68. (Liceo scientifico PNI 1996/97) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sia data la parabola γ di equazione $y = x^2$ e sia P un suo punto di ascissa $\lambda \ne 0$ e r la parallela per P all'asse y. Siano γ_1 e γ_2 le parabole con asse la retta r, vertice in P e stessa distanza focale di γ (distanza fuoco – direttrice, pari a $\frac{1}{2 \cdot |a|}$ per la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$). Il candidato: a) scriva in funzione di λ le equazioni di γ_1 e γ_2, essendo γ_1 la parabola che incontra γ solo in P; [$y = x^2 - 2\lambda x + 2\lambda^2$, $y = -x^2 + 2\lambda x$] b) scriva le equazioni delle trasformazioni che mutano γ in γ_1 e γ in γ_2;

$\left[\begin{cases} x' = x+\lambda \\ y' = y+\lambda^2 \end{cases}, \begin{cases} x' = \lambda - x \\ y' = \lambda^2 - y \end{cases}\right]$ c) dica la natura di dette trasformazioni precisando se si tratta di trasformazioni dirette o inverse e se hanno elementi che si trasformano in se stessi; d) fissato $\lambda = 1$e dette T, T_1, T_2 le rispettive intersezioni di γ, γ_1 e γ_2 con la retta di equazione $x - h = 0$, studi la funzione $z = \frac{\overline{TT_1} + \overline{T_1T_2}}{\overline{TT_2}}$, al variare di h, e ne tracci il relativo grafico in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali $O'hz$. $\left[z = \frac{1+|h-1|}{|h|}\right]$

69. (Liceo scientifico PNI 1996/97) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sia r la retta di equazione $x - 1 = 0$ e P un suo punto. Siano A e B i punti d'intersezione della retta OP con la circonferenza di centro P e raggio $2\cdot\sqrt{2}$. Il candidato: a) verifichi che il luogo di A e B, al variare del punto P su r, è dato dalle curve γ_1 e γ_2, di equazioni $f_1(x) = \frac{x}{x+1}\cdot\sqrt{-x^2+2x+7}$ e $f_2(x) = \frac{x}{x-1}\cdot\sqrt{-x^2+2x+7}$; b) determini l'insieme E di esistenza della funzione $f_1(x)$, gli insiemi in cui essa assume valore positivo, negativo o nullo , gli eventuali asintoti, il valore x_0 in cui ha un massimo relativo e dimostri che le tangenti a γ_1, nei punti le cui ascisse sono gli estremi di E nei quali $f_1(x)$ è definita, sono parallele all'asse y; $\left[E = \left[1-2\cdot\sqrt{2},1\right)\cup\left(1,1+2\cdot\sqrt{2}\right]; x_0 = -1\right]$ c) disegni la curva γ_1 e, quindi, la curva γ_2; d) detta t la tangente alla curva γ_1, nel suo punto $M \equiv (x_0; f(x_0))$, determini l'ulteriore intersezione di t con γ_1. $\left[x = 2-\sqrt{3}\right]$

70. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1996/97) Rappresentare in coordinate cartesiane ortogonali la funzione $y = sin(x) + \frac{1}{3}\cdot sin(x)$ nell'intervallo [0; 2π]. Determinare il periodo della funzione $y = sin(nx) + \frac{1}{3}\cdot sin(mx)$, dove n e m sono due numeri interi maggiori di 0.

$$\left[x_{\min}: \frac{\pi}{2} \vee \frac{5\pi}{4} \vee \frac{7\pi}{4}; x_{\max}: \frac{3\pi}{2} \vee \frac{\pi}{4} \vee \frac{3\pi}{4}; P = \frac{2\pi}{m\cdot n}\cdot mcm(m,n)\right]$$

71. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1996/97) Dato un trapezio rettangolo $ABCD$ avente altezza $\overline{AD} = 1$ e basi $\overline{AB} = 2$ e $\overline{CD} = x$, determinare il volume del parallelepipedo retto a base quadrata il cui lato di base sia uguale al lato obliquo BC del trapezio e la cui altezza sia uguale alla base CD del trapezio stesso. Tracciare in coordinate cartesiane ortogonali il grafico della funzione $y = f(x)$ rappresentante il lato del cubo avente lo stesso volume del precedente parallelepipedo. Determinare l'equazione della retta t passante per l'origine del sistema di riferimento delle coordinate cartesiane ortogonali e tangente alla curva $y = f(x)$ in un punto T del primo quadrante. Verificare che T ha coordinate $x = \frac{5}{2}$, $y = \sqrt[3]{\frac{25}{8}}$. $\left[f(x) = \sqrt[3]{x^3-4x^2+5x}; x_{\max} = 1; x_{\min} = \frac{5}{3}; t: y = \frac{\sqrt[3]{25}}{5}\cdot x\right]$

72. (Liceo scientifico 1997/98) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione: $y = ax^3 + 3x + b$ dove a, b sono parametri reali con $a \neq 0$. a) Determinare i valori di a per i quali queste curve hanno un punto di massimo ed uno di minimo relativi e quelli per i quali non ammettono tali punti. [Estr. relativi per $a < 0$] b) Calcolare i valori di a e b in modo che la curva corrispondente abbia un massimo relativo uguale a 0 e sechi l'asse x nel punto di ascissa $-2\cdot\sqrt{2}$. $\left[a = \frac{1}{2}, b = -2\cdot\sqrt{2}\right]$ c) Controllato che la curva si ottiene per $a = -\frac{1}{2}$, disegnarne l'andamento.

73. (Liceo scientifico 1997/98) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è

assegnata la curva C' di equazione: $y=\frac{x^2-1}{2x}$. a) Studiarla e disegnarne l'andamento, indicando con A e B i punti in cui la curva seca l'asse x ($x_A > x_B$). b) Trovare l'equazione della circonferenza C'' tangente a C' in A e passante per B. [$x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$] c) Disegnare C'' sullo stesso piano di C' dopo aver determinato il raggio e il centro di C'' e inoltre le coordinate dell'ulteriore punto in cui C'' seca C'. [$C''\equiv(-1/5; 12/5)$] d) Determinare l'angolo sotto cui C' e C'' si secano in B. [90°]

74. (Liceo scientifico 1997/98) Un cateto di un triangolo rettangolo è lungo $2a$, dove a è una lunghezza nota, e l'angolo acuto adiacente ad esso ha coseno uguale a 4/5. a) Condotta per il vertice dell'angolo retto una retta t che non attraversa il triangolo e indicata con x la misura dell'angolo che questa retta forma col cateto maggiore, esprimere in funzione di x il volume $V(x)$ del solido generato dal triangolo quando compie una rotazione completa intorno alla retta t. b) Verificato che risulta: $V(x)=\frac{1}{2}\cdot\pi a^3\cdot\left[4\cdot sin(x)+3\cdot cos(x)\right]$, con x appartenente ad un determinato intervallo, $V(x)$ nell'intervallo stabilito e disegnarne il grafico in un piano cartesiano. [$x_{\max} = tan^{-1}(4/3)$] c) Utilizzare il grafico disegnato per determinare x in modo che il volume del solido di rotazione descritto sopra sia ka^3, dove k è un parametro reale assegnato. $\left[\begin{cases}1\,sol. & \frac{3}{2}\le k<2\\ 2\,sol. & 2\le k\le\frac{5}{2}\end{cases}\right]$

75. (Liceo scientifico PNI 1997/98) Sia dato il seguente sistema lineare: $\begin{cases}(k+1)\cdot x-y-1=0\\ 2kx-y-1=0\\ 2x+y+1+h=0\end{cases}$. Il candidato: a) dica per quali valori di h e k il sistema ammette soluzioni; [$h = 0 \vee k = 1$] b) interpretate le equazioni del sistema come quelle di tre rette r, s, t di un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, dica quali sono le posizioni delle rette quando il sistema ha soluzione; [($h = 0 \wedge k \neq 1$) $\vee$ ($h \neq 0 \wedge k = 1$), rette incidenti in $P \equiv(-h/4; -(h+2)/2)$; coincidenti : $h = 0 \wedge k = 1$, r e s; $h = 0 \wedge k = -1$, s e t; $h = 0 \wedge k = -3$, r e t] c) nei casi in cui il sistema non ha soluzione, determini, per via algebrica o geometrica, quando le tre rette individuano un triangolo; [$h \neq 0 \wedge k \neq 1 \wedge k \neq -1 \wedge k \neq -3$] d) in tale condizione, fissato $h = 1$, studi come varia l'area s del triangolo al variare di k e disegni, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $O'ks$, la curva di equazione $s = s(k)$.
$\left[s=\frac{1}{4}\cdot\left|\frac{k-1}{k^2+4k+3}\right|\right]$

76. (Liceo scientifico 1998/99) Posto $f(x)=\frac{x^3}{ax+b}$, dove a e b sono parametri reali, determinare tali parametri in modo che la curva γ di equazione cartesiana $y = f(x)$ abbia un estremo relativo nel punto di coordinate (3/4; 27/32). Controllato che la curva γ cercata si ottiene per $a = 2$, studiare tale curva e disegnarne l'andamento in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy). Nello stesso piano (Oxy) disegnare l'andamento della curva γ' di equazione $y = f'(x)$, dopo aver determinato, in particolare, le coordinate dei punti comuni a γ e γ'. Sussiste un'evidente relazione fra l'andamento di γ e quello di γ'. Quale? [$a = 2 \wedge b = -1$; (0; 0), (1; 1); (3/2; 27/16)]

77. (Liceo scientifico 1998/99) Considerato il quadrato $ABCD$, sull'arco di circonferenza di centro A e raggio AB, contenuto nel quadrato, si prenda un punto T in modo che l'angolo $T\hat{A}B$ misuri $2x$ radianti. Si conduca quindi per T la retta tangente alla circonferenza e si chiamino P e Q i punti in cui essa seca le rette BC e CD rispettivamente. a) Esprimere in funzione di x il rapporto $f(x)=\frac{\overline{CP}+\overline{CQ}}{\overline{AT}}$. $\left[\frac{-tan^2(x)+2\cdot tan(x)+1}{1+tan(x)}, 0\le x\le\frac{\pi}{4}\right]$ b) studiare la $f(x)$ ottenuta, tenendo conto dei limiti imposti alla variabile x dalla questione geometrica, e disegnarne il grafico in un piano cartesiano. c)Utilizzare il

grafico disegnato per determinare x in modo che il rapporto considerato sia uguale a un numero reale k assegnato. $\left[\begin{cases} 1\,sol. & 1 \le k \le 4-2\cdot\sqrt{2} \\ 0\,sol. & k<1 \vee k>4-2\cdot\sqrt{2}\end{cases}\right]$ d) Verificare che il rapporto $f(x)$ può essere scritto nella seguente forma: $f(x)=\dfrac{sin(2x)+cos(2x)}{sin(2x)+cos(2x)+1}$. e) Stabilire che risulta $tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$.

78. (Liceo scientifico PNI 1998/99) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy* è data la parabola γ di equazione: $y=\dfrac{x^2}{2}-x$. Siano *A* un punto dell'asse *x* di ascissa λ, con λ > 0, *B* il suo simmetrico rispetto a *O*, e *A′* e *B′* i punti della parabola le cui proiezioni ortogonali sull'asse *x* sono rispettivamente *A* e *B*. Il candidato: a) verifichi che le tangenti *a* e *b* alla parabola γ, rispettivamente in *A′* e *B′*, si incontrano in un punto *E* dell'asse *y*; $[E \equiv (0;\ -\lambda^2/2]$ b) detti *C* e *D* i rispettivi punti di intersezione di *a* e con l'asse *x*, esprima in funzione di λ l'area del triangolo *CED*; $\left[\dfrac{\lambda^5}{4\cdot\left|\lambda^2-1\right|}\right]$ c) studi la funzione $s(\lambda)$ e tracci, in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali $O'\lambda s$, la curva *C* di equazione $s = s(\lambda)$. $\left[\dfrac{25\cdot\sqrt{15}-48}{72}\right]$

79. (Liceo scientifico PNI 1998/99) In un piano α è assegnato il triangolo *ABC*, retto in *B*, i cui cateti *AB* e *BC* misurano rispettivamente 4 e 3. Si conduca per il punto *A* la perpendicolare al piano α e sia *V* un punto di questa per cui $\overline{VA}=\overline{VB}$. Il candidato a) dimostri, geometricamente o algebricamente, che, come tutte le altre facce del tetraedro *VABC*, anche la faccia *VBC* è un triangolo rettangolo, il cui angolo retto è $V\widehat{B}C$; b) calcoli il volume e la superficie totale del tetraedro; $\left[8;6\cdot\left(4+\sqrt{2}\right)\right]$ c) detto *M* il punto medio di *VA* e *P* un punto dello stesso segmento a distanza *x* da *V*, esprima in funzione di *x* il volume *V* del tetraedro *MPQR*, essendo *Q* ed *R* le rispettive intersezioni degli spigoli *VB* e *VC* con il piano β parallelo ad α e passante per *P*; d) $[V(x) = x^2/8\cdot |x-2|]$ e) studi come varia *V* al variare di *P* sul segmento *VA* determinando in particolare la posizione $\overline{P}$ di *P* in cui il volume *V* assume valore massimo; [P≡A] e) detto *D* il punto medio di *VB* ed *E* il punto di *AC* tale che $\overline{AE}=\overline{AB}$, determini la posizione *P** di *P* che rende minima la somma $\overline{DP}+\overline{PE}$ $\left[\overline{VP^*}=\dfrac{8}{3}\right]$ (si consiglia di far ruotare il triangolo *VAB* attorno ad *AV* fino a portarlo nel piano del triangolo *VAE*, simmetricamente a quest'ultimo, e considerare la somma $\overline{D'P}+\overline{PE}$, essendo *D'* il corrispondente di *D* nella suddetta rotazione).

80. (Liceo scientifico PNI 1999/2000) Assegnata la funzione: $f(x) = a\cdot ln^2(x) + b\cdot ln(x)$, il candidato: a) determini per quali valori di *a* e *b* la $f(x)$ ha un minimo relativo in$(\sqrt{e}\,;\ -¼)$; $[a = 1,\ b = -1]$ b) disegni la curva grafico della $f(x)$ per i valori di *a* e di *b* così ottenuti [minimo assoluto per $x=\sqrt{e}$]

81. (Liceo scientifico 2000/2001) Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali *x*, *y*: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{a}$, dove *a* è un parametro reale positivo. a) Esprimere *y* in funzione di *x* e così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*). $\left[y=\dfrac{ax}{x-a}\right]$ b) Determinare per quali valori di *a* la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta *t* di equazione $x + y = 4$. [tangente per $a = 1$, secante per $0 < a < 1$] c) Scrivere l'equazione della circonferenza *k* che ha il centro nel punto di coordinate (1; 1) e intercetta sulla retta *t* una corda di lunghezza $2\cdot\sqrt{2}$. $[x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0]$ d) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da *k* è diviso dalla retta *t*. $[\pi - 2,\ 3\pi + 2]$ e) Determinare per quale valore del parametro

a il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza *k*. $\left[\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$

82. (Liceo scientifico 2002/2003) $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+2}$ e disegnarne il grafico g in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (O*xy*), dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di g ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.
83. (Liceo scientifico PNI 2002/2003) Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro *OA* = *a*, la retta *t* tangente a γ in *A*, una retta *r* passante per *O*, il punto *B*, ulteriore intersezione di *r* con γ, il punto *C* intersezione di *r* con *t*. La parallela per *B* a *t* e la perpendicolare per *C* a *t* s'intersecano in *P*. Al variare di *r*, *P* descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di versiera di Agnesi [da Maria Gaetana Agnesi, matematica milanese, (1718–1799)]. a) Si provi che valgono le seguenti proporzioni: *OD* : *DB* = *OA* : *DP* = *OC* : *DP* = *DP* : *BC* ove *D* è la proiezione ortogonale di *B* su *OA*; b) Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche *Oxy*, l'equazione cartesiana di Γ è: $y=\frac{a^3}{x^2+a^2}$. c) Si tracci il grafico di Γ. $\left[y=0; M\equiv O, F_1\equiv\left(-\frac{a}{\sqrt{3}};\frac{3}{4}a\right); F_2\equiv\left(\frac{a}{\sqrt{3}};\frac{3}{4}a\right)\right]$
84. (Liceo scientifico 2003/2004) Sia *f* la funzione definita da: $f(x) = 2x - 3x^3$. a) Disegnate il grafico *G* di *f*. $\left[M\equiv\left(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{4}{9}\cdot\sqrt{2}\right), m\equiv\left(-\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{4}{9}\cdot\sqrt{2}\right), F\equiv O\right]$ b) Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta $y = c$ che interseca *G* in due punti distinti e le regioni finite di piano *R* e *S* che essa delimita con G. Precisamente: *R* delimitata dall'asse y, da *G* e dalla retta $y = c$ e *S* delimitata da *G* e dalla retta $y = c$. $\left[0<c<\frac{4}{9}\cdot\sqrt{2}\right]$ c) Determinate la funzione *g* il cui grafico è simmetrico di *G* rispetto alla retta $y = 4/9$. $[y = 3x^3 - 2x + 8/9]$
85. (Liceo scientifico PNI 2003/2004) Sia γ la curva d'equazione: $y=k\cdot e^{-\lambda\cdot x^2}$ ove *k* e λ sono parametri positivi. a) Si studi e si disegni γ. $\left[M\equiv O; F_1\equiv\left(-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}};\frac{k}{\sqrt{e}}\right); F_2\equiv\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}};\frac{k}{\sqrt{e}}\right)\right]$ b) Si determini il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse *x* e i vertici del lato opposto su γ.
[Rettangolo i cui vertici hanno le stesse ascisse dei punti di flesso]
86. (Liceo scientifico PNI 2003/2004) Sia *f* la funzione così definita: $f(x)=sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot x\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{2b}\cdot x\right)+x$,con *a* e *b* numeri reali diversi da zero. a) Si dimostri che, comunque scelti *a* e *b*, esiste sempre un valore di *x* tale che $f(x)=\frac{a+b}{2}$. b) Si consideri la funzione *g* ottenuta dalla *f* ponendo $a = 2b = 2$. Si studi *g* e se ne tracci il grafico. [$x_m = 2 - cos^{-1}(-2/\pi)/\pi + 2k\pi$; $x_M = cos^{-1}(-2/\pi)/\pi + 2k\pi$; $x_F = 1 + 2k\pi \vee x_F = 2 + 2k\pi$] c) Si consideri per $x > 0$ il primo punto di massimo relativo e se ne fornisca una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta. [≈ 0,719]
87. (Liceo scientifico 2004/2005) Si consideri la funzione *f* definita sull'intervallo [0; +∞) da:
$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=1/2x^2[3-2\log(x)]+1 \; se \; x>0 \end{cases}$$
e sia *C* la sua curva rappresentativa nel riferimento *Oxy*, ortogonale e monometrico. Si disegni *C* e si determini l'equazione della retta *r* tangente a *C* nel punto di ascissa $x = 1$. [$y = 2x + ½$]
88. (Liceo scientifico 2005/2006) Si considerino le funzioni *f* e *g* determinate da $f(x) = ln(x)$ e $g(x) = ax^2$, essendo *a* un parametro reale. a) Si discuta, al variare di *a*, l'equazione $ln(x) = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di *a* i grafici di *f* e *g* sono tra loro tangenti. [$a = 1/(2e)$] b) Si studi la funzione $h(x) = ln(x) - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $1/(2e)$ e se ne disegni il grafico.
89. (Liceo scientifico PNI 2006/2007) Si disegni il grafico della funzione $f(x) = e^x + e^{-x}$ e si disegni il grafico della funzione $1/f(x)$.

90. (Liceo scientifico 2006/2007) Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione: $x^3 - x^2 - k + 1 = 0$. [1 per $k < 23/27 \vee k > 1$; 3 soluzioni altrimenti]

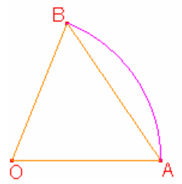
91. (Liceo scientifico 2007/2008) Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione: $x^3 - 3x^2 + k = 0$. [1 per $k < 0 \vee k > 4$; 2 per $k = 0 \vee k = 4$; 3 per $0 < k < 4$]

92. (Liceo scientifico PNI 2007/2008) Siano f e g le funzioni definite, per ogni x reale, da $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2$. a) Si traccino i grafici di f e di g e si indichi con A la loro intersezione di ascissa negativa. b) Si calcoli, con uno dei metodi di approssimazione numerica studiati, l'ascissa di A con due cifre decimali esatte. [–0,76] c) Quanti e quali sono gli zeri della funzione $h(x) = 2^x - x^2$? Si tracci il grafico di $h(x)$. [3 zeri; –0,76; 2; 4]

93. (Liceo scientifico 2008/2009) Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x) = ln(x)$. a) Sia A il punto d'intersezione con l'asse y della tangente a G_f in un suo punto P. Sia B il punto d'intersezione con l'asse y della parallela per P all'asse x . Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x) = \log_a(x)$ con a reale positivo diverso da 1? [AB = 1 per G_f e $\log_a(e)$ per G_g] b) Sia δ l'inclinazione sull'asse x della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base a è $\delta = 45°$? E per quale valore di a è $\delta = 135°$? [$a = e^{-1}$; $a = e$]

94. (Liceo scientifico PNI 2008/2009) Sia $f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) \cdot e^{-x}$, dove n è un intero positivo e $x \in \mathbb{R}$. a) Si verifichi che la derivata di $f(x)$ è: $f'(x) = -\frac{x^n}{n!} \cdot e^{-x}$. b) Si dica se la funzione f ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando n è dispari, $f(x) \le 1$ per ogni x reale. [In $x = 0$ vi è massimo per n dispari, flesso per n pari] c) Si studi la funzione g ottenuta da f quando $n = 2$ e se ne disegni il grafico.

95. (Liceo scientifico 2008/2009) È assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono



misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*). a) Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda AB, in funzione di x, è $S(x) = ½\, r^2 \cdot [x - sin(x)]$, con $x \in [0; 2\pi]$. b) Si studi come varia $S(x)$e se ne disegni il grafico (avendo posto $r = 1$). [Funzione sempre crescente con un flesso per $x = \pi$] c) Si fissi l'area del settore AOB pari a 100 m^2. Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro del settore AOB e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado). [Min: $r = 10$ e $x \approx 114{,}59°$]

96. (Liceo scientifico PNI 2008/2009) In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 + kx$, con k parametro reale. a) Si dica come varia il grafico di f al variare di k (k positivo, negativo o nullo). [$k > 0$, f sempre crescente. $k = 0$, O è un flesso. $k < 0$ ci sono due estremi relativi] b) Sia $g(x) = x^3$ e γ il suo grafico. Si dimostri che γ e la retta di equazione $y = 1 - x$ hanno un solo punto P in comune. Si determini l'ascissa di P approssimandola a meno di 0,1 con un metodo iterativo. [$x_P \approx 0{,}6$]

97. (Liceo scientifico 2010/2011) Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 *cm*. Qual è la capacità in litri del serbatoio? [≈ 522]

98. (Liceo scientifico 2010/2011) Si considerino le funzioni f e g definite, da: $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = sin(\pi x)$, per tutti gli x reali. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy si studino le funzioni f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f, G_g. Si calcolino le ascisse dei punti di intersezione di G_f con la retta $y = -3$. Successivamente si considerino i punti di G_g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo [–6; 6] e se ne indichino le coordinate.
[(–11/2; 1), (–9/2; –1), …, (–3/2; 1), (–½; –1), (½; 1), …, (11/2; –1)]

99. (Liceo scientifico PNI 2010/2011) Sia f la funzione definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali da $f(x) = x + ln(4) + \frac{2}{e^x + 1}$ e sia Γ la sua rappresentazione grafica nel sistema di riferimento Oxy. Si

provi che, per tutti gli x reali, è: $f(x) = x + 2 + ln(4) - \frac{2e^x}{e^x + 1}$. Si provi altresì che la retta r di equazione $y = x + ln(4)$ e la retta di equazione $y = x + 2 + ln(4)$ sono asintoti di Γ e che Γ è interamente compresa nella striscia piana delimitata da r e da s.

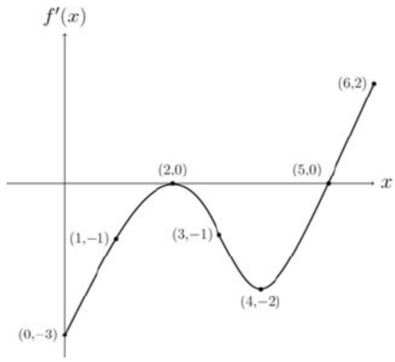
100. (Liceo scientifico PNI 2010/2011) Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da: $f(x) = x^3 - 16x$, $g(x) = sin(\pi x/2)$. Si studino le funzioni f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy. Si considerino i punti del grafico g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo [–10; 10] e se ne indichino le coordinate. [(–9; –1), (–7; 1), (–5; –1), (–3; 1), (–1; –1), (1; 1), (3; –1), (5;1), (7;–1), (9;1)]

101. (Liceo scientifico 2010/2011) Si studi su $\mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy.

102. (Liceo scientifico 2011/2012) Siano f e g le funzioni definite, per tutti gli x reali, da $f(x) = |27x^3|$ e $g(x) = sen(3/2\pi x)$. Qual è il periodo della funzione g? Si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici Gf e Gg in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy. [4/3]

103. (Liceo scientifico PNI 2011/2012) Si dimostri che la curva di equazione $y = x^3 + ax + b$ ha uno ed un solo punto di flesso rispetto a cui è simmetrica. [$F \equiv (0; b)$]

104. (Liceo scientifico PNI 2011/2012) Della funzione f, definita per $0 \le x \le 6$, si sa che è dotata di derivata prima e seconda e che il grafico della sua derivata $f'(x)$, disegnato a lato, presenta due tangenti orizzontali per $x = 2$ e $x = 4$. Si sa anche che $f(0) = 9, f(3) = 6, f(5) = 3$.



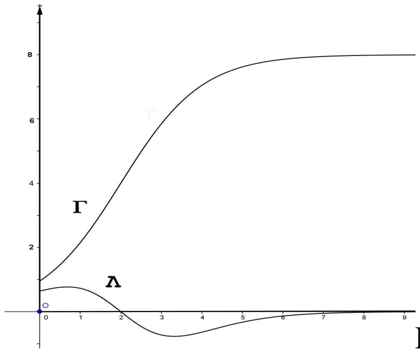
Si trovino le ascisse dei punti di flesso di f motivando le risposte in modo esauriente. [2; 4]

105. (Liceo scientifico PNI 2011/2012) Siano f e g le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = ln(x)$. a) Fissato $x_0 > 0$, si considerino le rette r e s tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa x_0. Si dimostri che esiste un solo x_0 per il quale r e s sono parallele. Di tale valore x_0 si calcoli un'approssimazione arrotondata ai centesimi. [circa 0,56] b) Sia $h(x) = f(x) - g(x)$. Per quali valori di x la funzione $h(x)$ presenta, nell'intervallo chiuso $½ \le x \le 1$, il minimo e il massimo assoluti? Si illustri il ragionamento seguito. [$x_{\min} = h(x_0)$; $x_{\text{Max}} = h(1) = e$]

106. (Liceo scientifico 2012/2013) Sia f la funzione definita, per tutti gli x reali, da $f(x) = \frac{8}{4 + x^2}$. 1. Si studi f e se ne disegni il grafico Φ in un sistema di coordinate cartesiane Oxy. Si scrivano le equazioni delle tangenti a Φ nei punti $P \equiv (-2; 1)$ e $Q \equiv (2; 1)$ e si consideri il quadrilatero convesso che esse individuano con le rette OP e OQ. Si provi che tale quadrilatero è un rombo e si determinino le misure, in gradi e primi sessagesimali, dei suoi angoli. 2. Sia Γ la circonferenza di raggio1 e centro (0; 1). Una retta t, per l'origine degli assi, taglia Γ oltre che in O in un punto A e taglia la retta d'equazione $y = 2$ in un punto B. Si provi che, qualunque sia t, l'ascissa x di B e l'ordinata y di A sono le coordinate $(x; y)$ di un punto di Φ. [$y = \pm ½\, x + 2$; $\approx 53°7'48''$, $\approx 126°52'12''$]

107. (Liceo scientifico 2012/2013) Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A \equiv (2; -1)$ e $B \equiv (-6; -8)$. Si determini l'equazione della retta passante per B e avente distanza massima da A. [$8x + 7y + 104 = 0$]

108. (Liceo scientifico PNI 2012/2013) Una funzione $f(x)$ è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in $[0, +\infty[$ e nella figura sono disegnati i grafici Γ e Λ di $f(x)$ e della sua derivata



seconda $f''(x)$. La tangente a Γ nel suo punto di flesso, di coordinate (2; 4), passa per $(0;\ 0)$, mentre le rette $y = 8$ e $y = 0$ sono asintoti orizzontali per Γ e Λ, rispettivamente. 1) Si dimostri che la funzione $f'(x)$, ovvero la derivata prima di $f(x)$, ha un massimo e se ne determinino le coordinate. Sapendo che per ogni x del dominio è: $f''(x) \le f'(x) \le f(x)$, qual è un possibile andamento di $f'(x)$? [(2; 2)] 2) Si supponga che $f(x)$ costituisca, ovviamente in opportune unità di misura, il modello di crescita di un certo tipo di popolazione. Quali informazioni sulla sua evoluzione si possono dedurre dai grafici in figura e in particolare dal fatto che Γ presenta un asintoto orizzontale e un punto di flesso? 3) Se Γ è il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{a}{1+e^{b-x}}$, si provi che $a = 8$ e $b = 2$.

109. (Liceo scientifico PNI 2012/2013) Sia f la funzione definita per tutti gli x positivi da $f(x) = x^3 \, ln(x)$. 1. Si studi f e si tracci il suo grafico γ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici Oxy; accertato che γ presenta sia un punto di flesso che un punto di minimo se ne calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ascisse arrotondate alla terza cifra decimale. [$x_m \approx 0{,}716$; $x_F \approx 0{,}434$] 2. Sia P il punto in cui γ interseca l'asse x. Si trovi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per l'origine e tangente a γ in P. [$y = x^2 - x$] 3. Si disegni la curva simmetrica di γ rispetto all'asse y e se ne scriva altresì l'equazione. Similmente si faccia per la curva simmetrica di γ rispetto alla retta $y = -1$. [$-x^3 ln(-x)$; $-x^3 \, ln(x) - 2$]

110. (Liceo scientifico PNI 2012/2013) Si stabilisca per quali valori $k \in R$ l'equazione $x^2\,(3 - x) = k$ ammette due soluzioni distinte appartenenti all'intervallo [0, 3]. Posto $k = 3$, si approssimi con due cifre decimali la maggiore di tali soluzioni, applicando uno dei metodi iterativi studiati. [$0 < k < 4$; $\approx 2{,}532$]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

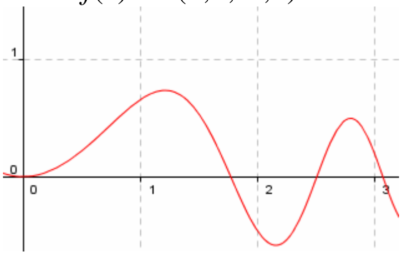
CEEB = College Entrance Examination Board
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
RICE = Rice University Mathematics Tournament

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato nel 2004 al CEEB.
Il flusso del traffico è definito come il tasso a cui le macchine passano attraverso un incrocio, misurato in numero di macchine al minuto. In un particolare incrocio il flusso di traffico è modellizzato dalla seguente funzione: $F(t) = 82 + 4 \cdot sin(t/2)$, con $0 \le t \le 30$. t è misurato in minuti. Vogliamo sapere se al minuto 7 il traffico è in aumento o in diminuzione, rispetto ai minuti precedenti.
Avendo una funzione continua e derivabile la crescenza o decrescenza è determinata dalla sua derivata prima: $F'(t) = 2 \cdot cos(t/2)$, quindi $F'(7) = 2 \cdot cos(3{,}5) < 0$. Quindi siamo in un momento di diminuzione del traffico.

1. (CEEB 2004) Una particella si muove lungo l'asse y ad una velocità $v(t) = 1 - tan^{-1}\left(e^t\right)$. Nell'istante $t = 0$ s la particella di trova a $y = -1$. Si vuol sapere: l'accelerazione della particella al tempo $t = 2$ s; in questo istante la velocità è in aumento o in diminuzione? In quale istante la particella raggiunge la massima altezza? [$\approx -0{,}132$; aumenta; $\approx 0{,}44$ s]

2. (CEEB 2005) Una particella si muove lungo l'asse x ad una velocità $v(t) = ln(t^2 - 3t + 3), 0 \le t \le 5$. Nell'istante $t = 0$ s la particella di trova a $x = 8$. Si vuol sapere: l'accelerazione della particella al tempo $t = 4$ s; determinare inoltre tutti gli istanti, in (0, 5), in cui la particella cambia direzione e gli intervalli in cui viaggia verso sinistra. [5/7; 1 ∨ 2; (1; 2)]
3. (CEEB 2006) Sia una funzione $f(x)$ definita per $x \ge 0$, con $f(0) = 5$ e la cui derivata è $f'(x) = e^{-\frac{x}{4}} \cdot sin(x^2)$, il cui grafico è il seguente. Usando tale grafico stabilire la concavità della funzione $f(x)$ in (1,7; 1,9). Determinare poi il valore di x in [0; 3] in cui la f ha un massimo assoluto.



[(1,7; 1,9); $\sqrt{\pi}$]
4. (HSMC 2009) Sia $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, si ha $f(2) = -3$ e $f'(2) = 0$, ma 2 non è un estremo relativo. Determinare $a + b + c$. [–5]
5. (Rice 2010) Determinare i massimi di $f(x) = \left|\frac{3x+1}{9x^2+6x+2}\right|$. [$x = 0 \vee x = 2/3$]
6. (Rice 2010) Determinare il minimo di $e^x - x - \frac{x^3}{3}$. [1]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC, in 2003.
Find the point on the line $3x + 4y = 10$ which is closest to the origin.
Let $(x; y)$ be the point of minimum distance. We seek to minimize $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ which occurs where $D = d^2 = x^2 + y^2$ is a minimum. Since $3x + 4y = 10$ then $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ and

$$D = x^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow D' = 2x + 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow \frac{25}{16}x - \frac{15}{8} = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$$

So $y = -\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} + \frac{5}{2} = \frac{8}{6}$. The point is $\left(\frac{6}{5}; \frac{8}{5}\right)$.

7. (HSMC 2001) Find the x coordinate of the point on the curve $xy = 8$ and in the first quadrant that is closest to the point (3; 0) . [4]
8. (HSMC 2002) Suppose that the greatest possible value of $2 \cdot sin(x) + 3 \cdot cos(x)$ (for $x \in [0; 2\pi)$) is M, and a is a real number such that $2 \cdot sin(a) + 3 \cdot cos(a) = M$. (So the quantity $2 \cdot sin(x) + 3 \cdot cos(x)$ is maximized at $x = a$.) Compute $tan(a)$. [2/3]
9. (CEEB 2004) For $0 \le t \le 31$, the rate of change of the number of mosquitoes on Tropical Island at time t days is modeled by $5 \cdot \sqrt{t} \cdot cos\left(\frac{t}{5}\right)$ mosquitoes per day. There are 1000 mosquitoes on Tropical Island at time $t = 0$. Show that the number of mosquitoes is increasing at time $t = 6$. At time $t = 6$, is the number of mosquitoes increasing at an increasing rate, or is the number of mosquitoes increasing at a decreasing rate? Give a reason for your answer. [Decreasing]

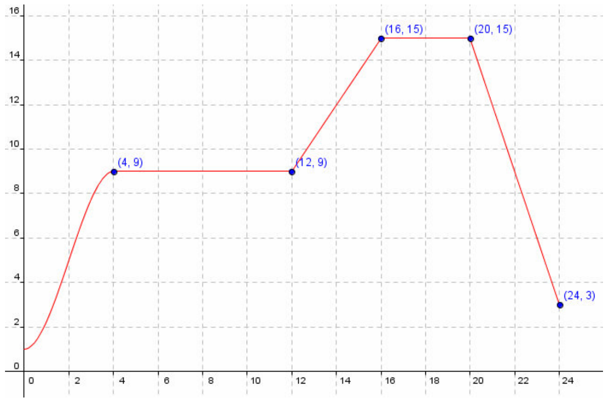
10. (CEEB 2005) Let f be a function that is continuous on the interval [0, 4). It is also twice differentiable except at $x = 2$. f and its derivatives have the properties indicated in the following table, where DNE means that the derivative doesn't exist

x	0	$0<x<1$	1	$1<x<2$	2	$2<x<3$	3	$3<x<4$
$f(x)$	– 1	<0	0	>0	2	>0	0	<0
$f'(x)$	4	>0	0	>0	DNE	<0	– 3	<0
$f''(x)$	– 2	<0	0	>0	DNE	<0	0	>0

For $0 < x < 4$, find all values of x at which f has a relative extremum. Determine whether f has a relative maximum or a relative minimum at each of these values. [Maximum at $x = 2$]

11. (HSMC 2006) A square has its base on the x–axis and one vertex on each branch of the curve $y = 54/x^2$. What is the area of the square? [36]

12. (CEEB 2006) The rate, in calories per minute, at which a person using a exercise machine burns calories is modeled by the function $f(t) = -\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 1$ for $0 \le t \le 4$ and f is piecewise linear for $4 \le t \le 24$ as in the following graph.



Find $f'(22)$. For the time interval $0 \le t \le 24$, at what time t is f increasing at its greatest rate? [3 cal/*min*; $t = 2$]

13. (Rice 2009) Find the shortest distance between the point (6;12) and the parabola given by the equation $x = \frac{1}{2}y^2$. $\left[2 \cdot \sqrt{17}\right]$

14. (Rice 2010) A rectangular pyramid tower is being built on a circular island of radius two. The height of the tower is equal to its width. What is the maximum volume of the tower? $\left[\frac{128}{27} \cdot \sqrt{3}\right]$

15. (Rice 2010) Let $f(x) = x^6 - 6x^2 + 6x - 7$. It is known that this polynomial has three critical points. Find the parabola passing through these critical points. [$y = -4x^2 + 5x - 7$]

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_3_2.htm

11. L'integrazione

11.1 Integrazione indefinita

Prerequisiti

- Trinomio ed equazione di II grado
- Polinomi, regola e teorema di Ruffini
- Formule goniometriche
- Concetto di area di una figura piana
- Concetto di limite
- Continuità di una funzione
- Il calcolo differenziale

Obiettivi

- Comprendere il significato dell'integrale come antiderivata
- Sapere risolvere semplici integrali
- Conoscere i metodi di integrazione più diffusi
- Sapere operare una trasformazione per il calcolo di un integrale

Contenuti

- L'integrale come area di un trapezoide
- L'operatore inverso della derivata
- Integrazione per parti
- Integrazione di funzioni razionali fratte
- Integrazione per sostituzione

Parole chiave

Esaustione – Integrale – Integrando – Plurirettangoli inscritti e circoscritti – Primitiva
Somma inferiore e Somma superiore – Trapezoide

Richiamiamo le conoscenze

Un trinomio di secondo grado è un polinomio $ax^2 + bx + c$, a esso associamo un numero che viene chiamato delta o discriminante del trinomio: $\Delta = b^2 - 4ac$. Allora valgono i seguenti fatti:

- Se $\Delta > 0$ esistono due numeri reali distinti x_1 e x_2, per cui possiamo scrivere:
$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$
- Se $\Delta = 0$ il trinomio è un quadrato di binomio: $ax^2+bx+c=\left(\frac{2ax+b}{2\sqrt{|a|}}\right)^2$
- Se $\Delta < 0$ il trinomio può scriversi come somma di due quadrati:
$$ax^2+bx+c=\left(\sqrt{|a|}\cdot x+\frac{b}{2\cdot\sqrt{|a|}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4|a|}}\right)^2$$

Principio di identità dei polinomi Due polinomi sono uguali se e solo se hanno lo stesso grado e, ordinatamente, gli stessi coefficienti.

L'integrale come area di un trapezoide

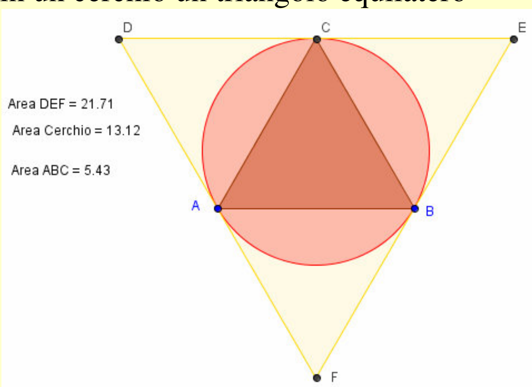
Il problema

Sappiamo calcolare le aree di alcuni poligoni, regolari o no. Con metodi di approssimazione, come la reticolazione o la suddivisione in triangoli, siamo in grado di calcolare l'area di un generico poligono. Sappiano calcolare anche l'area di qualche figura a contorno non rettilineo come quella del cerchio e di alcune sue parti. Ci chiediamo se possiamo calcolare aree di generiche figure a contorno curvilineo.

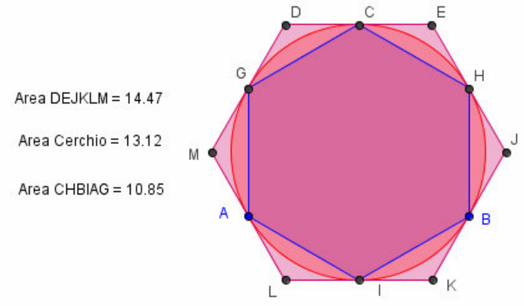
Ricordiamo come Archimede, nel III secolo a.C., fornì un metodo per il calcolo dell'area del cerchio, che condusse poi alla famosa approssimazione del numero $\pi \approx 3{,}14$.

Esempio 1

Archimede inscrive e circoscrive in un cerchio un triangolo equilatero



Come si vede nella figura ottenuta con Geogebra, e come è ovvio, l'area del triangolo inscritto è un valore approssimato per difetto dell'area del cerchio, mentre quella del triangolo circoscritto è un valore approssimato per eccesso. Se dividiamo in due gli archi possiamo inscrivere e circoscrivere degli esagoni regolari.



Ovviamente i valori così ottenuti sono "migliori" rispetto ai precedenti, poiché è aumentata la parte di area che cerchio ed esagono inscritto hanno in comune ed è diminuita la parte di area che cerchio ed esagono circoscritto non hanno in comune. Archimede continuò il procedimento fino a poligoni di 96 lati.

L'angolo storico

Il procedimento di esaustione è detto così per via del fatto che esso tende a "esaurire" l'area di una figura inscrivendo in essa altre figure delle quali è nota l'area. Esso è detto di Eudosso–Archimede, poiché è stato enunciato per la prima volta da Eudosso di Cnido (408 a. C. – 355 a. C.) ed è stato poi ampiamente usato da Archimede (287 a.C. – 212 a.C.) per molte delle sue più importanti dimostrazioni, da quella che ha condotto alla determinazione del primo valore approssimato del numero π, alla determinazione del volume della piramide, della sfera e via dicendo. Vi è da dire però che la prima idea di inscrivere dei poligoni in un cerchio per determinarne l'area è dovuta al sofista Antifone vissuto nel V secolo a.*C*., mentre l'altro sofista Brisone (attivo nel 450 a.*C*.) pensò di migliorare l'approssimazione circoscrivendo dei poligoni.

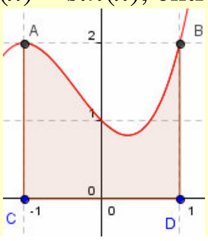
Se continuassimo all'infinito la procedura di Archimede troveremmo l'esatto valore dell'area del cerchio, che può quindi considerarsi come un poligono regolare di infiniti lati, ciascuno dei quali ha misura infinitesima. Proprio partendo da queste considerazioni possiamo estendere il metodo archimedeo per il calcolo di particolari figure che andiamo a definire.

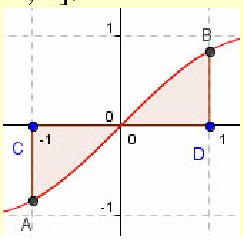
Definizione 1

Data una funzione continua in un intervallo $[a; b]$, diciamo **trapezoide di basi $f(a)$ ed $f(b)$ e altezza $[a; b]$**, la parte di piano delimitata dalla funzione $f(x)$ dall'asse delle x e dai segmenti condotti perpendicolarmente all'asse x dai punti $(a; f(a))$ e $(b; f(b))$

Esempio 2

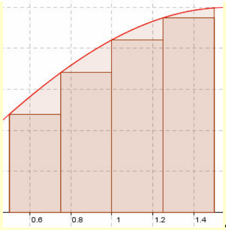
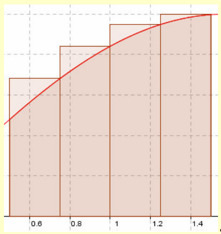
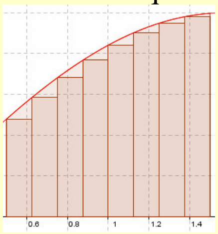
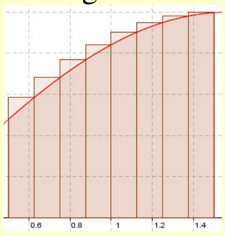
In figura consideriamo prima il trapezoide determinato dalla funzione $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ e poi quello determinato dalla funzione $f(x) = sin(x)$, entrambe nell'intervallo $[-1; 1]$.





Vediamo allora di adattare il procedimento esaustivo per il calcolo delle aree dei trapezoidi.

Esempio 3

Per comodità consideriamo una funzione crescente in un intervallo, ma ovviamente quanto vedremo può ripetersi anche per funzioni non monotòne. Dividiamo l'intervallo in un certo numero di parti uguali, per esempio 4, e inscriviamo dei rettangoli, come mostrato in figura, questi forniranno un valore approssimato per difetto dell'area del trapezoide. . Analogamente possiamo considerare dei rettangoli circoscritti, la somma delle cui aree fornirà un valore approssimato per eccesso. . Anche in questo caso aumentare il numero di suddivisione e quindi il numero di rettangoli inscritti e circoscritti, migliorerà le approssimazioni.  

Tenuto conto di quanto visto sopra poniamo qualche definizione.

Definizione 2

Diciamo **partizione** di un intervallo $[a; b]$, un insieme di numeri reali: $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tale che si abbia $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Chiamiamo **ampiezza della partizione** la misura del più grande degli intervalli in cui viene suddiviso $[a; b]$ dalla partizione stessa. Se tutti gli intervalli hanno uguale ampiezza, cioè se $(x_1 - x_0) = (x_2 - x_1) = (x_3 - x_2) = \ldots = (x_n - x_{n-1}) = (b - a)/n$, diremo che la partizione è **regolare**.

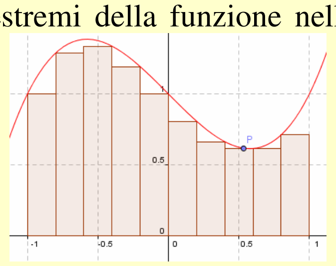
Definizione 3

Data una funzione $f(x)$ continua e limitata in un intervallo $[a; b]$ e P una partizione di $[a; b]$. Indichiamo con I_i l'inf della funzione nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ e con S_i il sup della funzione nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$. Allora

- l'unione dei rettangoli di vertici $(x_i; 0)$, $(x_i; I_i)$, $(x_{i+1}; I_i)$, $(x_{i+1}; 0)$, $0 \leq i \leq n - 1$, si chiama **plurirettangolo inscritto**, la somma delle sue aree si chiama **somma inferiore**;
- l'unione dei rettangoli di vertici $(x_i; 0)$, $(x_i; S_i)$, $(x_{i+1}; S_i)$, $(x_{i+1}; 0)$, $0 \leq i \leq n - 1$, si chiama **plurirettangolo circoscritto**, la somma delle sue aree si chiama **somma superiore**.

Vediamo di capire perché abbiamo considerato inf e sup della funzione nei dati intervalli.

Esempio 4

Non è detto che le funzioni siano tutte monotòne, quindi non sempre i plurirettangoli inscritti o circoscritti hanno altezza pari all'ordinata di uno degli estremi. Per esempio nel caso della funzione in figura osserviamo che il punto P, che fa parte di un intervallo in cui la funzione passa dalla decrescenza alla crescenza, non coincide con nessuno degli estremi della funzione nell'intervallo, ma è l'inf (in effetti il minimo) della funzione nello stesso intervallo. 

Non è difficile determinare una formula per calcolare le somme inferiore e superiore. Abbiamo infatti:

$$s(n)=\frac{b-a}{n}\cdot[I_0+I_1+\ldots+I_n]=\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}I_i;S(n)=\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=o}^{n-1}S_i.$$

Vale il seguente risultato che non dimostriamo.

Teorema 1

Data una funzione $f(x)$ continua e positiva in un intervallo $[a; b]$ e una successione infinita di sue partizioni regolari: $\{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$, in cui l'indice stabilisce il numero di elementi della partizione. Indicate con s_n la successione delle somme inferiori e con S_n quella delle somme superiori, entrambe relative alla partizione P_n. Allora si ha: $\lim_{n\to\infty} s(n)=\lim_{n\to\infty} S(n)\in\mathbb{R}$.

In vista del precedente risultato poniamo la seguente definizione.

Definizione 4

Data una funzione $f(x)$ continua e positiva in un intervallo $[a; b]$, diciamo **integrale secondo Riemann di $f(x)$ esteso all'intervallo $[a; b]$**, il limite comune alle successioni delle sue somme inferiori e superiori.

Notazione 1

L'integrale secondo Riemann di una funzione $f(x)$, si indica con il simbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ e si legge *integrale di f esteso all'intervallo* $[a; b]$ *in de x*.

Abbiamo definito l'integrale definito solo per funzioni positive poiché vogliamo associare a esso il concetto di area, quindi se avessimo una funzione che assume anche valori negativi qualcuno degli addendi delle somme inferiore o superiore potrebbero essere negativi. Nella successiva unità forniremo una definizione più generale.

L'angolo storico

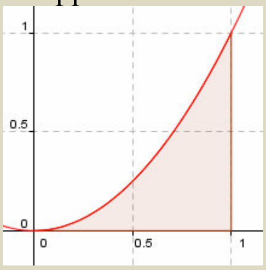
Un simbolo molto simile all'attuale, che altri non è se non una S stilizzata e vuole appunto indicare il fatto che l'integrale è una somma, è dovuto a Leibniz, che lo scrive in un manoscritto del 29 Ottobre 1675. Scrivendo $\int l$ egli sostituiva la scritta finora usata: *omn l* che significava somma di ogni l (*omn* sta per il latino *omnia*). Lo stesso autore userà il simbolo in lavori a stampa solo 11 anni più tardi.
Il simbolo *dx* che indica l'ampiezza infinitesima della base dei plurirettangoli, e contemporaneamente la variabile rispetto cui avviene la somma infinita, si trova per la prima volta in un'opera di William R. Hamilton del 1858.

I protagonisti

Georg Friedrich Bernhard Riemann. Nacque il 17 Settembre 1826 a Breselenz in Germania. Dopo avere intrapreso studi di Teologia, si interessò di matematica che cominciò a studiare con ottimi risultati, conseguendo prima la laurea e poi il dottorato sotto la guida del grande Gauss. Ottenne importanti risultati in quasi tutti i campi della matematica e della fisica. A lui è dovuto il primo esempio di geometria non euclidea di tipo ellittico o, come adesso si dice, riemanniano, in cui non vi sono rette parallele. Ma ottenne anche importanti risultati di cui si giovò in seguito Einstein per la sua Teoria della Relatività. Alla fine del 1862 si ammalò di tubercolosi e per curarla passò l'inverno in Sicilia. Rientrato in Germania si ammalò di nuovo e passò i due anni successivi in Italia., Nonostante il clima le sue condizioni non migliorarono e morì il 20 Luglio 1866 a Selasca, località sul Lago maggiore.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare un valore approssimato del trapezoide determinato dalla parabola $y = x^2$ e dall'intervallo [0; 1], mostrato in figura  Dividiamo in 10 parti uguali, ciascuno di ampiezza 1/10. Avremo quindi che la somma inferiore sarà

$$s(10) = \frac{1}{10} \cdot \left[f(0) + f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{2}{10}\right) + \ldots + f\left(\frac{9}{10}\right) \right] = \frac{1}{10} \cdot \left[0 + \frac{1}{100} + \frac{4}{100} + \ldots + \frac{81}{100} \right] =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left[\frac{1+4+9+16+\ldots+81}{100} \right] = \frac{57}{200} = 0,285; S(10) = \frac{1}{10} \cdot \left[\frac{1}{100} + \frac{4}{100} + \ldots + \frac{81}{100} + 1 \right] = \frac{77}{200} = 0,385$$

Quindi possiamo dire che si ha: $0,285 < \int_0^1 x^2 \, dx < 0,385$.

Si vedrà nella prossima unità che il valore esatto è $1/3 \approx 0,333$.

Inscrivendo e circoscrivendo 10 plurirettangoli, determinare dei valori approssimati per difetto e per eccesso delle aree dei seguenti integrali definiti. Nelle risposte indichiamo con I il valore esatto.

Livello 1

1. $\int_0^1 x \, dx$ [$0,9 < I < 0,11$] $\int_0^2 x^2 \, dx$ [$2,28 < I < 3,08$]
2. $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ [$0,67 < I < 0,72$] $\int_{-2}^{-1} x^2 \, dx$ [$2,18 < I < 2,49$]
3. $\int_0^2 x^3 \, dx$ [$3,24 < I < 4,84$] $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} \, dx$ [$0,47 < I < 0,54$]
4. $\int_{-3}^{-2} \frac{x^2+1}{x^2} \, dx$ [$1,16 < I < 1,17$] $\int_{-1}^{2} \frac{x^2}{x^2+1} dx$ [$0,92 < I < 1,3$]

Livello 2

5. $\int_0^{\pi/2} sin(x) \, dx$ [$0,92 < I < 1,08$] $\int_1^3 ln(x) \, dx$ [$1,18 < I < 1,4$]
6. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$ [$0,73 < I < 0,83$] $\int_{-1}^{2} e^x \, dx$ [$6,02 < I < 8,13$]

L'operatore inverso della derivata

La Natura sorride delle difficoltà dell'integrazione.
Pierre Simon de Laplace

Il problema

Il problema posto nel paragrafo precedente non è stato del tutto risolto, dato che ovviamente per calcolare una certa area con la procedura teorica delle somme inferiori e superiori, è in pratica molto complessa e lunga. Dobbiamo quindi determinare una procedura più semplice.

Abbiamo bisogno di una nuova definizione.

Definizione 5

Data una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a; b]$, sia x_0 un elemento fissato di $[a; b]$ e x un elemento variabile di $[a; b]$. La funzione $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$ si chiama **funzione integrale di $f(x)$**.

Osserviamo che la definizione precedente è coerente poiché, comunque scegliamo x_0 e x in $[a; b]$ l'integrale esiste ed è un numero, grazie al Teorema 1.
Possiamo adesso enunciare un altro risultato, che sempre non dimostriamo.

Teorema 2 (Fondamentale del calcolo integrale)

Data una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a; b]$, allora la funzione integrale $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$ è derivabile in $[a; b]$ e si ha: $F'(x) = f(x), \forall x \in [a; b]$.

Esempio 5

Consideriamo la funzione $f(x) = sin(x)$ che è continua in ogni intervallo, e la consideriamo in $[0; 1]$. La sua funzione integrale relativa a tale intervallo è $F(x)=\int_{x_0}^{x} sin(t)\, dt$, per il Teorema 2 è $F'(x) = sin(x)$. Quindi vuol dire che la funzione integrale è tale che la sua derivata è $sin(x)$. Ma noi conosciamo una funzione la cui derivata è $sin(x)$, cioè $(- cos(x))$. Possiamo quindi dire che $F'(x) = cos(x)$? Se così fosse abbiamo trovato un metodo per calcolare gli integrali definiti e quindi le aree dei trapezoidi.

Per risolvere la questione sollevata nell'esempio precedente, cominciamo a porre una definizione

Definizione 6

Una funzione $f(x)$ derivabile e tale che si abbia $f'(x) = F(x)$ si dice **funzione primitiva o antiderivata** di $F(x)$. Ogni funzione dotata di primitive in un insieme X si dice **integrabile in X**.

Noi sappiamo che le funzioni $f(x)$ e $f(x) + c$, con c numero reale qualsiasi, se sono derivabili hanno la stessa derivata. Quindi possiamo enunciare il seguente ovvio risultato.

Teorema 3

Ogni funzione continua $F(x)$ in un insieme X è ivi dotata di infinite funzioni primitive, che si esprimono tutte nella forma $f(x) + c$, con c numero reale qualsiasi.

Notazione 2

L'insieme delle primitive di una funzione $f(x)$ si indica con il simbolo $\int f(x)\,dx$ e si legge *integrale indefinito di $f(x)$ in de x*.

Esempio 6

Possiamo scrivere $\int sin(x)\,dx = -cos(x)+c$.

Possiamo quindi costruire facilmente una tabella di integrali indefiniti immediati, semplicemente invertendo l'ordine di lettura di un'analoga tabella di derivate che già conosciamo.

Corollario 1

Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}+c, k \neq -1; \int \frac{1}{x}\,dx = ln(x)+c; \int sin(x)dx = -cos(x)+c;$$

$$\int cos(x)\,dx = sin(x)+c; \int \frac{1}{cos^2(x)}\,dx = \int \left[tan^2(x)+1\right]dx = tan(x)+c;$$

$$\int e^x\,dx = e^x+c; \int a^x\,dx = \frac{a^x}{ln(a)}+c; \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = sin^{-1}(x)+c; \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = tan^{-1}(x)+c$$

Dimostrazione

Proviamo solo la prima. Noi sappiamo che $D(x^k) = k \cdot x^{k-1}$.

Quindi deve essere $\int k \cdot x^{k-1}\,dx = x^k+c$, o, che è lo stesso, $\int (k+1)\cdot x^k\,dx = x^{k+1}+c$. D'altro canto noi sappiamo che possiamo dividere per una quantità non nulla un'uguaglianza senza che questa cambi, quindi se $k + 1 \neq 0$, cioè se $k \neq -1$, avremo quanto affermato nella tesi.

Esempio 7

Tenuto conto del precedente risultato possiamo dire che

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx = \int x^{-5/3}\,dx = \frac{x^{-5/3+1}}{-5/3+1}+c = \frac{x^{-2/3}}{-2/3}+c = -\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+c.$$

Vale anche questo immediato risultato, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

Teorema 4

Se $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ sono funzioni integrabili in un insieme X, e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono numeri reali, allora anche $a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x) + \ldots + a_n \cdot f_n(x)$, è integrabile in X e si ha:

$$\int \left[a_1 \cdot f_1(x)+a_2 \cdot f_2(x)+\ldots+a_n \cdot f_n(x)\right]dx = a_1 \cdot \int f_1(x)\,dx + a_2 \cdot \int f_2(x)\,dx+\ldots+a_n \cdot \int f_n(x)\,dx.$$

Esempio 8

Tenuto conto del precedente risultato possiamo dire che

$$\int \left[3\cdot sin(x)+\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right]dx = 3\cdot \int sin(x)\,dx + 4\cdot \int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}dx = -3\cdot cos(x)+4\cdot sin^{-1}(x)+c.$$

Purtroppo non vale un analogo risultato al precedente per operazioni diverse dalla somma algebrica.

Esempio 9

Non possiamo dire che $\int x\cdot e^x\,dx = \int x\,dx \cdot \int e^x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot e^x+c$.

Infatti D($x^2/2 \cdot e^x + c$) = $2x/2 \cdot e^x + x^2/2 \cdot e^x = x \cdot e^x + x^2/2 \cdot e^x$.

In seguito vedremo che non esiste neanche una regola per l'integrazione di prodotti o rapporti, a differenza di quel che invece accade per le derivate.
Possiamo però costruire una tabella di altri integrali immediati tenendo conto della regola di derivazione delle funzioni composte.

Esempio 10

Sappiamo che D[$e^{f(x)}$] = $e^{f(x)} \cdot f'(x)$, quindi possiamo dire che $\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$. Quindi per esempio abbiamo $\int e^{3x+1} \cdot 3\, dx = e^{3x+1} + c$.

Corollario 2

Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\int f(x)^k \cdot f'(x)\, dx = \frac{f(x)^{k+1}}{k+1} + c, k \neq -1; \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = ln[f(x)] + c;$$

$$\int sin[f(x)] \cdot f'(x) dx = -cos[f(x)] + c; \int cos[f(x)] \cdot f'(x)\, dx = sin[f(x)] + c;$$

$$\int \frac{f'(x)}{cos^2[f(x)]}\, dx = \int [tan^2[f(x)] + 1] \cdot f'(x)\, dx = tan[f(x)] + c;$$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c; \int a^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{ln(a)} + c;$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}\, dx = sin^{-1}[f(x)] + c; \int \frac{f'(x)}{f^2(x) + 1}\, dx = tan^{-1}[f(x)] + c$$

Dimostrazione per esercizio

Esempio 11

- Vogliamo calcolare $\int \frac{x+1}{x^2+1}\, dx$. Per il Teorema 4 possiamo scrivere $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx + \int \frac{1}{x^2+1}\, dx$. Il secondo integrale è immediato, il primo non proprio. Infatti il numeratore non è *esattamente* la derivata del denominatore. Però possiamo sempre moltiplicare e dividere per una stessa quantità non nulla e quindi:
$$\frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{x^2+1}\, dx + tan^{-1}(x) + c = \frac{1}{2} \cdot ln(x^2+1) + tan^{-1}(x) + c.$$
- Vogliamo calcolare $\int \sqrt[3]{4x+1}\, dx$. La regola da applicare è $\int f(x)^k \cdot f'(x)\, dx = \frac{f(x)^{k+1}}{k+1} + c$, manca però la derivata di $4x + 1$. Quindi scriviamo:
$$\frac{1}{4} \cdot \int (4x+1)^{1/3} \cdot D(4x+1) dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{(4x+1)^{1/3+1}}{1/3+1} + c = \frac{1}{4} \cdot \frac{(4x+1)^{4/3}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{16} \cdot \sqrt[3]{(4x+1)^4} + c.$$

Nelle verifiche vedremo altri esempi.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare la derivata della funzione integrale $\int_1^{x^3+1} \frac{sin(t)}{t}\, dt$. Per il teorema 2, che possiamo applicare perché la funzione integranda è continua in $[1, +\infty[$, abbiamo che la derivata coincide proprio con la funzione integranda calcolata per $t = x^3 + 1$, cioè $D\left[\int_1^{x^3+1} \frac{sin(t)}{t}\, dt\right] = \frac{sin(x^3+1)}{x^3+1} \cdot D(x^3+1) = \frac{sin(x^3+1)}{x^3+1} \cdot 3x^2$.

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni integrali

Livello 1

1. $\int_5^x \frac{sin(t)}{t}\, dt$ $\left[\frac{sin(x)}{x}\right]$ $\int_{-2}^x \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2+3}\, dt$ $\left[\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+3}\right]$ $\int_0^x \frac{ln(t)}{t^2+1}\, dt$ $\left[\frac{ln(x)}{x^2+1}\right]$

2. $\int_0^x \frac{\sqrt{t}+t}{cos(t)}\, dt$ $\left[\frac{\sqrt{x}+x}{cos(x)}\right]$ $\int_{-\sqrt{2}}^x \frac{e^{2t}-t}{e^{3t}+t^2}\, dt$ $\left[\frac{e^{2x}-x}{e^{3x}+x^2}\right]$ $\int_1^x \frac{sin(t^2)}{tan^{-1}(t)}\, dt$ $\left[\frac{sin(x^2)}{tan^{-1}(x)}\right]$

Livello 2

3. $\int_2^{x^2} \frac{sin(t)}{t}\, dt$ $\left[\frac{2\cdot sin(x^2)}{x}\right]$ $\int_0^{x^2+x} \frac{\sqrt{t}+t}{cos(t)}\, dt$ $\left[\frac{(2x+1)\cdot\sqrt{(x^2+x)^3}}{cos(x^2+x)}\right]$ $\int_1^{2x+1} e^{-t^2+1}\, dt$ $\left[2\cdot e^{-4x^2-4x}\right]$

Livello 3

4. Usando il teorema di De l'Hôpital calcolare: $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x\cdot cos(x)}$, con $f(x)$ funzione continua per $x > 0$, tale che $f(0) = 1$. [1]

5. Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x) = \int_x^{x+1} sin(t)\, dt$. $[sin(x + 1) – sin(x)]$

6. Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x) = \int_{x^2}^{x^2+x} e^t\, dt, x > 1$. $\left[e^{x^2}\cdot\left(2xe^x + e^x - 2x\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Calcoliamo: $\int\left(7\sqrt[3]{x^4} - \frac{6}{x^7} + \frac{12}{\sqrt[3]{3x^7}}\right) dx$. Riscriviamo tutto in forma di potenza:

$7\cdot\int x^{4/3}\,dx - 6\cdot\int x^{-7}\,dx + \frac{12}{\sqrt[3]{3}}\cdot\int x^{-7/3}dx$. Applichiamo la regola: $\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$, ottenendo:

$$7\cdot\frac{x^{4/3+1}}{4/3+1} - 6\cdot\frac{x^{-7+1}}{-7+1} + \frac{12}{\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{x^{-7/3+1}}{-7/3+1} = 7\cdot\frac{x^{7/3}}{7/3} - 6\cdot\frac{x^{-6}}{-6} + \frac{12}{\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{x^{-4/3}}{-4/3} = 3\cdot\sqrt[3]{x^7} + \frac{1}{x^6} - \frac{9}{\sqrt[3]{3x^4}}$$

Calcolare i seguenti integrali indefiniti

Livello 1

7. $\int\sqrt[8]{x}\,dx$ $\left[\frac{8}{9}\cdot\sqrt[8]{x^9}+c\right]$ $\int\sqrt[7]{x^2}\,dx$ $\left[\frac{7}{9}\cdot\sqrt[7]{x^9}+c\right]$ $\int\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$ $\left[\frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{x^3}+c\right]$ $\int\frac{1}{x^{e+1}}\,dx$ $\left[-\frac{1}{e\cdot x^e}+c\right]$

8. $\int\sqrt{2^x}\,dx$ $\left[\frac{2\cdot\sqrt{2^x}}{ln(2)}+c\right]$ $\int\frac{sin(2x)}{sin(x)}dx$ $[2sin(x)+c]$ $\int\frac{x^2}{\sqrt{x}}dx$ $\left[\frac{2}{5}\cdot\sqrt{x^5}+c\right]$ $\int\sqrt[8]{\frac{3}{x}}\,dx$ $\left[\frac{8\cdot\sqrt[8]{3x^7}}{7}+c\right]$

9. $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx$ $\left[\frac{12}{17}\cdot\sqrt[12]{x^{17}}+c\right]$ $\int\frac{2}{x}dx$ $\left[ln\left(x^2\right)+c\right]$ $\int\frac{sec(x)}{\sqrt{1-sin^2(x)}}dx$ $\left[tan(x)+c\right]$ $\int 2^{x+3}\,dx$ $\left[\frac{2^{x+3}}{ln(2)}+c\right]$

Livello 2

10. $\int\left(\sqrt[3]{x^5}-\frac{7}{x^2}+\frac{9}{\sqrt[5]{2x^3}}\right)dx$ $\left[\frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{x^8}+\frac{7}{x}+\frac{45\cdot\sqrt[5]{16x^2}}{4}+c\right]$

11. $\int\left(x^e-e^x+\frac{\pi}{\sqrt[3]{4x}}\right)dx$ $\left[\frac{x^{e+1}}{e+1}-e^x+\frac{3\pi\cdot\sqrt[3]{2x^2}}{4}+c\right]$

12. $\int\left(\sqrt[3]{3x^4}-\frac{2}{3}\cdot sin(x)-\frac{3}{cos^2(x)}\right)dx$ $\left[\frac{2}{3}\cdot cos(x)-3\cdot tan(x)+\frac{9\cdot\sqrt[3]{3x^7}}{7}+c\right]$

13. $\int\left(\sqrt[5]{4}\cdot cos(x)-\frac{5}{x^2+1}+\frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}\right)dx$ $\left[\sqrt[5]{4}\cdot sin(x)-5\cdot tan^{-1}(x)-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+c\right]$

14. $\int\left(2\cdot\sqrt[3]{x}-\frac{17}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{2}{x}\right)dx$ $\left[\frac{3\cdot\sqrt[3]{x^4}}{2}-17\cdot sin^{-1}(x)+2\cdot ln(x)+c\right]$

15. $\int\left(5^x+\frac{2}{x^{e+1}}+\frac{3}{\sqrt[5]{x^e}}\right)dx$ $\left[\frac{5^x}{ln(5)}-\frac{2}{e\cdot x^e}+\frac{15\cdot\sqrt[5]{x^{5-e}}}{5-e}+c\right]$

16. $\int\left(\frac{2}{7^x}-\frac{1}{x^3}+\frac{sin(x)}{\sqrt[3]{7}}\right)dx$ $\left[-\frac{2}{7^x\cdot ln(7)}+\frac{1}{2x^2}-\frac{\sqrt[3]{49}}{7}\cdot cos(x)+c\right]$

17. $\int\left(4^{x+1}-\frac{8}{x^{\pi+1}}+\frac{2}{\sqrt[e]{x^2}}\right)dx$ $\left[\frac{2^{2x+1}}{ln(2)}+\frac{8}{\pi\cdot x^\pi}+\frac{2e\cdot\sqrt[e]{x^{e-2}}}{(e-2)}+c\right]$

18. $\int\left(\pi^x-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}^x}+\frac{2}{3\cdot cos^2(x)}\right)dx$ $\left[\frac{\pi^x}{ln(\pi)}+\frac{\sqrt{3\cdot 2^{2-x}}}{ln(2)}+\frac{2\cdot tan(x)}{3}+c\right]$

19. $\int\left(\sqrt{3}^{x-1}-\frac{1}{3x}-\frac{1}{\sqrt[\pi]{x^e}}\right)dx$ $\left[\frac{2\cdot\sqrt{3^{x+1}}}{3\cdot ln(3)}-\frac{1}{3}\cdot ln(x)+\frac{\pi\cdot\sqrt[\pi]{x^{\pi-e}}}{e-\pi}+c\right]$

Lavoriamo insieme

Calcoliamo: $\int\frac{x+2}{x}dx$. Non è un integrale di quelli immediati, ma possiamo scomporre la frazione:

$$\int\left(\frac{x}{x}+\frac{2}{x}\right)dx=\int\left(1+\frac{2}{x}\right)dx=x+2\cdot ln(x)+c.$$

Livello 1

20. $\int(x+1)^2\,dx$ $[(x+1)^3/3+c]$ $\int(2x+1)^3\,dx$ $[(2x+1)^4/8+c]$ $\int\frac{x^2+2x+1}{x+1}dx$ $[x^2/2+x+c]$

21. $\int\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$ $[x+tan^{-1}(x)+c]$ $\int\frac{x^3+x^2-3x+1}{x}dx$ $[x^3/3+x^2/2-3x+ln(|x|)+c]$

22. $\int \frac{\sqrt{x}+2\cdot\sqrt[3]{x}-3}{\sqrt[4]{x}}dx$ $\left[\frac{4\cdot\sqrt[4]{x^5}}{5}+\frac{24\cdot\sqrt[12]{x^{13}}}{13}-4\cdot\sqrt[4]{x^3}+c\right]$ $\int \frac{2^x+4^x}{2^x}dx$ $\left[x+\frac{2^x}{ln(2)}+c\right]$

23. $\int \frac{cos(2x)}{cos^2(x)}dx$ $[2x - tan(x) + c]$ $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$ $[e^x - x + c]$ $\int \frac{e^{3x}-e^{2x}+1}{e^x}dx$ $[e^{2x} - e^x - e^{-x} + c]$

24. $\int \frac{2^x-3^x+1}{4^x}dx$ $\left[\frac{(3/4)^x}{ln(4/3)}-\frac{2^{-x}+2^{-2x-1}}{ln(2)}+c\right]$ $\int \frac{x^4+2x^2+3}{x^2+1}dx$ $\left[2\cdot tan^{-1}(x)+\frac{x}{3}+x+c\right]$

25. $\int \frac{e^{2x}+2e^x+1}{e^x+1}dx$ $[e^x + x + c]$ $\int sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$ $\left[\frac{x-sin(x)}{4}+c\right]$ $\int tan^2(x)dx$ $[tan(x) - x + c]$

Livello 2

26. $\int \frac{sin(x)+sin(3x)}{3\cdot sin(2x)}dx$ (Sugg. Applicare la formula di prostaferesi) $[2/3sin(x) + c]$

27. $\int \frac{cos(2x)}{cos(x)\cdot[cos(x)+cos(3x)]}dx$ $[½tan(x) + c]$ $\int \frac{x^5+x^3-x^2}{x^2+1}dx$ $[x^4/4 - x + tan^{-1}(x) + c]$

Lavoriamo insieme

Calcoliamo: $\int tan(x)dx$. Possiamo scrivere: $\int \frac{sin(x)}{cos(x)}dx$, in questo modo il numeratore è *quasi* la derivata del denominatore, quindi possiamo applicare la regola: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln|f(x)|+c$. Perciò:

$$-\int \frac{-sin(x)}{cos(x)}dx = -\int \frac{D[cos(x)]}{cos(x)}dx = -ln|cos(x)|+c = ln\frac{1}{|cos(x)|}+c$$

Calcolare i seguenti integrali indefiniti

Livello 1

28. $\int\left(\sqrt[4]{(5x+1)^7}+\frac{9}{(2x+1)^8}\right)dx$ $\left[\frac{4\cdot\sqrt[4]{(5x+1)^{11}}}{55}-\frac{9}{14\cdot(2x+1)^7}+c\right]$ $\int sin^3(x)\cdot cos(x)\ dx$ $[sin^4(x)/4 + c]$

29. $\int\left(\sqrt[3]{(2x-3)^4}+\frac{7}{(3x+1)^2}\right)dx$ $\left[\frac{3}{14}\cdot\sqrt[3]{(2x-3)^7}-\frac{7}{3\cdot(3x+1)}+c\right]$ $\int x\cdot sin(x^2)\ dx$ $[-cos(x^2)/2 + c]$

30. $\int\left(\sqrt[6]{(12x+1)^5}-\frac{3}{\sqrt[5]{3-2x}}\right)dx$ $\left[\frac{15\cdot\sqrt[5]{(3-2x)^4}}{8}+\frac{\sqrt[6]{(2x+1)^{11}}}{22}+c\right]$ $\int \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ $\left[e^{2\cdot\sqrt{x}}+c\right]$

31. $\int (x^2+1)^3\cdot x\ dx$ $[(x^2 + 1)^4/8 + c]$ $\int \sqrt{x^2+x+1}\cdot(2x+1)\ dx$ $\left[\frac{2\cdot\sqrt{(x^2+x+1)^3}}{3}+c\right]$

32. $\int e^x\cdot(e^x+1)\ dx$ $[½\, e^{2x} + e^x + c]$ $\int \frac{tan^{-1}(x)}{1+x^2}\ dx$ $[½\, [tan^{-1}(x)]^2 + c]$

33. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\ dx$ $[ln(e^{2x} + 1) - x + c]$ $\int \frac{1+cos(x)}{x+sin(x)}\ dx$ $[ln(|sin(x) + x|) + c]$

34.	$\int \frac{sin(x)+cos(x)}{sin(x)}dx$	$[ln(\lvert sin(x)\rvert) + x + c]$	$\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\left[-3\cdot\sqrt{1-x^2}+c\right]$
35.	$\int \frac{3x+5}{x^2+1}\,dx$	$\left[5\cdot tan^{-1}(x)+\frac{3\cdot ln(x^2+1)}{2}+c\right]$	$\int \frac{sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\left[\frac{\left[sin^{-1}(x)\right]^2}{2}+c\right]$
36.	$\int \frac{3}{x^2+6x+9}\,dx$	$\left[-\frac{3}{x+3}+c\right]$	$\int \frac{x}{4x^4-12x^2+9}\,dx$	$\left[\frac{1}{4\cdot(3-2x^2)}+c\right]$
37.	$\int \frac{ln(\lvert x^3\rvert)}{x}dx$	$\left[\frac{3\cdot ln^2(\lvert x\rvert)}{2}+c\right]$	$\int \frac{ln(x^4)}{2x}dx$ $\left[ln^2(\lvert x\rvert)+c\right]$	$\int \frac{tan(x)}{cos^2(x)}dx$ $\left[\frac{1}{2\cdot cos^2(x)}+c\right]$
38.	$\int x\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx$	$\left[\frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3}+c\right]$	$\int x\cdot e^{x^2+5}dx$ $\left[\frac{e^{x^2+5}}{2}+c\right]$	$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ $\left[2\cdot e^{\sqrt{x}}+c\right]$
39.	$\int x^2\cdot\sqrt[4]{x^3+1}\,dx$	$\left[\frac{4\cdot\sqrt[4]{(x^3+1)^5}}{15}+c\right]$	$\int \frac{sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$	$\left[-2\cdot cos(\sqrt{x})+c\right]$
40.	$\int \frac{5x}{x^2+12}dx$	$\left[\frac{5\cdot ln(x^2+12)}{2}+c\right]$	$\int \frac{cos(\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$	$\left[\frac{3\cdot sin(\sqrt[3]{x^2})}{2}+c\right]$

Livello 2

41.	$\int \frac{2x+5}{2x-1}\,dx$	$[3ln(\lvert 2x-1\rvert) + x + c]$	$\int \frac{4x+1}{2x-15}dx$	$[31/2ln(\lvert 2x-15\rvert) + 2x + c]$
42.	$\int \frac{2x-7}{3x-10}dx$	$\left[\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}\cdot ln(\lvert 3x-10\rvert)+c\right]$	$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}dx$	$\left[\frac{\sqrt{2x^2+3}}{2}+c\right]$
43.	$\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+1}}dx$	$\left[\frac{4}{9}\cdot\sqrt[4]{(x^3+1)^3}+c\right]$	$\int \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$	$\left[\frac{2\cdot tan^{-1}(x^2)+ln(x^4+1)}{4}+c\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare: $\int \frac{1}{3x^2+4}dx$. Non abbiamo, né possiamo avere, al numeratore la derivata del denominatore. La regola che più *assomiglia* all'integrale è $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = tan^{-1}[f(x)]+c$. Cerchiamo allora di trasformare l'espressione in una a cui si può applicare tale regola. Dividiamo numeratore e denominatore per 4, in modo da ottenere l'addendo 1: $\int \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3x^2}{4}+1}dx$, adesso cerchiamo di scrivere il primo addendo del denominatore come un quadrato, cosa che può farsi sempre con numeri positivi: $\frac{1}{4}\cdot\int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2+1}dx$. Siamo quasi giunti al termine, abbiamo bisogno solo della derivata della base del quadrato:

$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}\cdot\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2+1}dx=\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}\cdot tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x\right)+c$$

Livello 1

44. $\int\frac{1}{x^2+4}dx$ $\left[\frac{tan^{-1}(x/2)}{2}+c\right]$ $\int\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$ $\left[sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+c\right]$ $\int\frac{1}{16x^2+1}dx$ $\left[\frac{tan^{-1}(4x)}{4}+c\right]$

45. $\int\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}dx$ $\left[\frac{1}{5}\cdot sin^{-1}(5x)+c\right]$ $\int\frac{1}{\sqrt{1-6x^2}}dx$ $\left[\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot sin^{-1}\left(\sqrt{6}x\right)+c\right]$ $\int\frac{1}{x^2+3}dx$ $\left[\frac{tan^{-1}\left(\sqrt{3}x\right)}{\sqrt{3}}+c\right]$

46. $\int\frac{3x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ $\left[-\frac{3\cdot\sqrt{1-4x^2}}{4}+c\right]$ $\int\frac{1}{9x^2+16}dx$ $\left[\frac{tan^{-1}(3x/4)}{12}+c\right]$ $\int\frac{1}{\sqrt{25-4x^2}}dx$ $\left[\frac{1}{2}\cdot sin^{-1}\left(\frac{2x}{5}\right)+c\right]$

Livello 2

47. $\int\frac{5x-1}{5x^2+9}dx$ $\left[\frac{ln\left(5x^2+9\right)}{2}-\frac{\sqrt{5}\cdot tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}\cdot x}{3}\right)}{15}+c\right]$ $\int\frac{11x+5}{x^2+1}dx$ $\left[\frac{11\cdot ln\left(x^2+1\right)}{2}+5\cdot tan^{-1}(x)+c\right]$

48. $\int\frac{6x-1}{x^2+7}dx$ $\left[3\cdot ln\left(x^2+7\right)-\frac{\sqrt{7}\cdot tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)}{7}\cdot+c\right]$ $\int\frac{2x+5}{16x^2+1}dx$ $\left[\frac{ln\left(16x^2+1\right)}{16}+\frac{5}{4}\cdot tan^{-1}(4x)+c\right]$

49. $\int\frac{5x+2}{3x^2+1}dx$ $\left[\frac{5\cdot ln\left(3x^2+1\right)}{6}+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot tan^{-1}\left(\sqrt{3}\cdot x\right)+c\right]$ $\int\frac{5x+1}{\sqrt{1-9x^2}}dx$ $\left[\frac{3\cdot sin^{-1}(3x)-5\cdot\sqrt{1-9x^2}}{9}+c\right]$

50. $\int\frac{14x+1}{x^2+35}dx$ $\left[7\cdot ln\left(x^2+35\right)+\frac{tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{35}}\right)}{\sqrt{35}}+c\right]$ $\int\frac{x^2+3}{2x^2+1}dx$ $\left[\frac{1}{2}\cdot x+\frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot tan^{-1}\left(\sqrt{2}\cdot x\right)}{4}+c\right]$

51. $\int\frac{1}{x\cdot ln(x)}dx$ [$ln[|ln(|x|)|] + c$] $\int\frac{1}{x\cdot ln(x)\cdot ln\left[ln(x)\right]}dx$ [$ln\{|ln[|ln(|x|)|]|\} + c$]

52. $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\ dx$ [$½\ sin^{-1}(x^2)+ c$] $\int\frac{x}{2x^4-2x^2+1}\ dx$ [$½\ [tan^{-1}(2x^2 - 1) + c]$]

53. $\int\frac{cos(x)}{1+sin^2(x)}\ dx$ [$tan^{-1}[sin(x)] + c$] $\int\frac{1}{x\cdot\left[1+ln^2(x)\right]}\ dx$ [$tan^{-1}[ln(x)] + c$]

54. $\int\frac{1}{x\cdot\sqrt{1-ln^2(x)}}\ dx$ [$sin^{-1}[ln(x)] + c$] $\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\ dx$ [$sin^{-1}(e^x) + c$]

55. $\int sin^3(x)\ dx$ $\left[-cos(x)+\frac{cos^3(x)}{3}+c\right]$ $\int cos^5(x)\ dx$ $\left[sin(x)-\frac{2}{3}\cdot sin^3(x)+\frac{1}{5}\cdot sin^5(x)+c\right]$

56. $\int\frac{x^2-1}{\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(x^2+x+1\right)}dx$ $\left[ln\left(\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}\right)+c\right]$ $\int\frac{2}{x\cdot ln(x^2)}dx$ [$ln[|ln(x^2)|] + c$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare: $\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$. Ancora una volta non abbiamo né possiamo avere al numeratore la derivata del denominatore. Cerchiamo sempre di riferirci all'integrale $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = tan^{-1}[f(x)]+c$. Poiché il delta del denominatore è negativo possiamo sempre scrivere il trinomio come somma di due quadrati: $\int \frac{1}{x^2+2x+1+1}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx$ e poiché D(x + 1) = 1: $\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = tan^{-1}(x+1)+c$.

Livello 3

57.	$\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$	$\left[\frac{tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}+c\right]$	$\int \frac{1}{4x^2+4x+5}dx$	$\left[\frac{tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{2}\right)}{4}+c\right]$
58.	$\int \frac{1}{2x^2+x+1}dx$	$\left[\frac{2\cdot tan^{-1}\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}}\right)}{\sqrt{7}}+c\right]$	$\int \frac{1}{3x^2+3x+4}dx$	$\left[\frac{2\cdot tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{39}}\right)}{\sqrt{39}}+c\right]$
59.	$\int \frac{8x+1}{9x^2-12x+5}dx$			$\left[\frac{19}{9}\cdot tan^{-1}(3x-2)+\frac{4}{9}\cdot ln\left(9x^2-12x+5\right)c\right]$
60.	$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ dx$	$\left[sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c\right]$	$\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}\ dx$	$\left[sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+c\right]$
61.	$\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\ dx$	$\left[\frac{1}{2}\cdot sin^{-1}(2x)+c\right]$	$\int \frac{1}{\sqrt{2-5x^2}}\ dx$	$\left[\frac{sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}}+c\right]$
62.	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2-x}}dx$	$\left[sin^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)+c\right]$	$\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2-4x}}dx$	$\left[sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)+c\right]$
63.	$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2-4x}}dx$	$\left[sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)+c\right]$	$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x^2+x}}dx$	$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot sin^{-1}\left(\frac{4x-1}{5}\right)+c\right]$

Negli esercizi seguenti le lettere diverse dalla *x* indicano parametri reali

64.	$\int sin^n(x)\cdot cos(x)\ dx$	$\left[\frac{sin^{n+1}(x)}{n+1}+c\right]$	$\int \frac{sin\left(\sqrt[n]{x}\right)}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}dx, n>1$	$\left[n-n\cdot cos\left(\sqrt[n]{x}\right)+c\right]$
65.	$\int \frac{1}{ax+b}\ dx$	$\left[\frac{ln\left(\lvert ax+b\rvert\right)}{a}+c\right]$	$\int \sqrt[n]{ax+b}\ \ dx, n>1$	$\left[\frac{n\cdot\left(\sqrt[n]{(ax+b)^{n+1}}-1\right)}{a\cdot(n+1)}+c\right]$
66.	$\int \frac{1}{x^2+a^2}\ dx$	$\left[\frac{tan^{-1}(x/a)}{a}+c\right]$	$\int \frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}\ \ dx, n>1$	$\left[\frac{n\cdot\left(\sqrt[n]{ax+b}-ax-b\right)}{a\cdot(1-n)\cdot\sqrt[n]{ax+b}}+c\right]$

67.	$\int \frac{ax+b}{ax-b}\,dx$	$\left[\frac{2b\cdot ln(\lvert ax-b\rvert)}{a}+x+c\right]$	$\int \frac{ax+b}{x^2+1}\,dx$	$\left[\frac{a\cdot ln(x^2+1)}{2}+b\cdot tan^{-1}(x)+c\right]$
68.	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$	$\left[sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c\right]$	$\int \frac{ax+b}{x^2+a^2}\,dx$	$\left[\frac{a\cdot ln(x^2+a^2)}{2}+\frac{b}{a}\cdot tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c\right]$

L'angolo di Derive

In Derive il comando per l'integrazione è accessibile mediante il pulsante ∫ o mediante il comando **INT(*funzione*, *variabile*)**, in cui al posto di funzione si scrive o una espressione o il nome di una funzione già immessa, compresivo delle parentesi e della variabile e al posto di variabile si mette il nome della variabile. Con questo comando non viene scritta la costante c.

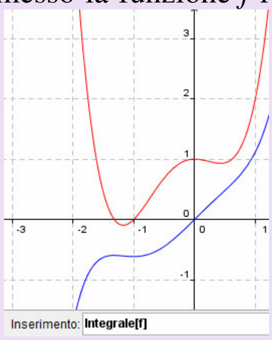
$$\int \left((3\cdot x)^{4/3} - \frac{2}{3}\cdot SIN(x) - \frac{3}{COS(x)^2}\right) dx$$

$$\frac{2\cdot COS(x)}{3} - 3\cdot TAN(x) + \frac{9\cdot 3^{1/3}\cdot x^{7/3}}{7}$$

Nella visualizzazione Derive usa il simbolo ben noto dell'integrale.

L'angolo di Geogebra

Con Geogebra è possibile rappresentare la funzione integrale. Basta immettere il comando **Integrale[*Funzione*]** dove al posto di funzione deve mettersi o il nome della funzione se già immessa, o l'espressione della funzione. Nella figura seguente abbiamo immesso la funzione *f* rappresentata in rosso e con il comando mostrato Geogebra ha costruito la funzione blu.



L'angolo di Microsoft Mathematics

Anche qui possiamo scegliere il pulsante predefinito per l'integrazione indefinita: ∫.

Input	$\int x\sqrt[4]{x^2+3}\,dx$
Output	$\frac{2(x^2+3)^{\frac{5}{4}}}{5}+C$

Integrazione per parti

Così come è molto facile determinare il differenziale di una data quantità, è difficile trovare l'integrale di un dato differenziale. Inoltre, a volte, non riusciamo a dire con certezza se l'integrale di una data quantità possa essere trovato o no. *Johann Bernoulli* (1667 – 1748)

Il problema

Abbiamo già osservato che non esiste una regola di integrazione per il prodotto di due funzioni entrambe integrabili. Ci proponiamo di trovare una regola che talvolta permette di trovare l'integrale di un prodotto.

Ricordiamo la regola di derivazione del prodotto di due funzioni: $D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Cosa accade se applichiamo gli integrali all'uguaglianza?

$$\int D[f(x) \cdot g(x)]\, dx = \int f'(x) \cdot g(x)\, dx + \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$$

Ovviamente, per la stessa definizione di integrale come operatore reciproco di quello di derivate avremo: $f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x)\, dx + \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$, che possiamo anche scrivere:

$$\int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$$

Questa uguaglianza sembra abbastanza inutile poiché esprime un integrale mediante un altro. Se però il secondo integrale fosse più semplice del primo potrebbe invece risultare utile.

Regola di integrazione per parti

Dato un integrale esprimibile come il prodotto di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, una almeno delle due integrabile di primitive note (che si chiamerà **fattore differenziale**) e l'altra derivabile (che si chiamerà **fattore finito**), vale la seguente regola, detta di **integrazione per parti**: $\int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$, in cui $f(x)$ è il fattore differenziale e $g(x)$ quello finito.

Esempio 12

Supponiamo di voler calcolare $\int x \cdot sin(x) dx$. Poiché noi sappiamo integrare entrambi i fattori potremmo usare la regola di integrazione per parti in due modi. Se consideriamo x come fattore differenziale avremo: $f'(x) = x$ e $f(x) = \int x\, dx = \frac{x^2}{2}$, $g(x) = sin(x)$ e $g'(x) = cos(x)$, ottenendo quindi:

$$\int x \cdot sin(x) dx = \int D\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot sin(x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot sin(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot cos(x) dx$$

Ci rendiamo conto immediatamente che in questo caso la regola è del tutto inutile, poiché il secondo integrale è più complicato di quello che vogliamo calcolare.

Se invece è $sin(x)$ il fattore differenziale avremo: $f'(x) = sin(x)$ e $f(x) = \int sin(x) dx = -cos(x)$, $g(x) = x$ e $g'(x) = 1$, ottenendo quindi: $\int x \cdot sin(x) dx = \int x \cdot D(-cos(x)) \cdot dx = -x \cdot cos(x) - \int -cos(x) \cdot 1 dx$.

Stavolta la regola è efficace poiché il secondo integrale è immediato, abbiamo perciò:

$$\int x \cdot sin(x) dx = -x \cdot cos(x) + sin(x) + c$$

Ci sono dei casi in cui la regola apparentemente non si può applicare.

Esempio 13

Supponiamo di voler calcolare $\int ln(x) dx$. In questo caso *sembra* che abbiamo un solo fattore. Ciò non è vero poiché ogni quantità può essere pensata moltiplicata per 1 e di 1 noi conosciamo una sua primitiva: x. Quindi possiamo scrivere:

$$\int ln(x)dx = \int ln(x)\cdot 1dx = \int ln(x)\cdot D(x)dx = x\cdot ln(x) - \int \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx = x\cdot ln(x) - x + c$$

Non dobbiamo pensare però che la regola sia universale.

Esempio 14

Supponiamo di voler calcolare $\int \frac{sin(x)}{x}dx$. Noi conosciamo sia una primitiva di $sin(x)$ che una di $1/x$, eppure abbiamo: $\int \frac{sin(x)}{x}dx = \int D(-cos(x))\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{cos(x)}{x} - \int \frac{cos(x)}{x^2}dx$, e l'integrale ottenuto è più complicato di quello iniziale.

Ma anche: $\int \frac{sin(x)}{x}dx = \int D(ln(x))\cdot sin(x)dx = sin(x)\cdot ln(x) - \int ln(x)\cdot cos(x)dx$, conduce a un integrale più complicato. Anche procedendo come nel precedente esempio:

$$\int \frac{sin(x)}{x}dx = \int D(x)\cdot\frac{sin(x)}{x}dx = \cancel{x}\cdot\frac{sin(x)}{\cancel{x}} - \int \cancel{x}\cdot\frac{x\cdot cos(x) - sin(x)}{x^{\cancel{2}}}dx$$

si ottiene un integrale più complicato. In effetti può dimostrarsi che la predetta funzione non è integrabile in modo elementare.

Infine in alcuni casi la regola di integrazione per parti sembra essere un circolo vizioso.

Esempio 15

Supponiamo di voler calcolare $\int sin^2(x)dx$. Possiamo scrivere:

$$\int sin^2(x)dx = \int sin(x)\cdot sin(x)dx = \int sin(x)\cdot D[-cos(x)]dx$$

Quindi possiamo applicare la regola di integrazione per parti:

$$\int sin^2(x)dx = -cos(x)\cdot sin(x) - \int -cos(x)\cdot cos(x)dx = -cos(x)\cdot sin(x) + \int cos^2(x)dx$$

Abbiamo ottenuto un integrale simile a quello da calcolare, quindi sembrerebbe che anche questa volta la regola non funzioni. Però possiamo anche scrivere nel seguente modo:

$$\int sin^2(x)dx = -cos(x)\cdot sin(x) + \int [1 - sin^2(x)]dx = -cos(x)\cdot sin(x) + x - \int sin^2(x)dx$$

A questo punto siamo convinti che la regola non va, dato che abbiamo riottenuto l'integrale di partenza. Guardiamo l'uguaglianza da un altro punto di vista, ossia consideriamola come un'equazione nell'incognita $\int sin^2(x)dx$: $2\cdot\int sin^2(x)dx = -cos(x)\cdot sin(x) + x$. In questo modo non abbiamo più bisogno di calcolare alcun integrale, basta solo dividere per 2 e aggiungere la costante, ottenendo l'integrale cercato:

$$\int sin^2(x)dx = \frac{-cos(x)\cdot sin(x) + x}{2} + c.$$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\int x^2 \cdot ln(x)\, dx$. Usiamo il metodo di integrazione per parti, scegliendo x^2 come fattore differenziale. Abbiamo:

$$\int x^2 \cdot ln(x)\ \ dx = \int D\left(\frac{x^3}{3}\right) \cdot ln(x)\ \ dx = \frac{x^3}{3} \cdot ln(x) - \int \frac{x^{\cancel{3}\,2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx = \frac{x^3}{3} \cdot ln(x) - \frac{x^3}{9} + c$$

Calcolare i seguenti integrali, usando, se possibile, il metodo di integrazione per parti

Livello 1

1. $\int x \cdot cos(x)\, dx$ [$cos(x) + x \cdot sin(x) + c$] $\int e^x \cdot sin(x)\, dx$ [$\frac{1}{2} e^x \cdot [sin(x) - cos(x)] + c$]

2. $\int x^3 \cdot sin(x)\, dx$ [$x \cdot (6 - x^2) \cdot cos(x) + 3\,(x^2 - 2) \cdot sin(x) + c$] $\int x \cdot e^x dx$ [$(x - 1) \cdot e^x + c$]

3. $\int x^4 \cdot e^x\ dx$ [$(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) \cdot e^x + c$] $\int x \cdot e^{-x} dx$ [$-(x + 1) \cdot e^{-x} + c$]

4. $\int e^x \cdot sin(x)\, dx$ [$\frac{1}{2} e^x [sin(x) - cos(x)] + c$] $\int e^{2x} \cdot cos(x)\, dx$ [$e^{2x}[sin(x) + 2cos(x)]/5 + c$]

5. $\int x^2 \cdot e^{2x} dx$ $\left[\frac{e^{2x} \cdot (2x^2 - 2x + 1)}{4} + c\right]$ $\int [ln(x)]^2\ dx$ [$x \cdot ln^2(x) - 2x \cdot ln(x) + 2x \cdot e^x + c$]

6. $\int x^2 \cdot ln(x)\, dx$ $\left[\frac{x^3}{9} \cdot [3 \cdot ln(x) - 1] + c\right]$ $\int sin^{-1}(x)\, dx$ $\left[x \cdot sin^{-1}(x) + \sqrt{1 - x^2} + c\right]$

7. $\int tan^{-1}(x)\ dx$ $\left[x \cdot tan^{-1}(x) - ln\left(\sqrt{x^2 + 1}\right) + c\right]$ $\int x \cdot tan^{-1}(x)\ dx$ $\left[\left(\frac{1 + x^2}{2}\right) \cdot tan^{-1}(x) - \frac{x}{2} + c\right]$

8. $\int e^{3x} \cdot sin(x)\ dx$ $\left[\frac{1}{10} e^{3x} \cdot [3 \cdot sin(x) - cos(x)] + c\right]$ $\int \frac{ln(x)}{x^2} dx$ $\left[-\frac{1 + ln(x)}{x} + c\right]$

9. $\int ln(x^2 + 1)\, dx$ $\left[2 \cdot tan^{-1}(x) + x \cdot ln(x^2 + 1) - 2x + c\right]$ $\int log_2(x)\, dx$ [$x/ln(2) \cdot [ln(x) - 1)] + c$]

10. $\int ln^2(x)\, dx$ $\left[x \cdot ln^2(x) - 2x \cdot ln(x) + 2x + c\right]$ $\int ln(5x + 1)\, dx$ $\left[\frac{(5x + 1) \cdot ln(5x + 1)}{5} - x + c\right]$

Livello 2

11. $\int x \cdot sin(x) \cdot cos(x)\, dx$ $\left[\frac{1}{8} \cdot sin(2x) + \frac{1}{2} x \cdot sin^2(x) - \frac{1}{4} x + c\right]$ $\int \frac{x \cdot cos(x)}{sin^2(x)} dx$ $\left[ln\left[tan\left(\frac{x}{2}\right)\right] - \frac{x}{sin(x)} + c\right]$

12. $\int x \cdot ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) dx$ $\left[x^2 \cdot ln\left(\sqrt{\frac{x + 1}{1 - x}}\right) + ln\left(\sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}\right) + x + c\right]$

13. $\int ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx$ $\left[\frac{tan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + (2x + 1) \cdot ln\left(\sqrt{x^2 + x + 1}\right) - 2x + c\right]$

Mostrare che i seguenti integrali non possono essere calcolati con il metodo di integrazione per parti.

14. $\int \frac{cos(x)}{x}\,dx$; $\int \frac{ln(x)}{x}\,dx$; $\int \frac{e^x}{x}\,dx$; $\int e^{x^2}\,dx$; $\int \frac{sin^{-1}(x)}{x}\,dx$; $\int \frac{tan^{-1}(x)}{x}\,dx$; $\int \frac{1}{ln(x)}\,dx$

Livello 3

15. $\int sin[ln(x)]\,dx$ $\left[\frac{x\cdot sin[ln(x)]-x\cdot cos[ln(x)]}{2}+c\right]$

16. $\int sin^4(x)\,dx$ $\left[\frac{3x-cos(x)\cdot[2\cdot sin^3(x)+3\cdot sin(x)]}{8}+c\right]$

17. $\int cos^4(x)\,dx$ $\left[\frac{3x+cos(x)\cdot sin(x)\cdot[2\cdot cos^2(x)+3]}{8}+c\right]$

18. $\int x^n\cdot ln(x)dx, n\in\mathbb{N}$ $\left[\frac{x^{n+1}\cdot[(n+1)\cdot ln(x)-1]+1}{(n+1)^2}+c\right]$

Integrazione di funzioni razionali fratte

Il problema

Abbiamo considerato l'integrale $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ nei due casi in cui il discriminante è nullo o negativo, cosa accade quando invece è positivo?

Partiamo con un esempio.

Esempio 16

Vogliamo calcolare $\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx$, dato che il discriminante è positivo possiamo scomporlo: $\int \frac{1}{(x-2)\cdot(x-3)}dx$, se adesso riuscissimo a scrivere la frazione come somma di due frazioni più semplici: $\int \frac{1}{(x-2)\cdot(x-3)}dx = \int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\right)dx$ avremmo finito, dato che i due integrali sono immediati: $\int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\right)dx = A\cdot ln(|x-2|)+B\cdot ln(|x-3|)+c$. Quindi il problema è stabilire se esistono due numeri reali *A* e *B* per cui si abbia: $\frac{1}{(x-2)\cdot(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$. Effettuiamo il minimo comune denominatore: $\frac{1}{(x-2)\cdot(x-3)}=\frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)\cdot(x-3)}=\frac{(A+B)\cdot x-3A-2B}{(x-2)\cdot(x-3)}$. Quando due frazioni sono uguali? Non quando hanno numeratori uguali e denominatori uguali, dato che per esempio ½ = 2/4. Se però hanno i denominatori uguali, come accade, allora devono avere uguali anche i numeratori, cioè $(A + B)\cdot x - 3A - 2B = 1$. Il membro sinistro è un polinomio, quindi anche quello destro deve esserlo, e possiamo scrivere: $1 = 0\cdot x + 1$, quindi per il principio di identità dei polinomi deve essere: $\begin{cases}A+B=0\\-3A-2B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-B\\3B-2B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1\\B=1\end{cases}$. Quindi sostituendo nell'integrale abbiamo:

$$\int \frac{1}{(x-2)\cdot(x-3)}dx = \int\left(\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)dx = -ln(|x-2|)+ln(|x-3|)+c = ln\left(\frac{|x-3|}{|x-2|}\right)+c.$$

Quanto visto nell'esempio può applicarsi a qualsiasi integrale di una frazione algebrica in cui il denominatore è un trinomio di secondo grado a discriminante positivo.

Teorema 5

Vale la seguente identità: $\frac{1}{(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}$, $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$ e $A_k \in \mathbb{R}$ $(1 \leq k \leq n)$.

Dimostrazione

Se eseguiamo il minimo comune multiplo a secondo membro, al primo membro otterremo un polinomio di grado $(n-1)$, dato che ogni A_k verrà moltiplicato per gli $(n-1)$ fattori di primo grado $(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{k-1})\cdot\cdot(x-a_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x-a_n)$. Quindi dopo avere raccolto, al numeratore otterremo un polinomio di grado $(n-1)$ che ha n coefficienti incogniti (gli A_k), perciò dovremo risolvere un sistema lineare di n equazioni in n incognite. Grazie al teorema di Cramer-Leibniz sappiamo che un sistema del genere ha una sola soluzione se il determinante della matrice incompleta è diverso da zero. Ciò accade come può provarsi, ma noi omettiamo la prova perché conduce a calcoli lunghi.

Cosa accade del risultato precedente se due almeno degli a_i sono uguali?

Esempio 17

Vogliamo calcolare $\int \frac{x^2+x-1}{(x-1)^2\cdot(x+1)}dx$. Come visto il problema è ricondotto alla scomposizione della frazione $\frac{x^2+x-1}{(x-1)^2\cdot(x+1)}$ in frazioni semplici del tipo $\frac{A}{x-a}$. Dato che possiamo scrivere $\frac{x^2+x-1}{(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}$, se applichiamo la stessa identità del Teorema 5 dovrebbe aversi: $\frac{x^2+x-1}{(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$

Ci accorgiamo subito che il problema non è risolto poiché:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1} = \frac{A\cdot(x^2-1)+B\cdot(x^2-1)+C\cdot(x-1)^2}{(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)} = \frac{(A+B+C)\cdot x^2-2C\cdot x+(-A-B+C)}{(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}$$

Quindi dovrebbe essere $\begin{cases} A+B+C=1 \\ -2C=1 \\ -A-B+C=-1 \end{cases}$, ma abbiamo: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, cioè il sistema non ha soluzioni. Non è difficile capire perché ciò accada, le frazioni $\frac{A}{x-1}$ e $\frac{B}{x-1}$ sono in pratica la stessa frazione, dato che scrivere A o scrivere B è solo una diversa scelta per un simbolo.

Come possiamo risolvere la questione precedente? Mediante il seguente risultato.

Teorema 6

Vale la seguente identità: $\frac{1}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$, con $A_k \in \mathbb{R}$ $(1 \leq k \leq n)$

Dimostrazione omessa

Vediamo di riprendere l'esempio precedente, usando il risultato del Teorema 6.

Esempio 18

Riprendiamo il calcolo di $\int \frac{x^2+x-1}{(x-1)^2\cdot(x+1)}dx$. Scriviamo $\frac{x^2+x-1}{(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$

Così otteniamo:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}=\frac{A\cdot(x^2-1)+B\cdot(x+1)+C\cdot(x-1)^2}{(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{(A+C)\cdot x^2+(B-2C)\cdot x+(-A+B+C)}{(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}$$

Quindi deve essere $\begin{cases} A+C=1 \\ B-2C=1 \\ -A+B+C=-1 \end{cases}$, e si ha: $\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right| = 1+0+0-(-1-2+0)=4\neq 0$, quindi il sistema ha una sola soluzione: $\begin{cases} A=5/4 \\ B=1/2 \\ C=-1/4 \end{cases}$. Perciò possiamo scrivere:

$$\int \frac{x^2+x-1}{(x-1)^2\cdot(x+1)}dx=\frac{5}{4}\cdot\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{(x-1)^2}dx-\frac{1}{4}\cdot\int\frac{1}{x+1}dx=\frac{5}{4}\cdot ln(|x-1|)-\frac{1}{2\cdot(x-1)}-\frac{1}{4}\cdot ln(|x+1|)+c$$

Adesso ci chiediamo se ogni polinomio possa scomporsi nel prodotto di fattori del tipo visto in precedenza cioè di potenze di polinomi di primo grado. La risposta è ovviamente negativa, basti pensare a un polinomio di II grado a delta negativo, che, nei reali, non è scomponibile. Vale invece il seguente risultato.

Teorema 7

Nell'insieme dei numeri reali ogni polinomio si scompone nel prodotto di polinomi al più di II grado.
Dimostrazione omessa

Dato che abbiamo già visto come integrare una generica funzione razionale fratta con denominatore un trinomio di II grado a delta negativo, sappiamo integrare una qualsiasi funzione razionale fratta, ma prima dobbiamo enunciare quest'altro risultato.

Teorema 8

Vale la seguente identità con A, A_k, $B_k \in\mathbb{R}$ $(1 \leq k \leq n)$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$:

$$\frac{1}{(x-a_1)\cdot(ax^2+bx+c)^h}=\frac{A}{x-a_1}+\frac{A_1\cdot x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2\cdot x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{A_h\cdot x+B_h}{(ax^2+bx+c)^h}$$

Dimostrazione omessa

Esempio 19

Vogliamo calcolare $\int\frac{2x^2+3}{(x-2)\cdot(x^2+1)}dx$. Grazie al precedente teorema possiamo scrivere

$$\frac{2x^2+3}{(x-2)\cdot(x^2+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{Ax^2+A+Bx^2-2Bx+Cx-2C}{(x-2)\cdot(x^2+1)}=\frac{(A+B)\cdot x^2+(-2B+C)x+(A-2C)}{(x-2)\cdot(x^2+1)}$$

Quindi deve essere $\begin{cases} A+B=2 \\ -2B+C=0 \\ A-2C=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=2-A \\ -2\cdot(2-A)+(A-3)/2=0 \\ C=(A-3)/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=2-A \\ 4A+A-8-3=0 \\ C=(A-3)/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=11/5 \\ B=-1/5 \\ C=-2/5 \end{cases}$.

Perciò possiamo scrivere:

$$\int \frac{2x^2+3}{(x-2)\cdot(x^2+1)}dx = \frac{11}{5}\cdot\int\frac{1}{x-2}dx - \frac{1}{5}\cdot\int\frac{x+2}{x^2+1}dx = \frac{11}{5}\cdot ln(|x-2|) - \frac{1}{10}\cdot\int\frac{2x}{x^2+1}dx -$$

$$-\frac{2}{5}\cdot\int\frac{1}{x^2+1}dx = \frac{11}{5}\cdot ln(|x-2|) - \frac{1}{10}\cdot ln(x^2+1) - \frac{2}{5}\cdot tan^{-1}(x)+c$$

Cosa accade se il polinomio al numeratore ha grado maggiore o uguale di quello al denominatore?

Esempio 20

Vogliamo calcolare $\int \frac{x^4+x-1}{x^3+3x^2+2x+6}dx$. Effettuiamo la divisione:

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & & & +x & -1 & x^3+3x^2+2x+6 \\ \hline -x^4 & -3x^3 & -2x^2 & -6x & & x-3 \\ \hline // & -3x^3 & -2x^2 & -5x & -1 & \\ & +3x^3 & +9x^2 & +6x & +9 & \\ \hline & // & 7x^2 & +x & +8 & \end{array}$$

Possiamo allora scrivere:

$$\int\frac{x^4+x-1}{x^3+3x^2+2x+6}dx = \int\left(x-3+\frac{7x^2+x+8}{x^3+3x^2+2x+6}\right)dx = \frac{x^2}{2}-3x+\int\frac{7x^2+x+8}{x^3+3x^2+2x+6}dx$$

Scomponiamo il denominatore: $\int\frac{7x^2+x+8}{(x+3)\cdot(x^2+2)}dx$, adesso applichiamo il metodo visto in precedenza:

$$\frac{7x^2+x+8}{(x+3)\cdot(x^2+2)} = \frac{A}{x+3}+\frac{Bx+C}{x^2+2} = \frac{(A+B)\cdot x^2+(3B+C)x+(2A+3C)}{(x+3)\cdot(x^2+2)}$$

Quindi deve essere $\begin{cases} A+B=7 \\ 3B+C=1 \\ 2A+3C=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=68/11 \\ B=9/11 \\ C=-16/11 \end{cases}$. Perciò possiamo scrivere:

$$\int\frac{7x^2+x+8}{(x+3)\cdot(x^2+2)}dx = \frac{68}{11}\cdot\int\frac{1}{x+3}dx+\frac{1}{11}\cdot\int\frac{9x-16}{x^2+2}dx = \frac{68}{11}\cdot ln(|x+3|)+\frac{9}{22}\cdot\int\frac{2x}{x^2+2}dx -$$

$$-\frac{16}{11}\cdot\int\frac{1}{x^2+2}dx = \frac{68}{11}\cdot ln(|x+3|)+\frac{9}{22}\cdot ln(x^2+2)-\frac{16}{11\cdot\sqrt{2}}\cdot tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c$$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare: $\int \frac{3x+1}{x^2+5x+4}dx$, poiché $x^2 + 5x + 4 = (x + 1) \cdot (x + 4)$, possiamo scrivere:

$\int \frac{3x+1}{(x+1)\cdot(x+4)}dx$, quindi adesso cerchiamo due numeri reali A e B tali che si abbia:

$$\int \frac{3x+1}{(x+1)\cdot(x+4)}dx = \int \frac{A}{x+1}dx + \int \frac{B}{x+4}dx = A\cdot ln\left(\left|x+1\right|\right) + B\cdot ln\left(\left|x+4\right|\right) + c$$

Poiché si ha: $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4} = \frac{Ax+4A+Bx+B}{(x+1)\cdot(x+4)} = \frac{(A+B)\cdot x + (4A+B)}{(x+1)\cdot(x+4)}$ e poiché deve aversi:

$\frac{3x+1}{(x+1)\cdot(x+4)} = \frac{(A+B)\cdot x+(4A+B)}{(x+1)\cdot(x+4)}$, dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} A+B=3 \\ 4A+B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3-B \\ 12-4B+B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3-B \\ -3B=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2/3 \\ B=11/3 \end{cases}.$$

Infine: $\int \frac{3x+1}{(x+1)\cdot(x+4)}dx = -\frac{2}{3}\cdot ln\left(\left|x+1\right|\right) + \frac{11}{3}\cdot ln\left(\left|x+4\right|\right) + c$

Calcolare i seguenti integrali di funzioni razionali fratte

Livello 1

1. $\int \frac{x+2}{x^2-7x+10}dx$ $\left[ln\left(\sqrt[3]{\frac{\left|x-5\right|^7}{(x-2)^4}}\right)+c\right]$ $\int \frac{1}{x^2\cdot(x+1)^2}dx$ $\left[ln\left[\left(\frac{x-1}{x}\right)^2\right] - \frac{2x+1}{x^2+x}+c\right]$

2. $\int \frac{5x-1}{x^2-5x+6}dx$ $\left[ln\left(\frac{\left|x-3\right|^{14}}{\left|x-2\right|^9}\right)+c\right]$ $\int \frac{1}{x^3\cdot(x-2)}dx$ $\left[ln\left(\sqrt[8]{\frac{x-2}{x}}\right)+\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x^2}+c\right]$

3. $\int \frac{3x^3-1}{x^2-5x+6}dx$ $\left[ln\left(\frac{\left|x-3\right|^{80}}{\left|x-2\right|^{23}}\right)+\frac{3}{2}x^2+15x+c\right]$ $\int \frac{2x+1}{x^3-x}dx$ $\left[ln\left(\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x^2\cdot(x+1)}}\right)+c\right]$

4. $\int \frac{7x-3}{x^2+12x+20}dx$ $\left[ln\left(\sqrt[8]{\frac{\left|x+10\right|^{73}}{\left|x+2\right|^{17}}}\right)+c\right]$ $\int \frac{x+1}{x^4+2x^3+x^2}dx$ $\left[ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)-\frac{1}{x}+c\right]$

5. $\int \frac{5x+1}{x^2-7x+12}dx$ $\left[ln\left(\frac{\left|x-4\right|^{21}}{\left|x-3\right|^{16}}\right)+c\right]$ $\int \frac{8x+1}{x^3-x^2}dx$ $\left[9\cdot ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)+\frac{1}{x}+c\right]$

6. $\int \frac{x^2+x+1}{x^3-4x^2+4x}dx$ $\left[ln\left(\sqrt[4]{x\cdot(x-2)^3}\right)-\frac{7}{2x-4}+c\right]$ $\int \frac{x^6-1}{x^4-4x^2}dx$ $\left[\frac{x^3}{3}+4x-\frac{1}{4x}+\frac{63}{16}\cdot ln\left(\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right)+c\right]$

7. $\int \frac{x^5-1}{x^4-2x^3+x^2}dx$ $\left[\frac{1}{x}+\frac{x^2}{2}+2x+ln\left(\frac{\left|x-1\right|^5}{x^2}\right)+c\right]$ $\int \frac{1}{x^3+2x^2+x}dx$ $\left[\frac{1}{x+1}-ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)+c\right]$

Livello 2

8. $\int \frac{x^3+x^2+x+1}{x^4-5x^3+5x^2+5x-6}dx$ $\left[ln\left(\left|\frac{(x-1)\cdot\sqrt{(x-3)^5}}{(x-2)^5}\right|\right)+c\right]$ $\int \frac{x}{16x^4-1}dx$ $\left[\frac{1}{16}\cdot ln\left(\frac{\left|4x^2-1\right|}{4x^2+1}\right)+c\right]$

9. $\int \frac{2x^3-3}{4x^4-8x^3+3x^2+2x-1}dx$ $\left[\frac{14}{9}\cdot ln\left(\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|\right)-\frac{43}{36}\cdot ln\left(\left|4x^2-1\right|\right)+\frac{26}{9}\cdot ln\left(\left|x-1\right|\right)+\frac{1}{3x-3}+c\right]$

10. $\int \frac{2x}{x^2-x-4}dx$ $\left[ln\left(x^2-x-4\right)-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot ln\left(\left|\frac{2x+\sqrt{17}-1}{2x-\sqrt{17}-1}\right|\right)+c\right]$ $\int \frac{x}{x^2-2}dx$ $\left[ln\left(\sqrt{\left|x^2-2\right|}\right)+c\right]$

11. $\int \frac{x^2-3}{\left(x^2-7\right)^3}dx$ $\left[-\frac{\sqrt{7}}{343}\cdot ln\left(\left|\frac{x-\sqrt{7}}{x+\sqrt{7}}\right|\right)-\frac{2x^3-7x}{49\cdot\left(x^2-7\right)^2}+c\right]$ $\int \frac{1}{x^2-3}dx$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot ln\left(\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|\right)+c\right]$

12. $\int \frac{1}{x^3+x^2+x}dx$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)-ln\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)+ln\left(\left|x\right|\right)+c\right]$ $\int \frac{1}{x^3-5x}dx$ $\left[\frac{1}{10}\cdot ln\left(\left|1-\frac{5}{x^2}\right|\right)+c\right]$

13. $\int \frac{1}{x^3+1}dx$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{6}\cdot ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{3}\cdot ln\left(\left|x+1\right|\right)+c\right]$

14. $\int \frac{x^3+x-1}{x^4+2x^2+1}dx$ $\left[ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{1}{2}\cdot tan^{-1}(x)-\frac{x}{2x^2+2}+c\right]$

15. $\int \frac{1}{\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(x^2+x+1\right)}dx$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\left[tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]-ln\left(\sqrt[4]{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}\right)+c\right]$

16. $\int \frac{x^3}{x^3+3x^2+6x+8}dx$ $\left[-\frac{1}{\sqrt{15}}\cdot tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)-\frac{5}{6}\cdot ln\left(x^2+x+4\right)-\frac{4}{3}\cdot ln\left(\left|x+2\right|\right)+x+c\right]$

17. $\int \frac{x}{(x-1)^2\cdot\left(x^2+4\right)^2}dx$ $\left[-\frac{11}{250}\cdot tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{250}\cdot ln\left(x^2+4\right)+\frac{1}{125}\cdot ln\left(\left|x-1\right|\right)+\frac{4x^2-5x+11}{50\cdot(1-x)\cdot\left(x^2+4\right)}+c\right]$

Livello 3

18. $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$ $\left[\frac{1}{2a}\cdot ln\left(\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)+c\right]$ $\int \frac{x}{x^3-a^3}dx$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3a}\cdot tan^{-1}\left(\frac{2x+a}{\sqrt{3}a}\right)-\frac{1}{6a}\cdot ln\left(x^2+ax+a^2\right)+\frac{1}{3a}\cdot ln\left(\left|x-a\right|\right)+c\right]$

19. $\int \frac{1}{x^3+a^3}dx$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3a^2}\cdot tan^{-1}\left(\frac{2x-a}{\sqrt{3}a}\right)-\frac{1}{6a^2}\cdot ln\left(x^2-ax+a^2\right)+\frac{1}{3a^2}\cdot ln\left(\left|x+a\right|\right)+c\right]$

20. $\int \frac{1}{x^4-a^4}dx$ $\left[\frac{1}{4a^3}\cdot ln\left(\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)-\frac{1}{2a^3}\cdot tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c\right]$ $\int \frac{x^2}{x^2-a^2}dx$ $\left[\frac{a}{2}\cdot ln\left(\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)+x+c\right]$

21. $\int \frac{1}{x^4+a^2x^2+a^4}dx$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{6a^3}\cdot\left[tan^{-1}\left(\frac{2x-a}{3a}\right)+tan^{-1}\left(\frac{2x+a}{3a}\right)\right]-\frac{1}{4a^3}\cdot ln\left(\frac{x^2-ax+a^2}{x^2+ax+a^2}\right)+c\right]$

Integrazione per sostituzione

Il problema

Possiamo semplificare il calcolo di un integrale mediante una sostituzione di variabili?

Esempio 21

Per calcolare $\int \frac{tan(x)}{1-cos(x)}dx$, nessuno dei procedimenti visti in precedenza ci viene in aiuto. Possiamo però scrivere: $\int \frac{sin(x)}{cos(x)\cdot[1-cos(x)]}dx$, e osserviamo però che il numeratore è derivata di una parte del denominatore. Ciò ci suggerisce di sostituire *cos*(*x*) con una variabile diversa da *x*, per esempio *t*. Così facendo avremo: $\int \frac{sin(x)}{cos(x)\cdot[1-cos(x)]}dx = \int \frac{-d[cos(x)]}{cos(x)\cdot[1-cos(x)]} = \int_{t=cos(x)} \frac{-dt}{t\cdot(1-t)} = \int_{t=cos(x)} \frac{1}{t\cdot(t-1)}dt$. In questo modo quindi abbiamo trasformato l'integrale di partenza in un integrale razionale, che sappiamo risolvere. È importante osservare che dobbiamo sostituire *tutte le x* con espressioni nella nuova variabile, senza dimenticare però che il risultato finale deve essere espresso sempre in *x*, come l'integrale di partenza. Adesso abbiamo: $\int_{t=cos(x)} \frac{dt}{t\cdot(t-1)} = \int_{t=cos(x)} \left(\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}\right)dt$, in cui si ha:

$$\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}=\frac{1}{t\cdot(t-1)} \Rightarrow (A+B)\cdot t - A = 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

Infine:

$$\int \frac{tan(x)}{1-cos(x)}dx = \int_{t=cos(x)} \left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}\right)dt = \left[-ln(|t|)+ln(|t-1|)\right]_{t=cos(x)} + c =$$
$$= \left[ln\left(\left|\frac{t-1}{t}\right|\right)\right]_{t=cos(x)} + c = ln\left(\left|\frac{cos(x)-1}{cos(x)}\right|\right)+c$$

Possiamo quindi enunciare la seguente regola

Formula di Integrazione per sostituzione

Si ha: $$\int f(x)dx = \int_{x=g(t)} f[g(t)]\cdot g'(t)dt$$

In genere la sostituzione si usa in tutti quegli integrali di funzioni trascendenti (goniometriche, esponenziali, logaritmiche, …) o irrazionali, per cercare di razionalizzare la funzione integranda, dato che, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, in genere sappiamo calcolare gli integrali delle funzioni razionali fratte.

Esempio 22

Vogliamo calcolare $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$. Poiché vogliamo razionalizzare l'espressione, conviene porre uguale a *t* il radicale con il minimo comune indice fra i due presenti, cioè in questo caso $t=\sqrt[6]{x}$, ciò significa che avremo $\sqrt{x}=\left(\sqrt[6]{x}\right)^3=t^3; \sqrt[3]{x}=\left(\sqrt[6]{x}\right)^2=t^2$. Dobbiamo sostituire anche *dx*. E poiché si ha: $t=\sqrt[6]{x} \Rightarrow x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5\,dt$. Quindi avremo: $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = \int_{t=\sqrt[6]{x}} \frac{t^3}{1+t^2}\cdot 6t^5 dt = \int_{t=\sqrt[6]{x}} \frac{6t^8}{1+t^2}dt$. Adesso abbiamo:

$$\int_{t=\sqrt[6]{x}} \frac{6t^8}{1+t^2}dt = 6\cdot \int_{t=\sqrt[6]{x}} \left[\left(t^6-t^4+t^2-1\right)+\frac{1}{1+t^2}\right]dt = 6\cdot\left[\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+tan^{-1}(t)+c\right]_{t=\sqrt[6]{x}} =$$
$$= \frac{6x\cdot\sqrt[6]{x}}{7}-\frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}+2\sqrt{x}-6\cdot\sqrt[6]{x}+6\cdot tan^{-1}\left(\sqrt[6]{x}\right)+c$$

Anche per le funzioni goniometriche si può usare una sostituzione *standard*.

Esempio 23

Vogliamo calcolare $\int \frac{sin(x)+cos(x)}{1+cos(x)}dx$. Ricordiamo le cosiddette formule parametriche che trasformano seno e coseno in espressioni razionali: $sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}, cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, in cui $t = tan(x/2)$, quindi avremo anche $x = 2\cdot tan^{-1}(t) \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$. Con queste formule avremo:

$$\int_{t=tan(x/2)} \frac{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \int_{t=tan(x/2)} \frac{\frac{-t^2+2t+1}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{1+\cancel{t^2}+1-\cancel{t^2}}{\cancel{1+t^2}}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \int_{t=tan(x/2)} \frac{-t^2+2t+1}{1+t^2}dt$$

Come si vede abbiamo razionalizzato l'espressione. Continuiamo:

$$\int_{t=tan(x/2)} \left(\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1+t^2}{1+t^2}+\frac{2}{1+t^2}\right)dt = \left[ln\left(1+t^2\right)-t+2\cdot tan^{-1}(t)+c\right]_{t=tan\left(\frac{x}{2}\right)} =$$
$$= ln\left[1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]-tan\left(\frac{x}{2}\right)+2\cdot tan^{-1}\left[tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]+c = ln\left[1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]-tan\left(\frac{x}{2}\right)+x+c$$

Vale quindi la seguente regola.

Sostituzione di integrandi contenenti seni e/o coseni

Si applica la sostituzione $sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}, cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, dove è $t = tan(x/2)$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$. Ricordando l'identità: $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$, conviene operare la sostituzione $x = sin(t)$ poiché essa razionalizza l'espressione. Ciò comporta anche la sostituzione $dx = cos(t)\ dt$, ottenendo perciò: $\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{t=sin^{-1}(x)}\sqrt{1-sin(t)^2}\cdot cos(t)\,dt = \int_{t=sin^{-1}(x)} cos^2(t)\,dt$.

Quest'ultimo integrale si calcola per parti o utilizzando l'identità:

$$cos\left(\frac{t}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+cos(t)}{2}} \Rightarrow cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1+cos(t)}{2} \Rightarrow cos^2(t) = \frac{1+cos(2t)}{2}$$

In quest'ultimo modo si ha:

$$\int_{t=sin^{-1}(x)}\frac{1+cos(2t)}{2}dt = \left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\cdot sin(2t)+c\right]_{t=sin^{-1}(x)} = \left[\frac{t}{2}+\frac{1}{\cancel{4}^{2}}\cdot\cancel{2}\cdot sin(t)\cdot cos(t)+c\right]_{t=sin^{-1}(x)} =$$

$$= \left[\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\cdot sin(t)\cdot\sqrt{1-sin^2(t)}+c\right]_{t=sin^{-1}(x)} = \frac{sin^{-1}(x)+x\cdot\sqrt{1-x^2}}{2}+c$$

Calcolare i seguenti integrali operando un'opportuna sostituzione di variabile

Livello 1

1. $\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$ $\left[2\cdot\sqrt{x}-2\cdot tan^{-1}(x)+c\right]$; $\int\frac{x+\sqrt{x}}{x-1}dx$ $\left[2\cdot ln\left(\sqrt{x}-1\right)+x+2\sqrt{x}+c\right]$

2. $\int\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}dx$ $\left[4\cdot ln\left(\sqrt{x}+1\right)+x+4\cdot\sqrt{x}+c\right]$; $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+1}dx$ $\left[\frac{3}{2}\cdot\left[\sqrt[3]{x^2}-ln\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)\right]+c\right]$

3. $\int\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx$ $\left[\frac{2}{15}\cdot\left(3x^2-4x+8\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)+c\right]$; $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$ $\left[2\cdot sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x\cdot\sqrt{4-x^2}}{2}+c\right]$

4. $\int\frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$ $\left[\frac{3}{70}\cdot\left(20\cdot\sqrt{x+1}+14x-21\right)\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}+c\right]$

5. $\int\frac{sin(x)}{cos^2(x)-cos(x)}dx$ $\left[ln\left[\frac{cos(x)}{cos(x)-1}\right]+c\right]$; $\int x\cdot\sqrt{x+3}\,dx$ $\left[\frac{2}{5}\cdot\left(x^2+x-6\right)\cdot\sqrt{x+3}+c\right]$

6. $\int\frac{cos(x)}{sin^2(x)-sin(x)-2}dx$ $\left[ln\left[\sqrt[3]{\frac{2-sin(x)}{1+sin(x)}}\right]+c\right]$; $\int(x+1)\cdot\sqrt{x-2}\,dx$ $\left[\frac{2}{5}\cdot(x+3)\cdot\sqrt{(x-2)^3}+c\right]$

Livello 2

7. $\int\frac{\sqrt{x^2-1}+1}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}dx$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot ln\left(\frac{\left(x-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2x^2-2}-x\right)}{\left(x+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2x^2-2}+x\right)}\right)+ln\left(x^2-1\right)+c\right]$; $\int\frac{1}{sin(x)}dx$ $\left[ln\left[tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]+c\right]$

8. $\int\frac{\sqrt{x+1}}{3x-2}dx$ $\left[\frac{2}{9\cdot\sqrt{15}}\cdot ln\left(\frac{\sqrt{3x+3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3x-2}}\right)+\frac{2}{3}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)+c\right]$; $\int\frac{1}{1-sin(x)}dx$ $\left[tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+c\right]$

9. $\int\frac{1}{2+cos(x)}dx$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left[x-2\cdot tan^{-1}\left(\frac{sin(x)}{cos(x)+\sqrt{3}+2}\right)\right]+c\right]$; $\int\frac{1}{sin(x)\cdot cos(x)}dx$ $\left[ln\left[tan(x)\right]+c\right]$

10. $\int \frac{1}{sin^2(x)-sin(x)-2}dx$ $\left[-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{9}\cdot tan^{-1}\left(\frac{cos(x)}{sin(x)-\sqrt{3}-2}\right)+\frac{1}{3}\cdot cot\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{3}}{9}\cdot x+c\right]$

11. $\int \frac{1}{1+sin^2(x)}dx$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left[x-tan^{-1}\left(\frac{sin(2x)}{cos(2x)-2\cdot\sqrt{2}-3}\right)\right]+c\right]$ $\int e^{\sqrt{x}}dx$ $\left[2\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)+c\right]$

12. $\int \frac{tan(x)+2}{tan^2(x)+1}dx$ $\left[\frac{sin(2x)+sin^2(x)+2x}{2}+c\right]$ $\int \frac{1}{e^{2x}-1}dx$ $\left[ln\left(\sqrt{e^{2x}-1}\right)-x+c\right]$

13. $\int \frac{e^x+1}{\sqrt{e^x-1}}dx$ $\left[2\cdot tan^{-1}\left(e^x-1\right)+2\cdot\sqrt{e^x-1}+c\right]$ $\int \frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}dx$ $\left[4\cdot ln\left(\sqrt{1-x}-1\right)+4\cdot\sqrt{1-x}-x+c\right]$

14. $\int \frac{1}{1+sin(x)-cos(x)}dx$ $\left[ln\left(\frac{sin(x)}{sin(x)+cos(x)+1}\right)+c\right]$ $\int \frac{1}{e^x+1}dx$ $[x-ln(e^x+1)+c]$

15. $\int \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-2}dx$ $\left[-ln\left(\sqrt{e^x+2-2\cdot\sqrt{e^x+1}}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot ln\left(\frac{\sqrt{e^x+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{e^x+1}+\sqrt{3}}\right)+\frac{x}{2}+c\right]$

Livello 3

16. $\int x\cdot sin^{-1}(x)dx$ (prima integrare per parti, poi sostituire …) $\left[\left(\frac{2x^2-1}{4}\right)\cdot sin^{-1}(x)+\frac{x\cdot\sqrt{1-x^2}}{4}+c\right]$

17. $\int \frac{1}{\left(x^2-1\right)^2}dx$ (si ponga $t=\frac{x+1}{x-1}$) $\left[ln\left(\sqrt[4]{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}\right)-\frac{x}{2x^2-2}+c\right]$ $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ $\left[\frac{4}{5}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}+c\right]$

18. $\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ $\left[tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2x^2+2}+c\right]$ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}dx$ $\left[ln\left(2\cdot\sqrt{x^2+x}\right)+2x+1+c\right]$

19. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}dx$ (si ponga $\sqrt{x^2-x}=x+t$) $\left[ln\left(2\cdot\sqrt{x^2-x}\right)+2x-1+c\right]$

20. $\int x^2\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx$ $\left[\frac{x\cdot\sqrt{x^2+1}\cdot\left(2x^2+1\right)-ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{8}+c\right]$ $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}dx$ $\left[\frac{2}{3}\cdot\left(\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x^3}\right)+c\right]$

21. $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (si ponga $\frac{1-x^2}{x^2}=t^2$) $\left[\frac{3\cdot sin^{-1}(x)-x\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot\left(2x^2+3\right)}{8}+c\right]$

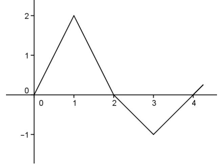
La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Calcolare $\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x e^{-t^2}dt}{1-cos(x)}$ $[+\infty]$ $\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x \frac{sin(t)}{t}dt}{ln(1+x)}$ $[1]$ $\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x \frac{ln(t)}{t}dt}{\int_0^x e^{-t}dt}$ $[-\infty]$

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi
I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito
http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

1. (Liceo scientifico 1991/1992) La funzione $f(x)=\left(2x^3-4x\right)\cdot e^{-x^2}$ rappresenti, in opportune unità di misura, la forza *f*(*x*) a cui `e soggetto un punto *P* libero di muoversi lungo l'asse delle *x*. Sapendo che la forza f è data da $f(x)=-\frac{dE(x)}{dx}$, dove *E*(*x*) è l'energia potenziale, trovare la funzione *E*(*x*) e rappresentarla avendo posto *E*(0) = –1. Per quali valori di *x* il punto *P* è in equilibrio, ossia per quali valori di *x* la forza è nulla? Per tali valori di *x* l'energia potenziale quale valore assume? $\left[E(x)=e^{-x^2}\cdot\left(x^2-1\right)\quad P(0;-1)\vee P\left(\pm\sqrt{2};e^{-2}\right)\right]$
2. (Liceo scientifico 2001/2002) Determinare, se esistono, i numeri *a*, *b* in modo che la seguente relazione: $\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+1}$, sia un'identità. [*a* = ¼, *b* = –¼]
3. (Liceo scientifico 2000/2001) Sia *f*(*x*) una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che *f*(0) = 2. Calcolare: $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{2xe^x}$, dove *e* è la base dei logaritmi naturali. [1]
4. (Liceo scientifico 2001/2002) Calcolare la derivata, rispetto ad *x*, della funzione *f*(*x*) tale che: $f(x)=\int_x^{x+1} ln(t)\,dt, x>0$. $\left[ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$
5. (Liceo scientifico PNI 2001/2002) Trovare *f*(4) sapendo che *f* è continua e che: $\int_0^x f(t)\,dt=x\cdot cos(\pi\cdot x)$. [1]
6. (Liceo scientifico PNI 2001/2002) Trovare *f*(4) sapendo che $\int_0^x f(t)\,dt=x\cdot cos(\pi\cdot x)$. [1]
7. (Liceo scientifico PNI 2002/2003) Di una funzione *f*(*x*) si sa che ha derivata seconda uguale a *sen*(*x*) e che *f* ′(0) = 1. Quanto vale $f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)$? [π – 1]
8. (Liceo scientifico 2002/2003) La derivata della funzione $f(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$ è la funzione $f'(x)=2\cdot x\cdot e^{-x^4}$. Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.
9. (Liceo scientifico PNI suppletiva 2004/2005) Calcolare la derivata, rispetto a *x*, della funzione $F(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{sin(t)}dt$? $\left[\frac{2}{sin(2x)}-\frac{1}{sin(x)}\right]$
10. (Liceo scientifico 2008/2009) Si trovi la funzione *f*(*x*) la cui derivata è *sin*(*x*) e il cui grafico passa per il punto (0, 2). [*f*(*x*) = 3 – *cos*(*x*)]
11. (Liceo scientifico 2012/2013) La funzione *f* ha il grafico in figura.  Se

$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ per quale valore positivo di x, g ha un minimo? [$x = 4$]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

AK = Arkansas Calculus Competition
CC = Cincinnati University Calculus Contest
HH = Houston High School Math Contest
RICE = Rice University Mathematics Tournament

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato ai giochi della Rice nel 2008. Calcolare $\int e^{3x}\cdot sin(x)\,dx$.

Integriamo per parti:

$$\int e^{3x}\cdot sin(x)\,dx=-e^{3x}\cdot cos(x)+\int 3\cdot e^{3x}\cdot cos(x)\,dx=-e^{3x}\cdot cos(x)+3\cdot e^{3x}\cdot sin(x)-\int 9\cdot e^{3x}\cdot sin(x)\,dx$$

Considerando l'espressione come un'equazione nell'incognita $\int e^{3x}\cdot sin(x)\,dx$, abbiamo:

$$10\cdot\int e^{3x}\cdot sin(x)\,dx=e^{3x}\cdot\left[3\cdot sin(x)-cos(x)\right]\Rightarrow\int e^{3x}\cdot sin(x)\,dx=\frac{e^{3x}}{10}\cdot\left[3\cdot sin(x)-cos(x)\right]+c$$

1. (Rice 2008) Calcolare $\int\frac{x+2}{(x-1)^2\cdot(x-2)}\,dx$. $\left[4\cdot ln\left(\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right)+\frac{3}{x-1}+c\right]$

2. (CC 2008) Calcolare $\int sin^{-1}(3x)\,dx$. $\left[x\cdot sin^{-1}(3x)+\frac{\sqrt{1-9x^2}}{3}+c\right]$

3. (CC 2010) Calcolare $\int\frac{1}{x^2\cdot\sqrt{1-x^2}}\,dx$. $\left[-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+c\right]$

4. (CC 2011) Calcolare $\int\frac{x+1}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1}\,dx$. $\left[ln\left(\sqrt{x^2+2\cdot\sqrt{x}+1}\right)+\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot tan^{-1}\left(\sqrt{2}\cdot x+1\right)+c\right]$

5. (HH 2012) Sia f una funzione continua e $F(x)=\int_0^x\left[(2t+3)\cdot\int_t^2 f(u)\,du\right]dt$, allora $F''(2)$ è

   a) $-2\cdot f(2)$ b) $-7\cdot f(2)$ c) $7\cdot f'(2)$ d) $3\cdot f'(2)$ e) $7\cdot f(2)$ [b)]

Questions in English

Working together

We solve a question assigned at Rice in 2008. Find $f(x)$ such that

$$\lim_{h\to0}\frac{h^2}{f(x+2h)-2\cdot f(x+h)+f(x)}=-\frac{x^3}{2}-x-\frac{1}{2x}$$

Observe that we can write $f''(x)=\lim_{h\to0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$, and we can write:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\ f'(x+h)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h}$$

Hence: $f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h}-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{h}=$ and

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x+h)-f(x+h)+f(x)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2\cdot f(x+h)+f(x)}{h^2}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{f(x+2h)-2\cdot f(x+h)+f(x)}=\frac{1}{f''(x)}.$$

$$\frac{1}{f''(x)}=-\frac{x^3}{2}-x-\frac{1}{2x}\Rightarrow f''(x)=-\frac{2x}{x^4+2x^2+1}=-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow$$

Hence we must solve: $\Rightarrow f'(x)=-\int\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx\Rightarrow f'(x)=-\int 2x\cdot\left(x^2+1\right)^{-2}dx\Rightarrow f'(x)=\left(x^2+1\right)^{-1}+c\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x)=\int\left[\left(x^2+1\right)^{-1}+c\right]dx\Rightarrow f(x)=tan^{-1}(x)+cx+d$$

6. (Rice 2009) Let $a(t)=cos^2(2t)$ be the acceleration at time t of a point particle traveling on a straight line. Suppose at time $t=0$, the particle is at position $x=1$ with velocity $v=-2$. Find its position at time $t=2$. $\left[-\frac{cos(8)}{16}+\frac{33}{32}\right]$

7. (AK 2012) Solve the following $\int\frac{x^3+8x^2+16x-4}{x+5}dx$. [$x^3/3+3/2x^2+x-ln(|x+5|^9)+c$]

8. (AK 2012) Evaluate the following $\int sin^3(2x)\cdot cos(2x)\,dx$. [$sin^4(2x)/8+c$]

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_3_3.htm

11. L'integrazione

11.2 Integrazione definita

Prerequisiti

- Concetto di limite
- Continuità di una funzione
- Calcolo differenziale
- Calcolo integrale
- Concetto di volume
- Metodo degli indivisibili di Cavalieri

Obiettivi

- Sapere calcolare integrali definiti
- Sapere calcolare aree di parti di piano delimitate da funzioni integrabili
- Sapere distinguere fra integrale definito e area
- Sapere calcolare volumi di rotazione di archi di funzioni integrabili

Contenuti

- Calcolo di integrali definiti e applicazione al calcolo di aree
- Volume di alcuni solidi di rotazione e lunghezza di alcune curve piane
- Integrali impropri e generalizzati

Quelli che … vogliono sapere di più
- Equazioni differenziali

Parole chiave
Integrale generalizzato – Integrale improprio

Calcolo di integrali definiti e applicazione al calcolo di aree

Il problema

Abbiamo dato significato geometrico al simbolo $\int_a^b f(x)\,dx, f(x) > 0, \forall x \in [a,b]$, dicendo che rappresenta la misura dell'area del trapezoide determinato dalla funzione *f*(*x*) nell'intervallo [*a*; *b*]. Abbiamo altresì visto che calcolare tale numero usando la definizione è spesso un lavoro laborioso e talvolta pressoché impossibile. Vogliamo quindi determinare un metodo migliore per il calcolo di tali aree.

Nell'Unità precedente abbiamo enunciato il cosiddetto Teorema fondamentale del calcolo integrale, nel quale si diceva che la funzione integrale $\int_0^x f(t)\,dt$ era derivabile e la sua derivata era *f*(*x*). Proprio usando tale risultato abbiamo dato un significato all'integrale indefinito come operatore inverso della derivata. Possiamo enunciare allora anche il seguente risultato.

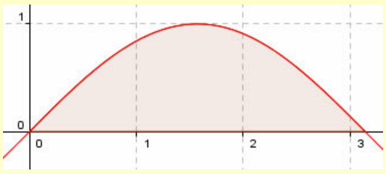
Teorema 1 (Formula fondamentale del calcolo integrale)

Se *f*(*x*) è dotata di primitive in [*a*; *b*] e si ha $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, allora si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Dimostrazione omessa

Esempio 1

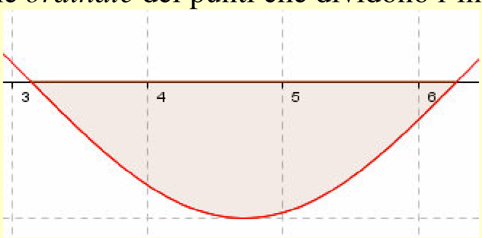
Consideriamo l'area sottesa dalla sinusoide nell'intervallo [0; π], come mostrato in figura, vogliamo calcolarne la misura.  Quindi dobbiamo calcolare

$$\int_0^{\pi} sin(x)\,dx = \left[-cos(x)\right]_0^{\pi} = -cos(\pi) - \left[-cos(0)\right] = -(-1) - (-1) = 2$$

Non è difficile capire che gli integrali definiti sono numeri reali, quindi non sempre rappresentano numeri positivi, perciò **non possiamo dire** che un integrale definito rappresenta sempre un'area. Del resto avevamo definito l'area del trapezoide solo per funzioni sempre positive.

Esempio 2

L'area sottesa dalla sinusoide nell'intervallo [π; 2π], mostrata in figura, non può essere calcolata come $\int_{\pi}^{2\pi} sin(x)\,dx$, poiché, ricordando che nella definizione dell'area di un trapezoide abbiamo inserito la misura delle altezze dei plurirettangoli come *ordinate* dei punti che dividono l'intervallo.



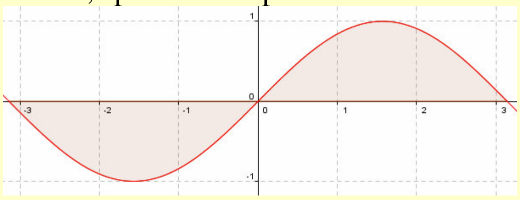
In questo caso queste ordinate sono tutte negative. E perciò

$$\int_{\pi}^{2\pi} sin(x)\,dx = \left[-cos(x)\right]_{\pi}^{2\pi} = -cos(2\pi) - \left[-cos(\pi)\right] = -1 - 1 = -2 .$$

Quindi l'area di un trapezoide deve essere calcolata in modo opportuno, cioè considerando il fatto che essa si trovi nel semipiano positivo delle ordinate o in quello inferiore.

Esempio 3

Se calcolassimo l'area sottesa dalla sinusoide nell'intervallo [–π; π], mostrata in figura, come $\int_{-\pi}^{\pi} sin(x)\,dx$, otterremo ovviamente zero, perché la parte dell'intervallo [–π; 0] avrà un valore opposto a quella



dell'intervallo [0; π].

Il modo corretto di calcolare è allora $-\int_{-\pi}^{0} sin(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} sin(x)\,dx$.

In vista di quanto detto finora forniamo la seguente definizione.

Definizione 1

Chiamiamo **integrale definito** della funzione *f*(*x*) estesa all'intervallo [*a*; *b*] il numero

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \int_a^b f(x)\,dx & se\ a < b \\ 0 & se\ a = b \\ -\int_b^a f(x)\,dx & se\ a > b \end{cases}$$

Intuitivo è perciò il seguente risultato.

Teorema 2

Se *f*(*x*) è continua in [*a*; *b*] e $c \in (a, b)$, allora si ha $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Dimostrazione ovvia dal significato di integrale definito.

Per calcolare un integrale definito basterebbe quindi calcolare l'integrale indefinito e poi applicare la sostituzione stabilita dal Teorema 1. Esistono però anche regole per particolari procedure. Per esempio nel caso di integrazione per parti o per sostituzione.
Cominciamo a considerare l'integrazione per parti.

Teorema 3

Se *f*(*x*) e *g*(*x*) sono continue e derivabili in [*a*; *b*], con le derivate anch'esse continue, allora si ha

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Dimostrazione ovvia dai precedenti risultati.

Esempio 4

Per calcolare $\int_0^1 x \cdot sin(x)\,dx$, applichiamo il metodo di integrazione per parti, ottenendo:

$$\int_0^1 x \cdot sin(x)\,dx = \left[-x \cdot cos(x)\right]_0^1 + \int_0^1 cos(x)\,dx = -cos(1) + \left[sin(x)\right]_0^1 = -cos(1) + sin(1)$$

Consideriamo adesso l'integrazione per sostituzione.

Teorema 4

Sia $f(x)$ continua in $[a; b]$, $x = g(t)$ continua e derivabile in $[c; d]$ con la derivata anch'essa continua. Sia inoltre $g(t) \in [a; b]$, $\forall\, t \in [c; d]$, allora si ha $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\left[g(t)\right] \cdot g'(t)\,dt$.

Dimostrazione omessa

Esempio 5

Per calcolare $\int_2^3 \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$, applichiamo la sostituzione: $\sqrt{x} = t, x = t^2, dx = 2t\,dt$. Dobbiamo però sostituire anche gli estremi di integrazione. Se $x = 2$ allora $t = \sqrt{2}$ e, analogamente, se $x = 3$ allora $t = \sqrt{3}$. Quindi l'integrale diviene:

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{t+t^2}{t-1} \cdot 2t\,dt = 2 \cdot \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{t^3+t^2}{t-1}\,dt = 2 \cdot \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(t^2 + 2t + 2 + \frac{2}{t-1}\right) dt = 2 \cdot \left[\frac{t^3}{3} + t^2 + 2t + 2 \cdot ln(t-1)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2 \cdot \left[\sqrt{3} + 3 + 2 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot ln\left(\sqrt{3}-1\right) - \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} - 2 - 2 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right] =$$

$$= 4 \cdot ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-1}\right) - \frac{16 \cdot \sqrt{2}}{3} + 6 \cdot \sqrt{3} + 2$$

Abbiamo già visto un teorema della media di una funzione, il cosiddetto teorema di Lagrange, che ci dice che, sotto particolari condizioni, possiamo dire che una funzione ha un suo rappresentante, così come la media aritmetica è in generale un rappresentante (spesso non buono) di un insieme finito di valori numerici. Lo stesso vogliamo fare nel caso dell'area sottesa da una funzione, vogliamo cioè cercare un valore della funzione che può considerarsi l'altezza di un rettangolo di base comune al trapezoide e ad esso equivalente. Vale infatti questo risultato.

Teorema 5 (della media integrale)

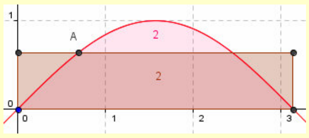
Sia $f(x)$ integrabile in $[a; b]$, allora esiste $c \in [a; b]$ tale che si ha $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx = f(c)$.

Dimostrazione omessa

Il precedente risultato dice appunto che possiamo trovare un punto P sulla funzione in modo tale che il rettangolo che ha per base $[a; b]$ e per altezza l'ordinata di P ha la stessa area del trapezoide.

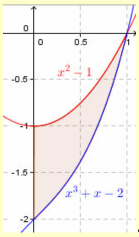
Esempio 6

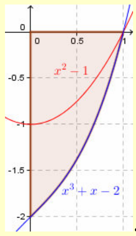
Dato $\int_0^\pi sin(x)\,dx = 2$, vogliamo trovare il punto in cui si ha la media, cioè: $\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi sin(x)\,dx = sin(c)$

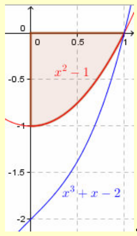
$\Rightarrow c = sin^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)$. Quindi il rettangolo di base [0; π] e altezza $sin\left(\left[sin^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)\right]\right) = \frac{2}{\pi}$ ha area pari a 2. Lo mostriamo in figura ottenuto con Geogebra. 

Possiamo anche calcolare aree racchiuse da due o più funzioni.

Esempio 7

Vogliamo calcolare l'area racchiusa dalle funzioni $y = x^2 - 1$, $y = x^3 + x - 2$ e l'asse delle ordinate. L'area da calcolare è quella in figura 

. Come possiamo calcolarla? Teniamo conto che siamo interamente nel semipiano negativo delle ordinate. Allora $\int_0^1 \left(x^3 + x - 2\right) dx$ è l'opposto dell'area in figura 

.
Invece $\int_0^1 \left(x^2 - 1\right) dx$ è l'opposto dell'area in figura 

. Quindi il modo corretto di calcolare l'area cercata è

$$\int_0^1 \left[\left(x^2 - 1\right) - \left(x^3 + x - 2\right)\right] dx = \int_0^1 \left(-x^3 + x^2 - x + 1\right) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{12}$$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\int_0^1 \frac{ln(x)}{x}\,dx$. L'integrale non ha significato (nei paragrafi successivi tratteremo questo tipo di integrali) perché la funzione integranda non è definita per $x = 0$.
Invece $\int_1^2 \frac{ln(x)}{x}\,dx$ ha significato e si ha: $\int_1^2 \frac{ln(x)}{x}\,dx = \left[\frac{ln^2(x)}{2}\right]_1^2 = \frac{ln^2(2)}{2}$.

Dire quale dei seguenti integrali sono definiti, giustificando la risposta

Livello 1

1. $\int_{-1}^{1}\sqrt{x}\,dx$ [Sì] $\quad \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ [No] $\quad \int_{-1}^{1} ln(|x|)\,dx$ [No]

2. $\int_{-2}^{-1} sin(x)dx$ [Sì] $\quad \int_{1}^{2} sin^{-1}(x)dx$ [No] $\quad \int_{10}^{11} tan^{-1}(x)dx$ [No]

3. $\int_{0}^{2} tan(x)dx$ [No] $\quad \int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$ [Sì] $\quad \int_{-1}^{1} x\cdot cot(x)dx$ [No]

Calcolare i seguenti integrali definiti

Livello 1

4. $\int_{1}^{2}\left(e^{x}-\frac{1}{x^{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}\right)dx$ $\left[e^{2}-e+3\cdot\sqrt[3]{2}-\frac{7}{2}\right]$ $\quad \int_{0}^{\pi/2}\left(sin(x)+cos(x)\right)dx$ [2]

5. $\int_{-1}^{1}(x+2)^{3}\,dx$ [20] $\quad \int_{0}^{2}\left(x^{2}+1\right)^{2}dx$ [206/15] $\quad \int_{0}^{3}\frac{x^{2}+x+1}{x+1}dx$ [$ln(4)$ + 9/2]

6. $\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{x^{2}-1}{x^{2}+1}dx$ $\left[2\cdot tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}-1\right]$ $\quad \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-x}{\sqrt{x}}dx$ $\left[-\frac{2\cdot\sqrt[6]{2}}{5}+\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{31}{30}\right]$

7. $\int_{-2}^{-1}\frac{3x^{3}+2x^{2}-x}{x}dx$ [3] $\quad \int_{\pi/3}^{\pi/4}\frac{sin(2x)}{cos(x)}dx$ $\left[1-\sqrt{2}\right]$ $\quad \int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{cos(2x)}{sin^{2}(x)}dx$ [1 – π/2]

8. $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{cos(x)-cos(5x)}{sin(2x)}dx$ [2/3] $\quad \int_{0}^{\pi/2}\frac{sin(x)-cos(x)}{sin(x)+cos(x)}dx$ [0]

9. $\int_{0}^{1}\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}dx$ $\left[ln\left(\frac{e^{2}+1}{2}\right)-1\right]$ $\quad \int_{-1}^{1}\frac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}}{e^{x}}dx$ $\left[\frac{e^{3}}{3}-e+\frac{1}{e}-\frac{1}{3e^{3}}\right]$

10. $\int_{0}^{1}\frac{2^{x}+4^{-x}}{2^{x}}dx$ $\left[\frac{7}{24\cdot ln(2)}+1\right]$ $\quad \int_{-1}^{1}\frac{x^{4}+x^{2}-1}{x^{2}+1}dx$ [2/3 – π/2]

11. $\int_{-2}^{-1}\left(x^{3}-1\right)^{4}\cdot x^{2}\,dx$ [5917/15] $\quad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} sin^{4}(x)\cdot cos(x)\;dx$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{20}\right]$

12. $\int_{1}^{2}\sqrt{x^{2}-x}\cdot(2x-1)\;dx$ $\left[\frac{4\cdot\sqrt{2}}{3}\right]$ $\quad \int_{0}^{\pi} x^{3}\cdot sin\left(x^{4}\right)dx$ $\left[\frac{1-cos\left(\pi^{4}\right)}{4}\right]$

13. $\int_{-1}^{1} e^{2x}\cdot\left(e^{3x}-1\right)dx$ $\left[\frac{e^{5}}{5}-\frac{e^{2}}{2}+\frac{1}{2e^{2}}-\frac{1}{5e^{5}}\right]$ $\quad \int_{-\sqrt{3}}^{1}\frac{tan^{-1}(x)}{1+x^{2}}dx$ [$-\pi^2/18$]

14. $\int_{-\pi/4}^{-\pi/6}\left[sin(x)+cos(x)\right]\cdot csc(x)dx$ $\left[\frac{\pi-6\cdot ln(2)}{12}\right]$ $\quad \int_{-1/2}^{1/2}\frac{x}{\sqrt{1-x^{2}}}dx$ [0]

15. $\int_{-\sqrt{3}}^{0}\frac{x^{2}-2}{x^{2}+1}\;dx$ $\left[-\frac{6\cdot\sqrt{3}}{5}\right]$ $\quad \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\frac{\left[sin^{-1}(x)\right]^{2}}{\sqrt{1-x^{2}}}\;dx$ [$35\pi^3/5184$] $\quad \int_{1}^{e}\frac{e^{ln(x)+1}}{x}dx$ [$e^2 - e$]

16. $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^{2}+12x+36}\;dx$ [1/42] $\quad \int_{2}^{3}\frac{4x}{x^{6}-3x^{4}+3x^{2}-1}\;dx$ [55/576]

17. $\int_{e}^{e^{2}}\frac{1}{x\cdot ln(x^{3})}dx$ [1/3 ln(2)] $\quad \int_{-1}^{1} x\cdot\sqrt{x^{2}-1}\,dx$ [0] $\quad \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^{3}\cdot\sqrt[5]{x^{4}+1}\,dx$ [0] $\quad \int_{\pi^{3}/27}^{\pi^{3}}\frac{cos\left(\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x^{2}}}dx$ $\left[-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right]$

18. $\int_{-1}^{0}\frac{x}{x^2+9}dx$ $\left[ln\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right]$ $\int_{e^{\pi/3}}^{e^{\pi/4}}\frac{sin\left[ln(x)\right]}{x}dx$ $\left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right]$ $\int_{-\pi/3}^{\pi/2} sin(x)\cdot e^{cos(x)}dx$ $\left[\sqrt{e}-1\right]$

Livello 2

19. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\cdot sin(x)\,dx$ [0] $\int_{0}^{\pi} e^x\cdot cos(x)\,dx$ $\left[-\frac{e^{\pi}+1}{2}\right]$ $\int_{-1}^{1} x^2\cdot e^x dx$ $\left[e-\frac{5}{e}\right]$

20. $\int_{-1/2}^{\sqrt{3}/2} x\cdot sin^{-1}(x)\,dx$ $\left[\frac{\pi+6\cdot\sqrt{3}}{48}\right]$ $\int_{1}^{ln(2)} x\cdot e^{2x}dx$ $\left[\frac{8\cdot ln(2)-e^2-4}{4}\right]$ $\int_{1/e}^{e} ln(x)\,dx$ $\left[\frac{2}{e}\right]$

21. $\int_{-\sqrt{3}/2}^{1} sin^{-1}(x)\,dx$ $\left[\pi\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}\right]$ $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}/3} tan^{-1}(x)\;dx$ $\left[\frac{9\cdot ln(3)-5\cdot\sqrt{3}\cdot\pi}{18}\right]$

22. $\int_{0}^{\pi/2} e^x\cdot sin(x)\;dx$ $\left[\frac{e^{\pi/2}+1}{2}\right]$ $\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{ln(x)}{x^2}dx$ $\left[\frac{3\cdot\sqrt{e}-4}{2e}\right]$ $\int_{1}^{\sqrt{e}} ln\left(x^2\right)dx$ $\left[2-\sqrt{e}\right]$

23. $\int_{0}^{1}\frac{x}{x^2-5x+6}dx$ [ln(32/27)] $\int_{0}^{1}\frac{x^2+1}{x^2-x-2}dx$ $\left[\frac{3-7\cdot ln(2)}{3}\right]$ $\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{x^2-7x+10}dx$ [ln(4/3)]

24. $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x\cdot(x-1)^2}dx$ [ln(3/4) + 1/6] $\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2\cdot(x+1)}dx$ [ln(3/4) + ½]

Usando il metodo di sostituzione calcolare i seguenti integrali definiti

Livello 2

25. $\int_{0}^{\pi/3}\frac{dx}{5+4\cdot cos(x)}$ (Sugg. Effettuare la sostituzione $u = tan\ x$) [π/18]

26. $\int_{0}^{1}(x-1)\cdot\sqrt{x+1}\,dx$ $\left[\frac{14-16\cdot\sqrt{2}}{15}\right]$ $\int_{1}^{2} x^2\cdot\sqrt{x-1}\,dx$ [84/105]

27. $\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}dx$ $\left[2\cdot\sqrt{2}\cdot ln\left(\sqrt{2}-1\right)+2\right]$ $\int_{0}^{1}\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}dx$ [ln(16) – 3]

28. $\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$ [ln(9) – 7/4] $\int_{0}^{1}\frac{x^3}{\sqrt{x+1}}dx$ $\left[\frac{32-18\cdot\sqrt{2}}{35}\right]$

29. $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$ che cosa rappresenta l'integrale? [9π/2; l'area di un semicerchio di raggio 3]

30. $\int_{0}^{1}\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$ [3π/2 – ln(9) – 279/140] $\int_{0}^{\pi/2}\frac{sin(x)}{\sqrt{1+cos^2(x)}}dx$ $\left[ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$

31. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{sin^3(x)}{sin^3(x)+cos^3(x)}\;dx$ [π/4] $\int_{0}^{\pi} sin(n\cdot x)\;dx$ [0 se n pari, 2/n se n dispari]

Livello 3

32. Se una funzione $f(x)$ pari è continua in [– a; a], quanto vale $\int_{-a}^{a} f(x)\;dx$? $\left[2\cdot\int_{0}^{a} f(x)\;dx\right]$

33. Se una funzione $f(x)$ dispari è continua in [– a; a], quanto vale $\int_{-a}^{a} f(x)\;dx$? [0]

34. Sapendo che $f(x)$ è integrabile in [0, 4] e $\int_{0}^{4} f(x)\;dx=10$, calcolare $\int_{0}^{2} f(2x)\;dx$. [5]

35. Sapendo che $f(x)$ è integrabile in [0, 4] e $\int_3^6 f(x)\,dx = 6$, calcolare $\int_1^2 f(3x)\,dx$. [2]

Applicare, se possibile, il teorema della media integrale alle seguenti funzioni, nell'intervallo indicato, determinando l'ascissa del valore medio.

Livello 1

36. $f(x) = x^3 + 1$, $x \in [0; 1]$ $\left[c = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right]$; $f(x) = x^2 - x + 1$, $x \in [-1; 1]$ $\left[c = \frac{3-\sqrt{21}}{6}\right]$

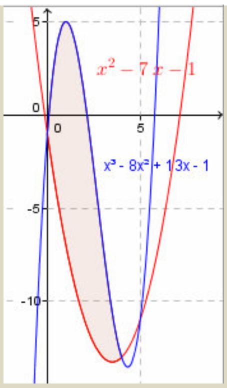
37. $f(x) = \frac{x+1}{x}, x \in [0;1]$ [Non applicabile] ; $f(x) = \frac{x+1}{x}, x \in [1;3]$ $\left[c = \frac{2}{ln(3)}\right]$

38. $f(x) = ln(x)$, $x \in [1; e]$ $\left[c = \sqrt[e-1]{e}\right]$; $f(x) = sin^{-1}(x)$, $x \in [0; 1]$ $[c = cos(1)]$

39. $f(x) = tan(x)$, $x \in [0; 2]$ [Non applicabile] ; $f(x) = cos(x)$, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ $\left[c = cos^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)\right]$

40. $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $x \in [-1; 1]$ [Non applicabile] ; $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $x \in [¼ ; ½]$ $[¼ \le c \le ½]$

Lavoriamo insieme



In figura abbiamo rappresentato le funzioni $f(x) = x^2 - 7x - 1$, $g(x) = x^3 - 8x^2 + 13x - 1$

Vogliamo calcolare l'area colorata che essi racchiudono. La figura suggerisce che le intersezioni abbiano ascisse $x = 0$ e $x = 4$. Ce ne assicuriamo sostituendo e verificando che per tali valori le funzioni assumono lo stesso valore (lo lasciamo per esercizio). Adesso come possiamo calcolare l'area?

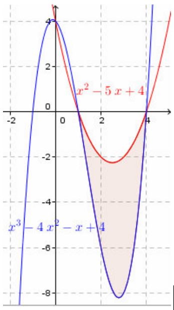
$\int_0^4 \left(x^3 - 8x^2 + 13x - 1\right) dx$ calcola l'area della parte di curva di [0; 2] e l'opposto dell'area compresa tra la curva blu e l'asse x in [2; 4]. Invece $\int_0^4 \left(x^2 - 7x - 1\right) dx$ calcola l'opposto dell'area compresa tra la curva rossa e l'asse x in [0; 4]. Quindi il modo corretto di calcolare è:

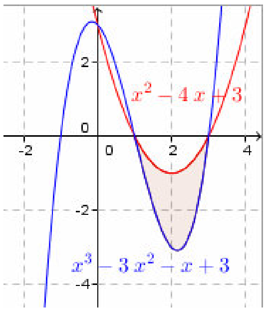
$$\int_0^4 \left(x^3 - 8x^2 + 13x - 1\right) - \int_0^4 \left(x^2 - 7x - 1\right) dx\ dx = \int_0^4 \left(x^3 - 9x^2 + 20x\right) dx =$$

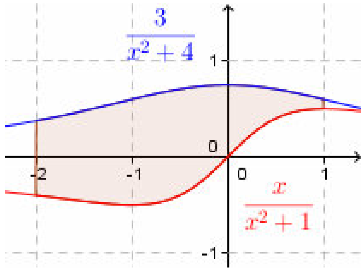
$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{\cancel{9}^{3} x^3}{\cancel{3}} + \frac{\cancel{20}^{10} x^2}{\cancel{2}}\right]_0^4 = 64 - 192 + 160 = 32$$

Livello 1

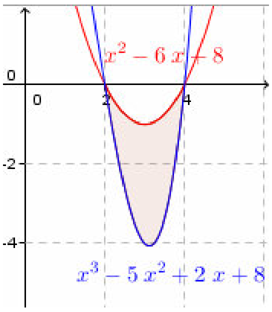
Calcolare le aree in figura, sapendo che le curve hanno le equazioni scritte accanto

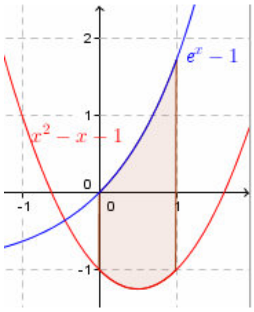
41. 

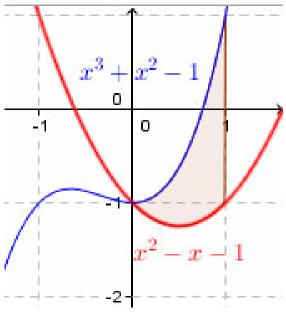
[32/3] 

[37/12] 

$\left[\frac{3}{2}\cdot tan^{-1}(3)+ln\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\right]$

42. 

[4] 

[*e* – 5/6] 

[¾]

Livello 2

43. Calcolare l'area della regione delimitata dal grafico della funzione $y=\sqrt{x-1}$, dalla retta x = 10 e dall'asse x. [18]

44. Calcolare l'area della regione R delimitata dal grafico della funzione $y=\frac{20}{1+x^2}$, dalla retta y = 2 e dai primi due quadranti. [≈ 37,96]

45. Calcolare l'area della regione R delimitata dal grafico della funzione $y=2\cdot\sqrt{x}$, dalla retta y = 6 e dall'asse y. $\left[38-8\cdot\sqrt{6}\right]$

46. Determinare l'area delimitata dalle funzioni $f(x)=2x\cdot(1-x); g(x)=3\cdot(x-1)\cdot\sqrt{x}$ in [0; 1]. [17/15]

47. Determinare l'area R delimitata dalle funzioni $f(x)=1+sin(2x); g(x)=e^{x/2}$ nel primo quadrante. [≈0,429]

Lavoriamo insieme

Il tasso con cui il pubblico entra in un teatro segue la legge $y(t)=1380t^2-675t^3, 0\le t\le 2$, in cui t indica il tempo dall'apertura che dura 2 ore. Vogliamo sapere quanta gente c'è al teatro all'inizio dello spettacolo.
Tutta la gente entrata è la somma di quanta ne entra nel generico instante *t*, quindi è

$$\int_0^2\left(1380t^2-675t^3\right)dt=\left[\cancel{1380}^{460}\cdot\frac{t^3}{\cancel{3}}-675\cdot\frac{t^4}{4}\right]_0^2=460\cdot 8-675\cdot\frac{16}{4}=980$$

Ora vogliamo trovare dopo quanto tempo dall'apertura il tasso di ingresso è massimo.
Dobbiamo risolvere $y'(t)=0\to 2\cdot 1380t-3\cdot 675t^2=0\to t=0\vee t=\frac{184}{135}\approx 1,262$. Ovviamente t = 0 è un minimo relativo, anzi assoluto, mentre l'altro valore fornisce il massimo.

Livello 2

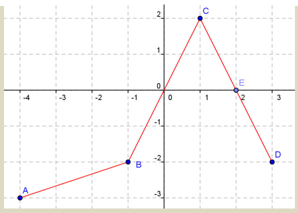
48. Nella tabella seguente mostriamo la temperatura di un filo metallico risaldato a un suo estremo a seconda dalla distanza dall'estremo. Per determinare la temperatura media della temperatura possiamo usare il metodo della somma dei plurirettangoli con i quattro intervalli indicati nella tabella. [≈ 75,69°C]

Distanza (*cm*)	0	1	5	6	8
Temperatura (°C)	100	93	70	62	55

49. CAS Un serbatoio di un piccolo condominio contiene 3000 litri di acqua. Ogni giorno esso riceve acqua da mezzanotte a mezzogiorno secondo la legge $f(t) = 125 \cdot \sqrt{t} \cdot sin^2\left(\frac{t}{6}\right)$; mentre i condomini prelevano acqua durante tutto il giorno secondo la legge $g(t) = 235 \cdot sin^2\left(\frac{t}{3}\right)$ ogni ora. Quanta acqua vi sarà nel serbatoio a mezzogiorno? Il serbatoio si svuoterà prima della mezzanotte? Se la risposta è positiva, a che ora si svuoterà? Se la risposta è negativa, per quanto tempo, dopo mezzogiorno, si può evitare di immettere acqua nel serbatoio senza che esso si svuoti, rimanendo inalterata la legge $g(t)$?

[≈ 4249; no; ≈ 37,7]

Lavoriamo insieme

In figura vi è il grafico di una funzione $f(x)$. 

Consideriamo la funzione $g(x) = \int_{-4}^{x} f(t)\,dt$. Vogliamo determinare, se esistono, $g(-1)$, $g'(-1)$ e $g''(-1)$. Si ha: $g(-1) = \int_{-4}^{-1} f(t)\,dt = -\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 = -\frac{15}{2}$ (è l'opposto dell'area del trapezio ABB_xA_x, con A_x e B_x proiezioni di A e B sull'asse x). $g'(-1) = f(-1) = -2$; $g''(-1)$ non esiste perché f non è derivabile in $x = -1$, dato che vi è un punto angoloso.

Ora vogliamo trovare le ascisse dei punti di flesso di g in (–4, 3). La funzione f cambia crescenza per $x = 1$, quindi g' cambia segno per $x = 1$, che è un punto di flesso. Adesso vogliamo determinare gli zeri della funzione $h(x) = \int_{x}^{3} f(t)\,dt$ in [–4; 3]. Sicuramente si ha $h(3) = 0$. Poi, perché $h(x) = 0$, gli intervalli devono contenere valori in cui la f è >0, cioè parte di [0; 2]. Ora il triangolo BCD è isoscele di base BD e OE divide l'area in due parti uguali, quindi sicuramente $h(-1) = 0$. E per lo stesso motivo anche $h(1) = 0$.

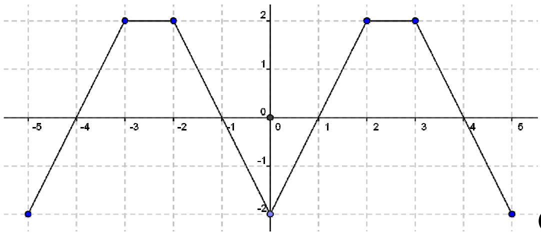
Infine vogliamo determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione h. Abbiamo $h'(x) = -f(x)$, quindi $h'(x) > 0 \rightarrow f(x) < 0 \rightarrow x \in\ ]-3; 0[\ \cup\ ]2; 3[$. $h'(x) < 0 \rightarrow f(x) > 0 \rightarrow x \in\ ]0; 2[$.

Livello 3

50. Consideriamo la funzione $y = x^n$, con $n > 1$. Calcolare l'area delimitata dalla funzione e dall'asse x per $0 \le x \le 1$, al variare di n. Fare lo stesso per l'area del triangolo determinato dalla retta tangente al grafico della funzione nel punto (1;1), dall'asse x e da $x = 1$. Infine calcolare l'area ottenuta come sottrazione delle precedenti due e determinare per quale n essa è massima e il valore di tale area massima.

$$\left[\frac{1}{n+1}; \frac{1}{2n}; \left(1+\sqrt{2}; \frac{3-2\cdot\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

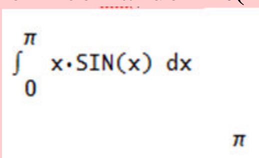
51. Consideriamo il grafico di una funzione $f(x)$, formata dai segmenti AB, BC e DE, con $A \equiv (-5; -2)$, $B \equiv (-3;2)$, $C \equiv (0;1)$, $D \equiv (2;1)$, $E \equiv (4;-1)$ e dal semicerchio di estremi CD tangente all'asse x. Consideriamo la funzione $g(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\,dt$. Determinare $g(0)$ e $g'(0)$. Trovare le ascisse dei punti di massimo relativo di g in [–5; 4]. Fare lo stesso per i flessi. [$g(0) = 9/2$; $g'(0) = 1$; $x_M = -3; 1; 2$]

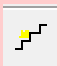
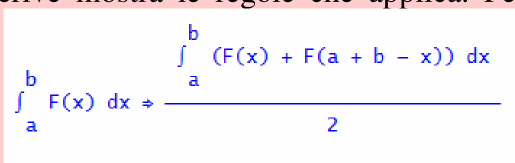


52. In figura vi è il grafico di una funzione $f(x)$. Consideriamo $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Determinare a) $g(4)$, $g'(4)$, $g''(4)$. [3; 0; –2] b) Per $x = 1$, $g(x)$ ha un estremo relativo? Giustificare la risposta. [minimo relativo] c) Supposto che $f(x)$ sia una funzione periodica di periodo 5, di cui mostriamo due periodi, sapendo che $g(5) = 2$, determinare $g(10)$ e scrivere l'equazione della tangente al grafico di g per $x = 108$. [$y = 2x - 172$]

53. La marea toglie sabbia alla costa secondo la seguente legge: $f(t) = 2 + 5 \cdot sin\left(\frac{4\pi}{25} \cdot t\right)$, il comune ha perciò deciso di reintegrare la sabbia persa aggiungendola con una speciale pompa secondo la legge $g(t) = \frac{15t}{1+3t}$. Entrambe le funzioni calcolano metri cubi di sabbia per ore. Sappiamo che all'inizio della nostra osservazione in una zona di spiaggia vi sono 2500 metri cubi di sabbia. Vogliamo sapere a) Quanti metri cubi di sabbia vengono rimossi dalla marea nelle prime 6 ore; [≈ 31815] b) il tasso di variazione della quantità di sabbia sulla spiaggia dopo 4 ore; [$\approx -1{,}9\ m^3/h$] c) dopo quante ore, nelle prime 6, la quantità di sabbia sulla spiaggia sarà al minimo? E quanto sarà questo minimo? [≈ 5,12 ore; ≈ 2492,37 m^3]

L'angolo di Derive

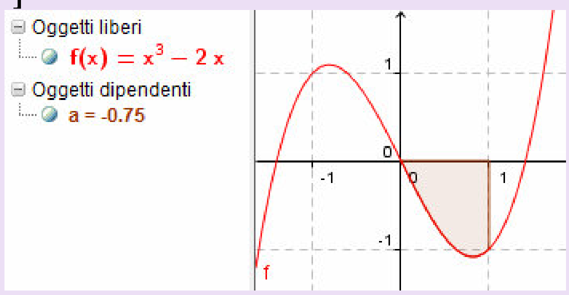
In derive abbiamo il comando **Int(funzione, variabile, estremo_inf, estremo_sup)** per calcolare gli integrali definiti. 

Cliccando sull'icona  Derive mostra le regole che applica. Per esempio cliccando sul precedente integrale il risultato è il seguente: 

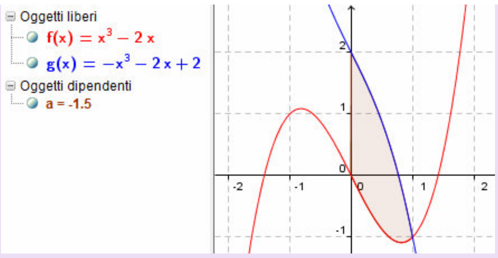
.

L'angolo di Geogebra

Geogebra ha i comandi predefiniti sia per il calcolo dell'integrale
Integrale[<Funzione>, <Valore x iniziale>, <Valore x finale>]

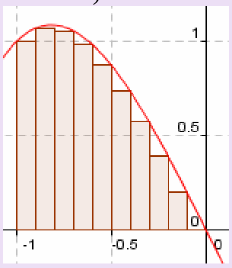


In questo caso disegna l'area e calcola l'integrale definito. Come si vede il valore è negativo.
Possiamo calcolare anche l'integrale fra due funzioni, con il comando
IntegraleTra[<Funzione>, <Funzione>, <Valore x iniziale>, <Valore x finale>]

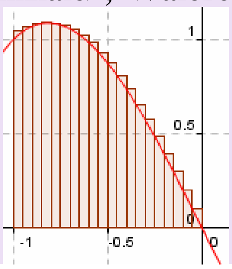


Vi sono anche i comandi per rappresentare i plurirettangoli e calcolare le somme inferiore e superiore.

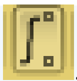
SommaInferiore[<Funzione>, <Valore x iniziale>, <Valore x finale>,<Numero di rettangoli>]



SommaSuperiore[<Funzione>, <Valore x iniziale>, <Valore x finale>,<Numero di rettangoli>]



L'angolo di Microsoft Mathematics

Il comando per l'integrazione definita è il pulsante . Ecco un esempio

Input	$\int_0^1 \tan^{-1}(x)\,dx$
Output	$\frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$
Output decimale	0.4388245731175

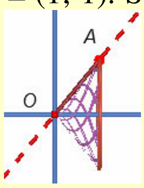
Volume di alcuni solidi di rotazione e lunghezza di alcune curve piane

Il problema

Possiamo utilizzare gli integrali per calcolare il volume dei solidi?

Il problema posto ha soluzione in alcuni casi.

Esempio 8

Consideriamo la retta $y = x$ e il segmento da essa individuato dai suoi punti $O \equiv (0; 0)$ e $A \equiv (1; 1)$. Se facciamo ruotare questo segmento attorno all'asse delle ascisse determiniamo il cono in figura. 

Questo cono ha altezza lunga 1 (l'ascissa di A) e raggio anch'esso lungo 1 (l'ordinata di A). Il volume lo possiamo determinare con il metodo degli indivisibili di Cavalieri, che abbiamo studiato nel Capitolo 6 Unità 4, volume 2. Infatti, la sezione del cono con un piano parallelo alla base fornisce un cerchio di raggio pari all'ordinata del corrispondente punto sulla retta. Quindi detta x l'ascissa generica, con $0 < x < 1$, l'ordinata sarà anch'essa uguale a x e perciò l'area del generico cerchio sarà pari a $\pi \cdot x^2$. Poiché il volume deve essere la somma delle aree di questi infiniti cerchi e poiché la somma di infiniti elementi abbiamo visto essere l'integrale, possiamo dire che il volume cercato è dato da $\int_0^1 \pi \cdot x^2\, dx = \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$. E in effetti noi sappiamo che il volume di un cono di raggio r e altezza h è $\pi \cdot \frac{r^2 \cdot h}{3}$. In questo caso $r = h = 1$.

Quanto visto nell'esempio precedente si può generalizzare per il volume generato da una funzione continua nella sua rotazione completa attorno all'asse delle ascisse.

Teorema 6

Il volume del solido ottenuto dalla rotazione della funzione continua $y = f(x)$ attorno all'asse delle ascisse, nell'intervallo $[a; b]$ è $\pi \cdot \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$.

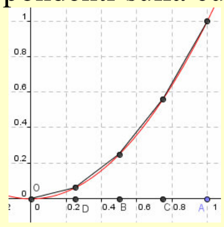
Dimostrazione per esercizio sulla falsariga dell'Esempio 8.

Il problema

Possiamo utilizzare gli integrali per calcolare la lunghezza di alcuni tratti di curve?

Anche in questo caso il problema posto ha soluzione sotto alcune ipotesi.

Esempio 9

Consideriamo l'arco della parabola $y = x^2$, di estremi i punti $O \equiv (0; 0)$ e $A \equiv (1; 1)$. Per calcolare la sua lunghezza possiamo effettuare un procedimento simile a quello del calcolo delle aree, ossia dividiamo il segmento $[0; 1]$ in un certo numero di parti uguali ed uniamo i punti corrispondenti sulla curva, ottenendo una poligonale che ha un valore certamente minore della lunghezza cercata. 

. Questa poligonale è lunga $\sqrt{\left(\frac{1}{4}-0\right)^2+\left(\frac{1}{16}-0\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{16}-\frac{1}{4}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2+\left(1-\frac{9}{16}\right)^2} \approx 1{,}47$.

Ovviamente se dividiamo l'intervallo in un maggior numero di parti otterremo un valore ancora migliore.

Generalizzando il risultato dell'esempio possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 7

Data la funzione continua e derivabile $y = f(x)$ in $[a; b]$, la lunghezza del suo tratto compreso tra le ascisse $x = a$ e $x = b > a$, è $\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\, dx$.

Dimostrazione

Dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti uguali, ognuno di ampiezza $\frac{b-a}{n}$, il generico segmento di estremi $[x_{i-1}; x_i]$ individua sulla funzione i punti di coordinate $(x_{i-1}; f(x_{i-1}))$, $(x_i; f(x_i))$, la cui lunghezza è perciò $\sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left[f(x_i) - f(x_{i-1})\right]^2}$. Quindi la lunghezza della poligonale è data da

$\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{\left(x_i-x_{i-1}\right)^2+\left[f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)\right]^2}$, con $x_0 = a$ e $x_n = b$. Facendo tendere n all'infinito otterremo la lunghezza della curva: $\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{\left(x_i-x_{i-1}\right)^2+\left[f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)\right]^2}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{1+\left[\frac{f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)}{\left(x_i-x_{i-1}\right)}\right]^2}\cdot\left(x_i-x_{i-1}\right)\right\}$.

Osserviamo che all'interno del radicando il secondo addendo è il rapporto incrementale della funzione $f(x)$, dato che al tendere di n all'infinito, $(x_i - x_{i-1})$ tende a zero. Perciò passando al limite otteniamo la derivata prima della funzione, la sommatoria tende all'integrale e l'ampiezza dell'intervallo tende a zero, cioè all'infinitesimo dx. Da cui la tesi.

Applichiamo il teorema al precedente esempio.

Esempio 10

L'arco della parabola $y = x^2$, di estremi i punti $O \equiv (0; 0)$ e $A \equiv (1; 1)$ misura $\int_0^1\sqrt{1+\left(2x\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx$.

Per calcolare questo integrale usiamo la sostituzione $x=\frac{e^t-e^{-t}}{4}\Rightarrow dx=\frac{e^t+e^{-t}}{4}dt\,x$. Infatti in tal modo otteniamo: $\sqrt{1+4x^2}=\sqrt{1+\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{4}}=\sqrt{\frac{2+e^{2t}+e^{-2t}}{4}}=\sqrt{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$.

Per determinare cosa diventano gli estremi, dobbiamo ricavare t:

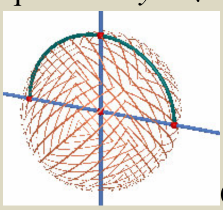
$x=\frac{e^t-e^{-t}}{4}=\frac{e^t-\frac{1}{e^t}}{4}=\frac{e^{2t}-1}{4\cdot e^t}\Rightarrow e^{2t}-4\cdot x\cdot e^t-1=0\Rightarrow e^t=2x+\sqrt{4x^2+1}\Rightarrow t=ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$, quindi gli estremi sono 0 e $ln\left(2+\sqrt{5}\right)$. L'integrale è perciò adesso:

$$\int_0^{ln\left(2+\sqrt{5}\right)}\frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{4}dt=\int_0^{ln\left(2+\sqrt{5}\right)}\frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{8}dt=\left[\frac{e^{2t}}{16}-\frac{e^{-2t}}{16}+\frac{1}{4}t\right]_0^{ln\left(2+\sqrt{5}\right)}=$$
$$=\frac{4+2\cdot\sqrt{5}}{16}-\frac{1}{16\cdot\left(4+2\cdot\sqrt{5}\right)}+\frac{ln\left(2+\sqrt{5}\right)}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{ln\left(2+\sqrt{5}\right)+2\cdot\sqrt{5}}{4}\approx 1,48.$$

Sottolineiamo il fatto che in generale si ottengono integrali di difficile calcolo (spesso non integrabili elementarmente), anche per curve di equazione *semplice*.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo far vedere che il volume di una sfera di raggio 1 è $4/3\pi$. Una sfera può ottenersi facendo ruotare la semicirconferenza di equazione $y=\sqrt{1-x^2}$, attorno all'asse x, per la lunghezza del suo diametro che ha estremi $(-1; 0)$ e $(1; 0)$.  Quindi il volume misura proprio

$$\pi \cdot \int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx = \pi \cdot \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \pi \cdot \left[1-\frac{1}{3}-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{4}{3}\pi$$

Livello 1

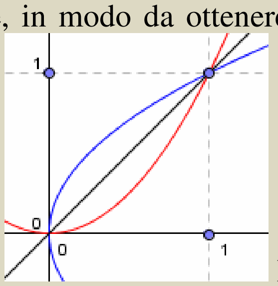
1. Usando il calcolo integrale come possiamo calcolare il volume di un cilindro retto?
[Facendo ruotare un segmento parallelo all'asse delle ascisse lungo quanto l'altezza]
2. Usando il calcolo integrale calcolare il volume di un cilindro di raggio 1 e altezza 2. [2π]
3. Facendo ruotare un quarto di circonferenza di estremi (1; 0) e (0; 1) attorno all'asse x determinare il volume di una semisfera di raggio 1. [2/3π]
4. Usando il calcolo integrale come possiamo calcolare il volume di un cono retto?
[Facendo ruotare un segmento passante per l'origine lungo quanto l'apotema e di pendenza che determina l'angolo di apertura del cono]
5. Usando il calcolo integrale calcolare il volume di un cono retto di raggio 1 e altezza 2. [2/3π]
6. Usando il calcolo integrale come possiamo calcolare il volume di un tronco di cono retto?
[Facendo ruotare un segmento non passante per l'origine e non parallelo agli assi, lungo quanto l'apotema]
7. Usando il calcolo integrale calcolare il volume di un tronco di cono di raggi di base lunghi 1 e 2 e altezza 2. [14/3π]

Determinare il volume ottenuto facendo ruotare le seguenti funzioni attorno all'asse delle ascisse, nell'intervallo indicato

8.	$y = sin(2x), x \in [0; \pi/2]$	$[\pi^2/4]$	$y = x^2 + x, x \in [-1; 0]$	$[\pi/30]$
9.	$y=\sqrt{x}, x\in[0;1]$	$[\pi/2]$	$y=\frac{1}{\sqrt{x}}, x\in[1;2]$	$[\pi \cdot ln(2)]$
10.	$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, x\in\left[0;\sqrt{3}\right]$	$[\pi^2/3]$	$y = 1/x, x \in [1; e]$	$\left[\pi\cdot\frac{e-1}{e}\right]$
11.	$y = sin(x) + cos(x), x \in [0; \pi/2]$	$\left[\frac{\pi\cdot(\pi+2)}{2}\right]$	$y=\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}, x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$	$[\pi^2/6]$
12.	$y=\sqrt{\frac{x+1}{x}}, x\in[1;e]$	$[\pi e]$	$y=\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}, x\in\left[1;e^2\right]$	$\left[\pi\cdot\frac{e^4+3}{2}\right]$
13.	$y=\sqrt{ln(x)}, x\in[1;e]$	$[\pi]$	$y = ln(x), x \in [1; e]$	$[\pi \cdot (e-2)]$
14.	$y=\sqrt{x}\cdot e^x, x\in[0;1]$	$\left[\pi\cdot\frac{e^2+1}{4}\right]$	$y=\sqrt{x\cdot sin(x)}, x\in[0;\pi]$	$[\pi^2]$

Lavoriamo insieme

I risultati enunciati valgono solo per rotazioni attorno all'asse delle ascisse, come possiamo allora calcolare il volume del solido generato dalla parabola $y = x^2$ che ruota attorno all'asse delle y, per $0 \le y \le 1$? Basta effettuare una simmetria rispetto alla prima bisettrice, in modo da ottenere una curva che ruotando attorno all'asse delle ascisse genera un volume equivalente.



In questo modo la parabola $y = x^2$, diventa la parabola $x = y^2$, che per essere una funzione deve essere considerata come $y=\sqrt{x}, x\in[0,1]$. Pertanto il volume cercato sarà $\pi\cdot\int_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\cdot\int_0^1 x\, dx = \pi\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

Calcolare i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare le seguenti curve attorno all'asse delle ordinate

Livello 2

15. $y = x^2, x \in [0; 1]$ [π/2] $y = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in [1; 2]$ $\left[\pi \cdot \frac{4-\sqrt{2}}{12}\right]$

16. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, x \in [0;1]$ $\left[\pi \cdot \frac{4-3\cdot\sqrt{2}}{2}\right]$ $y = e^x, x \in [0; 1]$ $[\pi \cdot (e-2)]$

17. $y = sin^{-1}\left(x^2\right), x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \pi\right]$ $y = \frac{1}{x^4}, x \in [0;1]$ [2π]

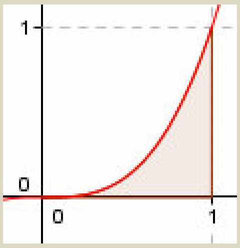
18. $y = ln\left(\sqrt{x}\right), x \in \left[e; e^2\right]$ $\left[\pi \cdot \frac{e^2 \cdot \left(e^2-1\right)}{4}\right]$ $y = e^{x^2}, x \in [0;1]$ [π]

Livello 3

19. $y = sin(x), x \in [0; \pi/2]$ $\left[\pi \cdot \frac{\pi^2-8}{4}\right]$ $y = x \cdot \sqrt{x} + 1, x \in [0;1]$ $\left[\pi \cdot \frac{6\cdot\sqrt[3]{4}-3}{5}\right]$

20. Data la regione delimitata dal grafico della funzione $y = \sqrt{x-1}$, dalla retta $x = 10$ e dall'asse x, determinare il volume del solido generato dalla rotazione della detta regione attorno la retta $y = 3$ e poi attorno alla retta $x = 10$. [135/2π; 648/5π]

Lavoriamo insieme

La regione R delimitata dal grafico della funzione $y = x^3$, dalla retta $x = 1$ e dall'asse delle ascisse è base di un solido le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono quadrati, determinare il volume di tale solido. La regione è quella mostrata in figura. 

Il generico quadrato ha quindi lato che misura quanto l'ordinata del generico punto sulla funzione, cioè x^3, perciò l'area del generico quadrato è $(x^3)^2 = x^6$.

Perciò usando il consueto metodo degli indivisibili, il volume cercato sarà $\int_0^1 x^6 \, dx = \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{7}$.

Livello 2

21. Calcolare il volume del solido avente per base la regione intersezione della parabola $y = x^2 - 5x + 6$, con l'asse delle ascisse e le cui sezioni perpendicolari all'asse delle x sono quadrati. [1/30]
22. Calcolare il volume del solido avente per base la regione intersezione della parabola $y = x^2 - 7x + 10$, con l'asse delle ascisse e le cui sezioni perpendicolari all'asse delle x sono triangoli equilateri. $\left[\frac{81}{40} \cdot \sqrt{3}\right]$
23. Calcolare il volume del solido avente per base una delle regioni intersezioni della sinusoide con l'asse delle ascisse e le cui sezioni perpendicolari all'asse delle x sono rettangoli le cui dimensioni sono una doppia dell'altra. [π]
24. Calcolare il volume del solido avente per base la regione intersezione della curva $y = ln(x)$, con l'asse delle ascisse e la retta $x = 2$, le cui sezioni perpendicolari all'asse delle x sono trapezi rettangoli, la cui base maggiore poggia sul piano Oxy, mentre base minore e altezza sono lunghe metà della base maggiore. $[\frac{3}{4} \cdot (ln^2(2) - ln(4) + 3)]$

25. Calcolare il volume del solido avente per base la regione intersezione delle curve $y = e^x$, $y = e^{-x}$, dall'asse y e dalla retta $x = 1$, le cui sezioni perpendicolari all'asse delle x sono quadrati. [$\frac{1}{2} \cdot (e^2 - e^{-2} - 4)$]

26. Calcolare il volume del solido avente per base una delle regioni intersezioni delle curve $y = sin(x)$, $y = cos(x)$, le cui sezioni perpendicolari all'asse delle x sono triangoli rettangoli i cui cateti sono nel rapporto 2/3. [$\pi/3$]

27. Data la regione R delimitata dal grafico della funzione $y = \frac{20}{1+x^2}$, dalla retta $y = 2$ e dai primi due quadranti, determinare il volume del solido generato dalla rotazione della detta regione attorno all'asse x. La regione R è base di un solido le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi, determinare il volume di tale solido. [≈ 1871,19; ≈ 174,27]

28. Data la regione R delimitata dal grafico della funzione $y = 2 \cdot \sqrt{x}$, dalla retta $y = 6$ e dall'asse y, determinare il volume del solido generato dalla rotazione della detta regione attorno alla retta $y = 7$. R è base di un solido le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse y sono rettangoli la cui altezza è il triplo della base, determinare il volume di tale solido. [90π; 1458/5]

29. Data la regione R delimitata dalle funzioni $f(x) = 2x \cdot (1 - x)$, $g(x) = 3 \cdot (x - 1)\sqrt{x}$ in [0; 1], determinare il volume del solido generato dalla detta area nella sua rotazione attorno alla retta $y = 2$. Consideriamo adesso la funzione $h(x) = x \cdot (1 - x)$, $0 \le x \le 1$. R si può considerare la base di un solido le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono quadrati. Determinare il volume del detto solido. [$103/20\pi$; 457/420]

30. Data la regione R delimitata dalle funzioni $f(x) = 1 + sin(2x)$, $g(x) = e^{x/2}$ nel primo quadrante, determinare il volume del solido generato dalla detta area nella sua rotazione attorno all'asse x. L'area R si può considerare la base di un solido le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi i cui diametri sono compresi tra le due funzioni. Determinare il volume del detto solido. [≈ 4,27; ≈ 0,078]

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare la lunghezza della curva $y = \sqrt{x}$ nell'intervallo [1/32; 1/12].

Dobbiamo calcolare $\int_{1/32}^{1/12} \sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)\right]^2}\, dx = \int_{1/32}^{1/12} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, dx = \int_{1/32}^{1/12} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx$. Applichiamo la sostituzione $1 + \frac{1}{4x} = t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t^2 - 1} \Rightarrow dx = \frac{-t}{2 \cdot \left(t^2 - 1\right)^2} dt$, ottenendo $\int_3^2 t \cdot \frac{-t}{2 \cdot \left(t^2 - 1\right)^2} dt$. Risolviamo per esempio con il metodo della scomposizione in fratti più semplici, ottenendo:

$$\frac{1}{2} \cdot \int_2^3 \frac{t^2}{\left(t^2 - 1\right)^2} dt = \left[\frac{t}{4 \cdot \left(t^2 - 1\right)} - \frac{1}{8} \cdot ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_2^3 = \frac{7}{96} + \frac{1}{8} \cdot ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0,12.$$

Livello 2

31. Usando il calcolo integrale calcolare la lunghezza del segmento di estremi $A \equiv (1; 2)$ e $B \equiv (3; 5)$. $\left[\sqrt{13}\right]$

32. Usando il calcolo integrale calcolare la lunghezza dell'arco di circonferenza di estremi $A \equiv (-3; 1)$ e $B \equiv (1; 3)$ e centro in $(0; 0)$. $\left[\frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \pi\right]$

33. Calcolare la lunghezza dell'arco di parabola $y = x^2$ in [–1; 1]. $\left[\frac{ln\left(5 + \sqrt{2}\right) + 2 \cdot \sqrt{5}}{2}\right]$

34. Calcolare la lunghezza dell'arco della curva $y = ln(x)$ in [1; 2]. $\left[ln\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{2}-1}{2}\right)+\sqrt{5}-\sqrt{2}\right]$

Livello 3

35. Usando il calcolo integrale calcolare la lunghezza del segmento di estremi $A \equiv (x_A; y_A)$ e $B \equiv (x_B; y_B)$. $\left[\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}\right]$

36. Usando il calcolo integrale calcolare la lunghezza dell'arco di circonferenza di estremi i punti di ascissa x_A e x_B, centro in (0; 0) e raggio 1, con $-1 \le x_A < x_B \le 1$. $[sin^{-1}(x_B) - sin^{-1}(x_A)]$

Integrali impropri e generalizzati

Il problema

Siamo in grado di calcolare l'area delimitata da una funzione in un intervallo in cui essa è continua, e se invece fosse discontinua? Il problema è sempre privo di significato?

Cominciamo con un esempio

Esempio 11

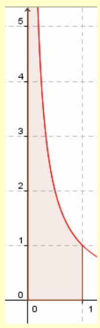
La funzione $y = 1/x$ è un' iperbole equilatera riferita ai propri assi, definita per $x \neq 0$, possiamo calcolare l'area da essa sottesa in ogni intervallo che non contiene l'origine. Così per esempio l'area delimitata dall'intervallo [2; 3] è $\int_2^3 \frac{1}{x}dx = \left[ln(x)\right]_2^3 = ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

In generale l'area delimitata dall'intervallo $[a; b]$ con $a > 0$ o $b < 0$ è $\int_a^b \frac{1}{x}dx = \left[ln(x)\right]_a^b = ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

Rimanendo immutata la procedura precedente cosa accadrebbe se uno degli estremi fosse 0, ossia il punto in cui la funzione non è definita?

Esempio 12

Si ha: $\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \left[ln(x)\right]_0^1 = ln(1) - ln(0) = ?$ Ossia non ha senso il calcolo del logaritmo con argomento nullo, quindi non ha senso neanche il calcolo dell'integrale e di conseguenza dell'area.



In effetti l'area dovrebbe essere delimitata dalla funzione e dal suo asintoto, quindi l'intuizione ci suggerisce che essa debba essere infinita. Allora per dare senso a questa intuizione potremmo definire il calcolo della precedente area come quello di un limite.

Esempio 13

Potremmo dire che $\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to 0^+}\left[ln(x)\right]_a^1 = ln(1) - \lim_{a\to 0^+} ln(a) = +\infty$.

Poniamo la seguente definizione.

Definizione 2

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a; b] \setminus \{x_0\}$, diciamo che $f(x)$ è **integrabile in senso generalizzato**

- **su $[x_0; b]$** se esiste finito $\lim_{c\to x_0^+}\int_c^b f(x)dx$
- **su $[a; x_0]$** se esiste finito $\lim_{c\to x_0^-}\int_a^c f(x)dx$
- **su $[a; b]$** se esistono finiti e sono uguali i seguenti limiti: $\lim_{c\to x_0^-}\int_a^c f(x)dx = \lim_{c\to x_0^+}\int_c^b f(x)dx$

Valgono i seguenti risultati che non dimostreremo

Teorema 8

Sia $f(x)$ continua in $[a; b]\setminus\{x_0\}$, allora se $|f(x)|$ è integrabile in senso generalizzato su $[a; b]$ anche $f(x)$ lo è.

Esempio 14

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ in [0; 1]. La funzione non è definita per $x = 0$, vediamo se è integrabile in senso generalizzato. Si ha: $\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 x^{-1/2}dx = \lim_{a\to 0^+}\left[2x^{1/2}\right]_a^1 = 2 - \lim_{a\to 0^+} 2\sqrt{a} = 2$. Quindi la funzione è integrabile in senso generalizzato. Per il teorema 8 anche $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ lo è.

Teorema 9

Siano $f(x)$ e $g(x)$ continue in $[a; b] \setminus \{x_0\}$, con $|f(x)| \le g(x)$ $\forall x \in [a; b] \setminus\{x_0\}$, allora se $g(x)$ è integrabile in senso generalizzato su $[a; b]$ lo sono anche $f(x)$ e $|f(x)|$.

Esempio 15

Poiché si ha $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}, \forall x \in (0;1]$ e poiché nell'esempio precedente abbiamo provato che $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile in senso generalizzato su [0; 1], possiamo dire per il teorema 9 che anche $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ è integrabile in senso generalizzato su [0; 1].

Dal precedente teorema si ottiene il seguente risultato che è spesso utile per determinare se una certa funzione è o no integrabile in senso generalizzato.

Corollario 1

Sia $f(x)$ continua in $[a; b]\setminus\{x_0\}$, e si abbia $|f(x)| \le K/|(x_0 - x)^h$, con $K > 0$ e $0 < h < 1$, allora $f(x)$ è integrabile in senso generalizzato su $[a; b]$.

Dimostrazione

Basta dimostrare che $K/|(x_0 - x)^h$, con $K > 0$ e $0 < h < 1$ è integrabile in senso generalizzato. abbiamo:

$\lim\limits_{c \to x_0^-} \int_a^c \frac{K}{(x-x_0)^h} dx = \lim\limits_{c \to x_0^-} \int_a^c K \cdot (x-x_0)^{-h} dx = \lim\limits_{c \to x_0^-} \left[K \cdot \frac{(x-x_0)^{1-h}}{1-h} \right]_a^c =$ $= K \cdot \lim\limits_{c \to x_0^-} \frac{(c-x_0)^{1-h} - (a-x_0)^{1-h}}{1-h} = \frac{(a-x_0)^{1-h}}{h-1}$, il che accade solo se è $h < 1$, perché diversamente il limite sarebbe uguale a + ∞. Si vede facilmente che anche il limite destro è uguale al precedente.

A questo punto generalizziamo il concetto di integrale anche a intervalli infiniti.

Definizione 3

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a; +\infty)$ (risp. in $(-\infty; a]$), diciamo che $f(x)$ è **integrabile in senso improprio su $[a; +\infty)$ (risp. su $(-\infty; a]$)** se esiste finito il $\lim\limits_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx$ (risp. $\lim\limits_{c \to -\infty} \int_c^a f(x)\,dx$).

Esempio 16

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^2}$ in $[1; +\infty)$. Vediamo se è integrabile in senso improprio. Si ha: $\lim\limits_{a \to +\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \lim\limits_{a \to +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^a = \lim\limits_{a \to +\infty} \left(-\frac{1}{a} \right) + 1 = 1$. La funzione è integrabile in senso improprio.

Vale un risultato analogo al Corollario 1.

Corollario 2

Sia $f(x)$ continua in $[a; +\infty)$ (risp. in $(-\infty; a]$), e si abbia $|f(x)| \le K/|x|^h$, con $K > 0$ e h > 1, allora $f(x)$ è integrabile in senso improprio su $[a; +\infty)$ (risp. su $(-\infty; a]$).

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo vedere se il seguente integrale è finito: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. La discontinuità si ha per $x = 1$. Quindi dobbiamo calcolare

$$\lim_{a \to 1^-} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{a \to 1^-} \left[sin^{-1}(x) \right]_0^a = \lim_{a \to 1^-} \left[sin^{-1}(a) - sin^{-1}(0) \right] = sin^{-1}(1) - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Concludiamo che la funzione è integrabile su [0; 1].

Stabilire quali delle seguenti funzioni sono integrabili in senso generalizzato negli intervalli indicati, per quelle che lo sono calcolarne il valore.

Livello 2

1. $f(x) = ln(x)$ in [0; 1] [–1] $f(x) = 1/(x^2 - 1)$ in [–1; 1] [No] $f(x) = 1/sin(x)$ in [0; 1] [No]
2. $f(x) = ln(x)/x$ in [0; 1] [No] $f(x) = xln(x)$ in [0; 1] [–¼] $f(x) = 1/(x-2)^2$ in [1; 3] [–2]
3. $f(x) = sin(2x)/sin(x)$ in [0; π] [0] $f(x) = cos(2x)/cos^2(x)$ in [0; π] [No]

4. $f(x) = 1+tan(x)$ in [0; 1] [No] $f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ in [0; 1] [2e–2] $f(x) = 1/[x ln(x)]$ in [0; 1] [No]

5. $f(x)=\frac{sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ in [0; π/4] $\left[2-2\cdot cos\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\right]$ $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ in [0; 1] [π/4]

6. $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ in [–1; 0] $\left[tan^{-1}\left(\sqrt{e^2-1}\right)\right]$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ in [– ½ ; 0] [π/4]

Livello 3

7. Determinare l'area della regione compresa tra la versiera di Agnesi, di equazione $f(x)=\frac{a^3}{x^2+a^2}$ e il suo asintoto orizzontale. [πa^2]
8. Con riferimento al problema precedente determinare il volume del solido generato dalla rotazione della curva attorno all'asintoto. [$\pi^2 a^3/2$]

Stabilire quali delle seguenti funzioni sono integrabili in senso improprio negli intervalli indicati, per quelle che lo sono calcolarne il valore.

Livello 2

9. $f(x) = ln(x)$ in [1; +∞) [No] $f(x) = (x^2)/(x^2 + 1)$ in (–∞; +∞) [No]
10. $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}$ in [0; +∞) [π/4] $f(x)=\frac{x}{x^2+2x+3}$ in [0; +∞) [No]
11. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ in (–∞; +∞) [No] $f(x) = ln(x)/x$ in [1; +∞) [No]
12. $f(x) = ln(x)/x^2$ in [1; +∞] [1] $f(x)=\frac{tan(x)}{cos^2(x)}$ in [0; +∞) [No]
13. $f(x)=\frac{1}{x\cdot ln(x^2)}$ in [0; +∞) [No] $f(x) = x \cdot e^{x+1}$ in (–∞; 0] [–e]
14. $f(x) = x^2 \cdot e^x$ in (–∞; 0] [2] $f(x) = x^2 \cdot e^x$ in [0; +∞) [No]

L'angolo di Derive

Derive calcola anche integrali impropri e generalizzati

#1: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ #3: $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ #5: $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$

#2: 2 #4: ∞ #6: $\frac{1}{2}$

L'angolo di Microsoft Mathematics

Anche Microsoft Mathematics non ha problemi a atrattare integrali impropri o generalizzati.

1 Input $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ Output ∞

2 Input $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ Output 2

3 Input $\int_1^\infty \sqrt{x}\,dx$ Output ∞

4 Input $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ Output $\frac{1}{2}$ Output decimale 0.5

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Sapendo che $f(x)$ è integrabile in $[a; b]$ e $\int_{k\cdot a}^{k\cdot b} f(x)\,dx = p$, calcolare $\int_a^b f(k\cdot x)\,dx$. **[1/*k*]**
2. Sia $f(x)$, integrabile e periodica di periodo T. Dimostrare che $\int_0^T f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx, \forall a \in \mathbb{R}$.
3. Calcolare $\int sin^{2n+1}(x)\,dx, n \in \mathbb{N}$. Sugg. Usare il binomio di Newton. $\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \cdot \binom{n}{k} \cdot cos^{2k+1}(x) + c\right]$
4. Calcolare $\int cos^{2n+1}(x)\,dx, n \in \mathbb{N}$. Sugg. Usare il binomio di Newton. $\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{2k+1} \cdot \binom{n}{k} \cdot sin^{2k+1}(x) + c\right]$

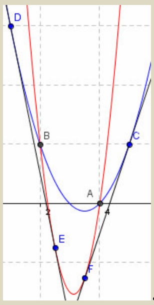
Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi
I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito
http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

1. (Liceo scientifico 1966/67) In un piano, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale Oxy, si considerino le parabole di equazione: $y = mx^2 + x + 3 - 4m$ (1), essendo m un parametro diverso da zero. a) Fra le parabole di equazione (1) si studino quelle aventi per vertice $A \equiv (-2;1)$ oppure $B \equiv (2;5)$ e si provi che esse sono fra loro simmetriche rispetto al punto medio C del segmento AB. b) Si calcoli l'area della regione finita limitata dalle due parabole di cui al punto (a). [16/3]
2. (Liceo scientifico 1969/1970) Data la funzione $y = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^2$, si determini l'area del rettangoloide, relativo al grafico, avente per base l'intervallo di estremi $x = 0$, $x = 2$. [2/45]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente problema assegnato agli esami di Liceo scientifico suppletiva 1971/72.
Date le due parabole rappresentate dalle equazioni $y = x^2 - 7x + 12$, $y = 4x^2 - 25x + 36$, si determinino le coordinate dei punti comuni, le equazioni delle tangenti comuni e le coordinate dei punti di contatto. Si calcoli poi l'area di una delle due regioni piane limitate dalle parabole e da una delle suddette tangenti.
La prima risposta si ottiene risolvendo l'equazione $x^2 - 7x + 12 = 4x^2 - 25x + 36$, che fornisce le ascisse: $x = 2$, $x = 4$. Sostituendo otteniamo le ordinate e perciò i punti $A \equiv (4; 0)$, $B \equiv (2; 2)$.
Per le tangenti comuni risolviamo le equazioni delle derivate: $2x - 7 = 8x - 25$, che forniscono $x = 3$, che è perciò il coefficiente angolare delle tangenti comuni. Le loro equazioni sono perciò $y = 3x + h$. Per determinare h risolviamo il sistema con le equazioni delle parabole e imponiamo la condizione di tangenza, ossia discriminante nullo dell'equazione risolutiva. Otteniamo così le equazioni $y = 3x - 13$ e $y = -5x + 11$. Analogamente otteniamo i punti comuni: $C \equiv (5; 2)$, $D \equiv (1; 6)$, $E \equiv (5/2; -3/2)$ e $F \equiv (7/2; -5/2)$.

La situazione è la seguente . Una delle aree si trova con il calcolo seguente:

$$\int_1^2 \left[x^2-7x+12-(-5x+11)\right]dx+\int_2^{5/2}\left[4x^2-25x+36-(-5x+11)\right]dx=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

3. (Liceo scientifico suppletiva 1972/73) In un riferimento cartesiano ortogonale xOy siano date la parabola di equazione $y = -2/3x^2 + 27/8$ e la circonferenza $x^2 + y^2 - 2ky = 0$, essendo k un parametro reale. Delle predette circonferenze si consideri quella che risulta tangente alla parabola e appartiene al semipiano $y \geq 0$, si scrivano le equazioni delle rette tangenti comuni alla parabola stessa e alla circonferenza, e si dica qual è l'ampiezza dell'angolo formato dalle due tangenti. Si calcoli, infine, l'area della regione finita del piano compresa fra la parabola e la circonferenza trovata.
[$x^2 + y^2 - 3y = 0$; $y = \pm\sqrt{3}\,x + 9/2$; 60°; $27/16 \cdot \sqrt{3} - ¾\,\pi$]

4. (Liceo scientifico 1973/74) Assegnata la funzione $y = sin(x) + a \cdot cos(x) + b$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$, si determinino i valori di a e di b in modo che ammetta un massimo relativo $y = 0$ nel punto di ascissa $\pi/6$ e si disegni la curva rappresentativa della funzione ottenuta. Condotta la retta tangente alla curva nel punto A di ascissa $x = 0$, e tracciata la retta $x = \pi/2$, si calcoli l'area della regione piana limitata dalla retta, dalla tangente in A e dalla curva.
$\left[a=\sqrt{3}, b=-2; \frac{\pi^2-8\cdot\sqrt{3}+4\cdot\sqrt{3}\pi-8}{8}\right]$

5. (Liceo scientifico suppletiva 1973/74) Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che la parabola da essa rappresentata sia tangente alle tre rette rispettivamente di equazione: $2x + y - 3 = 0$, $4x - y - 12 = 0$, $y = 0$. Detti A, B, C i rispettivi punti di contatto si determini sull'arco ACB il punto P tale che risulti massima l'area del triangolo APB. Si calcolino le aree dei segmenti di parabola determinati dai lati AP, PB di tale triangolo. [$y = x^2 - 4x + 4$; $f(x) = 3/2\,(-x^2 + 5x - 4)$, $x_M = ¼$; 9/16]

6. (Liceo scientifico 1974/75) In un riferimento cartesiano ortogonale xOy sono date le parabole C' e C'' rispettivamente di equazione: $y = -x^2 + 2ax$, $y = \frac{x^2}{a^4} - \frac{2x}{a^3}$, $a > 0$; si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due parabole e si determini il valore di a per cui tale area risulta minima.
$\left[\frac{4\cdot(a^4+1)}{3a}; a_{\min}=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right]$

7. (Liceo scientifico suppletiva 1974/75) Si studi la funzione $y = x^2 \cdot (3 - x)$ e se ne disegni il grafico. Detti A e B i punti corrispondenti agli estremi della funzione, si conducano per essi le rette tangenti alla curva e siano C e D i rispettivi punti di contatto. Si calcoli l'area del quadrilatero convesso limitato dai segmenti AC e BD e dagli archi AD e BC della curva. [$x_M = 2$, $x_m = 0$; 27/32]

8. (Liceo scientifico suppletiva 1975/76) In un sistema di assi cartesiani si determinino l'equazione della circonferenza passante per i punti $A \equiv (0, 1)$, $B \equiv (1, 0)$, $C \equiv (-1, 0)$ e quella della parabola con asse parallelo all'asse y, passante per gli stessi punti e si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve.Nel semipiano delle ordinate positive si tracci la retta $y = h$ che incontra in P e Q le circonferenze e in R e S la parabola. Dette P', Q', R', S' le proiezioni ortogonali di P, Q, R, S sull'asse x, si considerino i pentagoni $APP'Q'Q$ e $ARR'S'S$ inscritti negli archi CAB di circonferenza e di parabola rispettivamente, si determini per quale valore di h è massima la differenza dei volumi da essi generati in una rotazione di mezzo giro intorno all'asse delle ordinate.
[$x^2 + y^2 = 1$; $y = -x^2 + 1$; $\pi/2 - 4/3$; $\pi/3\cdot(-2h^3 + h^2 + h)$ con $0 < h < 1$; $h_M = \frac{1+\sqrt{7}}{6}$]

9. (Liceo scientifico 1975/76) Si studi la funzione $y = x + 2\,sin(x)$ e se ne disegni il grafico nell'intervallo $-2\pi \leq x \leq 2\pi$. Si determinino le coordinate dei punti comuni alla curva e alla retta di equazione $y = x - 2$ e si calcoli l'area della regione di piano delimitata dalla curva e dalla retta nell'intervallo indicato.
[$x_M = -4\pi/3 \vee 2\pi/3$; $x_m = -2\pi/3 \vee 4\pi/3$; 4π]

10. (Liceo scientifico 1975/76) In un sistema di assi coordinati cartesiani si studi la funzione $y = \frac{2x-1}{2x^3}$ e se ne disegni il grafico. Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx$ in modo che la parabola da essa rappresentata passi per il flesso e per l'ulteriore punto d'intersezione della curva con la

tangente inflessionale e si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve.
[x_M = ¾; x_F = 1; a = 1, b = – ½; 7/48]

11. (Liceo scientifico suppletiva 1975/76) In un sistema di assi cartesiani si considerino le parabole rappresentate dalle equazioni: $y = ax^2 - 2x + 2$, $y = 2ax^2 - 2x + 1$, e si determini il valore del parametro reale a in modo che risulti minima la distanza tra i due vertici. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla due curve. $\left[f(a)=\frac{2a^2-2a+1}{2a^2};a_m=1;\frac{4}{3}\right]$

12. (Liceo scientifico 1976/77) In un sistema di assi coordinati cartesiani si considerino le parabole rappresentate dalle equazioni: $y = 3x - x^2$, $y = x^2 - 2x$. Nella regione finita di piano delimitata dalle due curve si determini il triangolo avente un vertice nel punto comune alle due curve diverso dall'origine e il lato opposto parallelo all'asse delle ordinate e la cui area abbia valore massimo. Si calcolino inoltre le aree delle regioni finite di limitate dai lati di questo triangolo e dalle curve stesse.
[$A(k) = k^3 - 5k^2 + 25/4k$, $k_M = 5/6$, 125/162]

13. (Liceo scientifico suppletiva 1976/77) Tra le parabole del tipo $y = -¼\, x^2 + c$ con $c > 0$ si determini quella per la quale i punti P di essa che hanno minima distanza dall'origine O degli assi cartesiani di riferimento sono tali che $\overline{OP}^2 = 12$. Tracciate le tangenti alla parabola nei punti P' e P'' così determinati, si calcoli l'area del triangolo mistilineo $P'P''T$, dove T è il punto d'incontro delle tangenti e $P'P''$ l'arco di parabola. $\left[f(c)=\frac{x^4}{16}+\frac{2-c}{2}x^2+c^2;c_m=4;\frac{8}{3}\cdot\sqrt{2}\right]$

14. (Liceo scientifico suppletiva 1976/77) Si studino le funzioni $y=\frac{2}{x^2}$, $y=\frac{x^3-3x^2+4}{x^2}$ e se ne disegnino i grafici in un sistema cartesiano ortogonale. Si verifichi che i loro punti comuni stanno su una retta di cui si chiede l'equazione. Si calcoli inoltre l'area della regione di piano limitata dalle due curve.
[La prima funzione non ha estremi relativi, la seconda: $x_m = 2$;
$A\equiv\left(1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$ $B\equiv\left(1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$, $C \equiv (1; 2)$ appartenenti a $x + y - 3 = 0$; $\frac{6\cdot\sqrt{3}-9}{2}$]

15. (Liceo scientifico 1977/78) Tra le parabole di equazione $y = ½\, x^2 - 3x + k$, si individui quella sulla quale la retta di equazione $2y = x + 2$ intercetta una corda AB lunga $l=\frac{5}{2}\cdot\sqrt{5}$. Condotte in A e in B le rette tangenti alla parabola trovata, si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dall'arco di parabola AB e dalle due tangenti. [$y = ½x^2 - 3x + 4$; 125/4]

16. (Liceo scientifico suppletiva 1977/78) Si determinino i coefficienti della funzione $y=1+ax+\frac{b}{x^2}$ in modo che la curva che la rappresenta abbia un estremo relativo in $A \equiv (1; 0)$. Se ne disegni il grafico. Condotta per A la retta tangente alla curva nel punto B, si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva, dalla retta AB e dall'asse delle ascisse. [a = – 2/3, b = –1/3; x_M = 1; 9/8]

17. (Liceo scientifico suppletiva 1977/78) In un sistema di assi coordinati si considerino $O \equiv (0; 0)$ e $A \equiv (2; 2)$ e la circonferenza avente per diametro OA. Si determinino i coefficienti della funzione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che la parabola che la rappresenta passi per i due punti dati e abbia in A come tangente la retta tangente alla circonferenza. Si calcolino le aree delle due regioni finite di piano delimitate dalle due curve. [$y = -x^2 + 3x$; $\pi \pm 4/3$]

18. (Liceo scientifico suppletiva 1978/79) Si studi la funzione $y=x+\frac{4}{x^2}$ e se ne disegni il grafico. Detti A il punto estremo relativo e B l'ulteriore punto di intersezione della curva con la tangente in A, si scriva l'equazione della parabola passante per A e tangente alla curva in B e si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dalle due curve. [$x_m = 2$; $y = -3x^2 + 3x + 9$; 104/27]

19. (Liceo scientifico 1978/79) Si studi la funzione $y=x^2+\frac{1}{x^2}$ e se ne disegni il grafico. Si scrivano l'equazione della parabola avente come asse l'asse delle ordinate, vertice nel punto (0; 1) e tangente alla curva e quella della parabola a questa simmetrica rispetto alla congiungente i due punti di contatto. Si

calcolino le aree delle tre regioni finite di piano limitate dalle due parabole e dalla curva data.

$$\left[y=\frac{3}{4}x^2+1; y=-\frac{3}{4}x^2+1; \frac{2\cdot\sqrt{2}}{21}\cdot\left(35-11\cdot\sqrt{7}\right), \frac{2\cdot\sqrt{2}}{21}\cdot\left(35-11\cdot\sqrt{7}\right), \frac{4\cdot\sqrt{2}}{21}\cdot\left(11\cdot\sqrt{7}-14\right)\right]$$

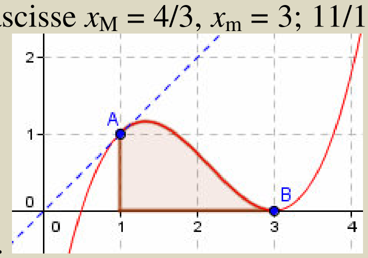
20. (Liceo scientifico 1979/80) In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la parabola di equazione $y=x^2+\sqrt{3}\cdot x+1$. Condotte per l'origine O le due rete tangenti a essa, si scriva l'equazione della circonferenza passante per O e per i due punti di contatto e si calcolino le aree delle due regioni finite di piano delimitate dalle due curve. $\left[x^2+y^2-4y=0; 2\pi+\frac{4}{3}, 2\pi-\frac{4}{3}, \frac{3\cdot\sqrt{3}-2-\pi}{3}\right]$

21. (Liceo scientifico suppletiva 1979/80) Si scriva l'equazione della parabola α avente l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y, passante per i punti P (0; 3), Q (2; 3) e il cui vertice V stia sulla parabola β di equazione $y = -x^2 + 3x$. Detto W l'ulteriore punto comune alle due curve, si scrivano l'equazione della retta tangente ad α in W e quella della retta tangente a β in V e si calcoli l'area del trapezio mistilineo delimitato da queste due rette e dalle due parabole. [α: $y = x^2 - 2x + 3$, $y = x + ¾$, $y = x + 1$, 7/24]

22. (Liceo scientifico 1980/81) Si studi la funzione $y=x^2+\frac{16}{x^2}$ e se ne disegni il grafico. Si scrivano le equazioni delle due parabole, con gli assi paralleli all'asse delle ordinate, passanti per l'estremo relativo A della curva di ascissa positiva, per il punto B della curva di ascissa 1 e tali che l'area della regione finita di piano limitata dall'arco AB della curva e da ciascuna delle due parabole sia 7/3.
[$x = -2$, $x = 2$; $y = -x^2 - 6x + 24$ e $y = 27x^2 - 90x + 80$]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente problema assegnato agli esami di Liceo scientifico 1981/82. Si determinino i coefficienti della curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ in modo che essa tocchi la retta $y = x$ in $A \equiv (1; 1)$ e la retta $y = 0$ in $B \equiv (3; 0)$. Se ne disegni il grafico. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due rette e dall'arco di curva AB.
Imponiamo le condizioni per determinare i coefficienti, le prime due sono immediate, per le altre due dobbiamo imporre semplicemente che le rette tangenti nei punti dati siano quelle assegnate. Determiniamo quindi il coefficiente angolare della generica tangente: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Tale valore deve essere 1 per x = 1 e 0 per x = 3. Pertanto il sistema di risolvere è $\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 27a+9b+3c+d=0 \\ 3a+2b+c=1 \\ 27a+6b+c=0 \end{cases}$, le cui soluzioni sono: a = ½, b = –13/4, c = 6, d = –9/4. Lasciamo lo studio della funzione per esercizio, dicendo solo che si hanno gli estremi relativi di ascisse $x_M = 4/3$, $x_m = 3$; 11/16. Il grafico è il seguente, in cui abbiamo evidenziato anche l'area da calcolare.



Osserviamo che la richiesta che l'area sia compresa tra le *due* rette è del tutto inutile, poiché bastava dire che fosse compresa tra l'arco AB e l'asse x, ossia il consueto trapezoide, che perciò si calcola $\int_1^3\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{13}{4}x^2+6x-\frac{9}{4}\right)dx$, il cui calcolo lasciamo per esercizio ed è 4/3.

23. (Liceo scientifico 1982/83) Si studi la funzione $y=\frac{a^2}{x^2}-1$ e se ne disegni il grafico. Si determinino le intersezioni della curva da essa rappresentata con la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = a^2$ e si trovi il valore di a per cui dette intersezioni sono vertici di un esagono regolare. In questo caso particolare si

calcolino le aree delle regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

$$\left[(\pm a;0),\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{1-4a^2}-1}{2}};\frac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2}\right);a=\pm 2\cdot\sqrt{3};\frac{4\pi-5\cdot\sqrt{3}}{2}\right]$$

24. (Liceo scientifico 1982/83) Una parabola passante per gli estremi di un diametro di una circonferenza di raggio r ha le tangenti in tali punti perpendicolari fra loro e l'asse del diametro come asse di simmetria. Si scrivano, in un sistema di assi cartesiani opportunamente scelto, le equazioni della parabola e della circonferenza e si calcolino le aree delle regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

$$\left[y=\pm\frac{1}{2r}x^2\mp\frac{r}{2};\frac{3\pi\pm 4}{6}r^2\right]$$

25. (Liceo scientifico 1983/84) Si studi la funzione $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ e se ne disegni il grafico. Si individui la traslazione di assi: $x = X + a$, $y = Y + b$, che rende la curva simmetrica rispetto all'origine e si scriva l'equazione della curva trasformata. Si determinino le coordinate dei punti in cui la curva data incontra la bisettrice del primo e del terzo quadrante e si calcoli l'area di una delle regioni finite di piano delimitate dalla curva e dalla bisettrice stessa.

$$\left[x_M=0,x_m=1;a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{2};Y=2X^3-\frac{3}{2}X;\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{2};\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right);\frac{25}{32}\right]$$

26. (Liceo scientifico suppletiva 1983/84) Si considerino le parabole $y^2 = x/2$, $y^2 = -x + a^2$. Nella regione finita di piano compresa fra le due curve e l'asse delle ascisse si inscriva il rettangolo con i lati paralleli agli assi coordinati che, in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse, genera il cilindro di massimo volume. In tale caso si calcoli il volume del solido generato nella precedente rotazione del triangolo mistilineo aventi come lati la base superiore del rettangolo e gli archi delle due parabole compresi tra gli estremi di tale base e il punto di incontro delle parabole stesse.

$$\left[V(h)=\pi\cdot\left(-3h^4+a^2h^2\right);h_{Max}=a\cdot\frac{\sqrt{6}}{6};V=\frac{\pi}{24}a^4\right]$$

27. (Liceo scientifico 1984/85) In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la parabola di equazione $y = 3x - x^2$. Si scrivano l'equazione della parabola a essa simmetrica rispetto all'asse delle ordinate e le equazioni delle due parabole a esse simmetriche rispetto alla retta congiungente i loro vertici. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle quattro parabole e si trovi il perimetro del quadrato in essa inscritto con i lati tangenti alle parabole stesse.

[$y = -3x - x^2$, $y = x^2 - 3x + 9/2$, $y = x^2 + 3x + 9/2$; A = 9/2, $2p = 5\cdot\sqrt{2}$]

28. (Liceo scientifico 1984/85) In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la cubica di equazione $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ e si individui la traslazione $x = X + a$, $y = Y + b$, che porta l'origine del sistema di riferimento nel punto della curva di minimo relativo. Si scriva l'equazione della curva nel nuovo sistema di riferimento e si calcolino le aree delle due regioni finite di piano delimitate dalla curva e dagli assi delle ascisse dei due sistemi. [$x_M = 1$, $x_m = 2$; $a = 2$, $b = -1$; $Y = 2X^3 + 3X^2$; A = 27/32]

29. (Liceo scientifico 1985/86) Si studi la funzione $y = x^4 - kx^2$ distinguendo vari casi, a seconda dei valori assunti dal parametro reale k. In particolare si calcoli il minimo della funzione per ogni valore di k. Si disegnino i grafici corrispondenti ai valori $k = -1$ e $k = 1$. Il secondo grafico delimita, insieme alla retta $y = 0$,due regioni finite del piano, contenute rispettivamente nel terzo e nel quarto quadrante; si dimostri che l'una è la simmetrica dell'altra rispetto alla retta $x = 0$ e si calcoli l'area di una di esse.

$$\left[x_m=0,\forall x\in\mathbb{R};x_m=\pm\sqrt{\frac{k}{2}};A=\frac{2}{15}\right]$$

30. (Liceo scientifico 1989/90) Determinare il luogo dei centri delle circonferenze tangenti alla retta di equazione $y = 37/12$ e passanti per $A \equiv (0,19/12)$ e il luogo dei centri delle circonferenze tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$ e passanti per $B \equiv (2, 2)$. Calcolare quindi l'area della parte di piano racchiusa dalle due curve. $\left[y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{3};y=\frac{2}{x};A=\frac{14-18\cdot ln(2)}{9}\right]$

31. (Liceo scientifico PNI 1989/90) Si studi la funzione $f(x)=\frac{1-x}{x^2-3x}$ e si dica se per essa è valido il teorema della media integrale nell'intervallo [1; 2], giustificando l'affermazione. In caso di risposta affermativa si determini internamente a detto intervallo il valore c della variabile indipendente di cui il teorema stesso assicura l'esistenza quando la funzione è continua.

$$\left[c=\frac{3\cdot\left[ln(2)-1\right]+\sqrt{9\cdot ln^2(2)-6\cdot ln(2)+9}}{2\cdot ln(2)}\right]$$

32. (Liceo scientifico 1990/91) In un piano cartesiano ortogonale Oxy si consideri il punto $A \equiv (2x, 0)$. Si trovi il luogo L del punto $B \equiv (x, y)$ tale che il triangolo OAB abbia perimetro $2p$ e si determini l'area della regione finita di piano delimitata dal luogo stesso.

$$\left[L:\begin{cases} x=\frac{p^2-y^2}{2p} & x\ge 0\\ x=\frac{y^2-p^2}{2p} & x\ge 0\end{cases};A=\frac{4}{3}p^2\right]$$

33. (Liceo scientifico 1990/91) Si consideri in un piano cartesiano ortogonale Oxy la famiglia di parabole tangenti all'asse delle ascisse nel punto $A \equiv (1, 0)$. Detto B il punto d'incontro della generica parabola con l'asse delle ordinate, si studi come varia, al variare della parabola, l'area della regione finita di piano compresa tra la parabola stessa e la retta passante per B, parallela alla bisettrice del secondo quadrante, determinandone in particolare i valori estremi relativi.

$$\left[\left(y=\frac{4}{3\cdot\left|x\cdot(1+x)^3\right|},x_m=\frac{4^5}{3^4}\right)\vee\left(y=\frac{|2x-1|^3}{6x^2},x_m=-1\right)\right]$$

34. (Liceo scientifico suppletiva 1990/91) Si disegni in un piano cartesiano ortogonale Oxy la curva C di equazione $y=\frac{\sqrt{2x^2-1}}{x}$ e si calcoli il volume del solido ottenuto facendo ruotare di un giro completo attorno all'asse delle ascisse la regione di piano compresa tra l'arco della curva C i cui estremi sono i punti di ascissa $\sqrt{2}/2$ e 1 e le rette tangenti a C negli estremi stessi. $\left[V=\pi\cdot\frac{23\cdot\sqrt{2}-32}{12}\right]$

35. (Liceo scientifico 1991/92) Data una circonferenza γ di raggio unitario e centro O, tracciare una semiretta s uscente da O e intersecante γ in un punto Q. Indicato con P un generico punto di s esterno alla circonferenza γ, tracciare da esso le due tangenti alla circonferenza: siano A e B i punti di tangenza. Indicata con x la lunghezza del segmento PQ, trovare il limite per x tendente a infinito del rapporto $k=\frac{\overline{AQ}+\overline{QB}}{\overline{AB}}$. Studiare quindi la funzione $y = f(x)$, dove $f(x) = k^2$ e calcolare la superficie della regione di piano delimitata dalla curva e dagli assi cartesiani. [$\sqrt{2}$;A = $2\cdot[1 - ln(2)]$]

36. (Liceo scientifico PNI 1991/92) In un piano cartesiano ortogonale Oxy si considerino le parabole C e C' di equazione rispettivamente: $y - x^2 = 0$, $y^2 + 8x - 6y - 3 = 0$. Si verifichi che C e C' sono tangenti in $A \equiv (1, 1)$ e che hanno in comune un ulteriore punto B. Detto P un punto della retta AB sia QQ' la corda intercettata da C sulla parallela per P all'asse delle ascisse, RR' la corda intercettala da C' sulla parallela per P all'asse delle ordinate e S la proiezione di P sulla retta di equazione $y + 2 = 0$. Si studi come varia il rapporto: $\frac{8\cdot\overline{PS}^2}{\overline{QQ'}\cdot\overline{RR'}}$ al variare di P, determinando in particolare il suo valore minimo. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle parabole C e C'. $\left[\frac{(x+2)^2}{x},x_m=2;A=\frac{64}{3}\right]$

37. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1991/92) Si consideri in un piano cartesiano ortogonale Oxy la circonferenza di centro $A \equiv (1, 0)$, passante per l'origine degli assi. Detta r la retta di equazione $y = mx$,

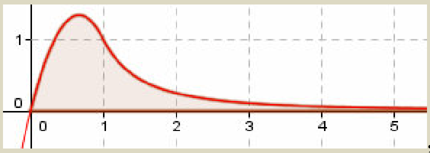
sia *OPQ* il triangolo rettangolo inscritto nella circonferenza il cui cateto *OP* appartiene alla retta *r*. Si studi come varia l'area *f*(*m*) del rettangolo avente come lati i cateti del triangolo *OPQ* e si tracci in un piano, riferito a un sistema cartesiano ortogonale *O'ms*, la curva *C* di equazione *s* = *f*(*m*). Detti *M*' e *M*" i punti di massimo di *f*(*m*), si determini l'area del triangolo mistilineo avente come lati gli archi della curva *O'M*', *O'M* e il segmento *M'M*". $\left[f(m)=\frac{4m}{m^2+1}, M'\equiv(-1;-2), M\equiv(1;2); A=4\cdot\left[1-ln(2)\right]\right]$

38. (Liceo scientifico suppletiva 1991/92) Studiare la funzione $y(x) = cos(x) \cdot e^{-x}$ per $x \ge 0$. Essa, in opportune unità di misura, rappresenti la corrente elettrica di scarica di un condensatore attraverso una impedenza, essendo *x* il tempo. In tal caso la carica *Q* inizialmente presente sulle armature del condensatore è data da $Q=\int_0^{\infty} y(x)\,dx$. Calcolare il valore di *Q*. [$x_m = 3/4\pi + 2k\pi$, $x_M = 7/4\pi + 2k\pi$; $Q = 0{,}5C$]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente problema assegnato agli esami di Liceo scientifico 1992/93. Sia la funzione $f(x)=\begin{cases}-3x^2+Hx & x\le 1\\ \frac{K}{x^2} & x>1\end{cases}$. Determinare le costanti *H* e *K* in modo che la funzione *y* = *f*(*x*) e la sua derivata siano continue in *x* = 1. Rappresentare la funzione così trovata e calcolarne l'integrale definito fra 0 e + ∞.

Per la continuità dobbiamo imporre $\lim_{x\to1^-}\left(-3x^2+Hx\right)=\lim_{x\to1^+}\frac{K}{x^2}\Rightarrow -3+H=K$. Per la derivabilità, tenuto conto che si ha: $f'(x)=\begin{cases}-6x+H & x<1\\ -\frac{2K}{x^3} & x>1\end{cases}$, deve essere $\lim_{x\to1^-}\left(-6x+H\right)=\lim_{x\to1^+}-\frac{2K}{x^3}\Rightarrow -6+H=-2K$. Dobbiamo quindi risolvere il sistema $\begin{cases}H-K=3\\ H+2K=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}H=4\\ K=1\end{cases}$ e la funzione da studiare è $f(x)=\begin{cases}-3x^2+4x & x\le 1\\ \frac{1}{x^2} & x>1\end{cases}$, che lasciamo per esercizio. Il grafico è il seguente



, con evidenziata l'area da calcolare, che dà luogo all'integrale generalizzato $\int_0^1\left(-3x^2+4x\right)dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ Calcoliamolo:

$$\left[-x^3+2x^2\right]_0^1+\lim_{c\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^c=-1+2+\lim_{c\to+\infty}\left(-\frac{1}{c}+1\right)=1+1=2.$$

39. (Liceo scientifico 1992/93) Sia $\begin{cases}x=sin(t)\\ y=sin(2t)\end{cases}$. Esprimere *y* in funzione di *x* e rappresentare le funzioni *y* = ± *f*(*x*) in uno stesso sistema di riferimento. Individuare simmetrie e caratteristiche del grafico trovato, calcolare l'area racchiusa dalla figura trovata. (L'integrale proposto è di facile esecuzione se si pone $\sqrt{1-x^2}=z$) $\left[y=\pm 2x\cdot\sqrt{1-x^2}; A=\frac{8}{3}\right]$

40. (Liceo scientifico suppletiva 1992/93) Studiare la funzione $f(x)=\left|\frac{sin(x)}{k-cos(x)}\right|$ dopo aver determinato il valore di *k* in modo che a funzione abbia un massimo per $x=\frac{\pi}{3}$. Supponendo che la funzione rappresenti il valore numerico dell'intensità (espressa in Newton) di una forza che agisce lungo l'asse delle ascisse (ove *x* rappresenti il valore numerico della distanza in metri), calcolare il lavoro fatto dalla

forza quando il suo punto di applicazione si sposta dalla posizione $x = 0$ a $x = \pi$. (L'integrale è di facile esecuzione se si pone $k - cos(x) = t$) [$x_m = 5/3\pi$, $x_M = \pi/3$; $L = ln(3)$]

41. (Liceo scientifico 1993/94) Nel piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la curva k di equazione: $y = \frac{x^2}{2} + ln|x+1|$. Disegnare un andamento approssimato dopo aver verificato, fra l'altro, che essa ha due flessi. Calcolare l'area del triangolo formato dalla retta congiungente tali flessi e dalle tangenti inflessionali. Calcolare inoltre l'area R della regione piana delimitata da k, dall'asse x e dalla retta di equazione $2x - 3 = 0$. Stabilire infine quale delle due aree precedenti è la maggiore. [$F_1 \equiv (-2, 2)$, $F_2 \equiv (0, 0)$; A = 2; R = 5/2 $ln(5/29 - 15/16)$]

42. (Liceo scientifico suppletiva 1993/94) Studiare le funzioni: $y = x^3 + 1$ e $y = \sqrt{x^3+1}$ e disegnare i loro grafici, rispettivamente K' e K'', nello stesso piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy. Successivamente, tra i segmenti intercettati, dalla regione piana R delimitata da K' e K'', su una parallela all'asse y, determinare quello di lunghezza massima. Calcolare infine il volume del solido generato da tale regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse x.

$$\left[L(k) = \sqrt{k^3+1} - k^3 - 1, k_M = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}}, V = \frac{3}{28}\pi\right]$$

43. (Liceo scientifico suppletiva 1993/94) In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione: $y = \frac{x-a}{2x-a}$ dove a è un parametro reale non nullo. a) Dimostrare che esse hanno tutte in comune un punto A ed esso soltanto. [(0; 1)] b) Tra le curve considerate, determinare quelle che intercettano un segmento di lunghezza $\frac{4}{3} \cdot \sqrt{10}$ sulla retta passante per A e avente coefficiente angolare 3. [$a = 7/3 \vee 3$] Calcolare l'area della regione di piano delimitata dalle due curve trovate e dalla retta di equazione $x = 1$. [7/12 $ln(7/13)$ + ¾ $ln(3)$]

44. (Liceo scientifico PNI 1994/95) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy si consideri la parabola Γ di equazione $y = -½ x^2 + ½ x$ e sia P il punto di Γdi ascissa λ. Il candidato: a) scriva l'equazione della parabola passane per l'origine O e avente il vertice nel punto P; $\left[y = \frac{\lambda-1}{2\lambda}x^2 + (1-\lambda)x\right]$ b) determini l'equazione della curva Σ, luogo geometrico del fuoco della parabola al variare di λ; $\left[y = \frac{x^2 \cdot (2-x)}{2 \cdot (x-1)}\right]$ c) tracci il grafico della curva Σ individuandone in particolare il flesso F; [$F \equiv (2; 0)$] d) detta r la retta per F e per il punto A, di ascissa –1, della curva Σ, calcoli l'area della regione finita di piano delimitata da Σ e r; [39/32 – $ln(2)$] e) dica l'errore relativo che si commette assumendo come area di detta regione quella del triangolo inscritto OFA. $\left[1 - \frac{12}{39 - 32 \cdot ln(2)}\right]$

45. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1994/95) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è assegnato il punto $A \equiv (a, -a)$. Il candidato: a) scriva l'equazione della circonferenza Γ di centro A che stacca sull'asse delle ascisse un segmento di lunghezza $2 \cdot \sqrt{2}$ [$(x - a)^2 + (y + a)^2 = 2 + a^2$] b) intersechi Γ con l'iperbole Σ di equazione $xy - 1 = 0$ e, osservando che l'equazione risolvente del sistema delle due equazioni delle due curve è il quadrato di un trinomio, deduca che al variare di a le curve Γ e Σ sono bitangenti tra loro in due punti distinti B e C [$(x^2 - ax - 1)^2 = 0$] c) individui le circonferenze Γ_1 e Γ_2 che si ottengono per quei valori di a per cui il segmento BC dista dal centro della circonferenza di cui è corda i 3/10 del segmento stesso [Γ_1: $x^2 + y^2 - 3x + 3y + ¼ = 0$, Γ_2: $x^2 + y^2 + 3x - 3y + ¼ = 0$] d) calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle rispettive corde BC di Γ_1 e Γ_2 della curva Σ. [15/8 + $ln(16)$]

46. (Liceo scientifico 1994/95) In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la curva K di equazione: $y = sin(x) + \frac{1}{4 \cdot sin(x)}$, con $-\pi < x < \pi$. a) Disegnarne l'andamento

e stabilire, in particolare, se la curva ha flessi. $\left[x_F = sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{33}-1}{8}}\right)\right]$ b) Calcolare l'area della regione piana delimitata da K e dalla retta di equazione $y = 1$. $\left[3-\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{4}\cdot ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)\right]$

N.B. Per il calcolo di una primitiva della funzione $1/sin(x)$ si suggerisce di porre $t = tan(x/2)$.

47. (Liceo scientifico 1994/95) Nel cubo di vertici A, B, C, D, E, F, G, H le facce $ABCD$ e $EFGH$ sono opposte e i segmenti AE, BF, CG sono spigoli. Inoltre gli spigoli del cubo hanno lunghezza unitaria. Sullo spigolo BF prendere un punto P tale che: $\overline{BP} = x$. a) Verificare che la distanza y di P dalla diagonale AG è espressa da: $y=\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\left(x^2-x+1\right)}$. b) Di essa disegnare il grafico in un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, dopo avere trovato, fra l'altro, le equazioni dei suoi asintoti. $\left[y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]$ c) Considerato infine il volume del solido generato, in una rotazione completa intorno all'asse x, dalla regione piana delimitata da tale grafico, dagli assi di riferimento e dalla retta di equazione $x = h$ (con $h > 0$), calcolare per quale valore di h questo volume è $16/9\pi$. [$h = 2$]

48. (Liceo scientifico suppletiva 1994/95) Studiare la funzione: $y=\sqrt[3]{x^2+1}$ e disegnarne il grafico G in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy. Verificato che G ha due flessi, F' e F'', calcolare l'area del triangolo di vertici O, F', F''. Trovare i due interi consecutivi entro i quali è compresa quest'area. Calcolare infine il volume del solido generato dal triangolo $OF'F''$ quando ruota di un giro completo attorno all'asse x.

$$\left[x_m=0; F'\equiv\left(-\sqrt{3};\sqrt[3]{4}\right), F''\equiv\left(\sqrt{3};\sqrt[3]{4}\right); A_{OF'F''}=\sqrt[6]{432}; 2<\sqrt[6]{432}<3; V=\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot\pi\sqrt[3]{2}\right]$$

49. (Liceo scientifico suppletiva 1994/95) È assegnata l'equazione: $y = 1 - ax^2 + bx + c$ dove a, b, c sono numeri reali non negativi. Determinare tali coefficienti sapendo che la parabola p, che rappresenta l'equazione in un piano cartesiano ortogonale Oxy, interseca l'asse x nei punti O, A e ha vertice nel punto V in modo che: a) il triangolo OAV sia rettangolo; [$y = -ax^2 + 2x$] b) il segmento parabolico individuato dalla corda OA generi un solido di volume $128/15\pi$ quando ruota di un giro completo attorno all'asse x. [$y = -1/2x^2+2x$] c) Considerata poi la circonferenza tangente in A alla retta AV e passante per O, calcolare le aree delle due regioni piane in cui essa divide il segmento parabolico suddetto. [$S_1 = 16/3$; $S_2 = 28/3 - 2\pi$]

50. (Liceo scientifico 1995/96) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva k di equazione: $y=\frac{x^2}{4-x^3}$. Dopo aver studiato la funzione $f(x)=\frac{x^2}{4-x^3}$ (dominio, eventuali zeri ed estremi, asintoti di k), disegnare l'andamento di k. Indicata con t la tangente a k la parallela all'asse delle ascisse distinta dall'asse stesso, calcolare l'area della regione piana delimitata da k e da t. [$S = 1 - 1/3\ ln(4)$]

51. (Liceo scientifico 1996/97) Sono assegnate le funzioni in x: $\frac{x^4+ax^2+b}{x^2+1}$ dove a e b sono parametri reali. Fra tali funzioni indicare con $f(x)$ quella per cui la curva k di equazione $y = f(x)$, disegnata in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, soddisfi alle seguenti condizioni: la retta di equazione $y = 1$ sechi k in due punti e sia tangente a essa in un punto; l'asse x sia tangente a k in due punti distinti. $\left[y=\frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^2+1}\right]$ a) Disegnare l'andamento di k. b) Calcolare l'area della regione piana delimitata da k e dall'asse x. [$2\pi - 16/3$] c) Calcolare $\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right)dx$. [$3\pi - 8$]

52. (Liceo scientifico 1997/98) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono

assegnate le curve di equazione: $y = ax^3 + 3x + b$ dove a, b sono parametri reali con $a \neq 0$. a) Determinare i valori di a per i quali queste curve hanno un punto di massimo ed uno di minimo relativi e quelli per i quali non ammettono tali punti. [$a < 0$] b) Calcolare i valori di a e b in modo che la curva corrispondente abbia un massimo relativo uguale a 0 e sechi l'asse x nel punto di ascissa $-2\cdot\sqrt{2}$. $\left[a=\frac{1}{2}, b=-2\cdot\sqrt{2}\right]$ c) Controllato che la curva si ottiene per $a = -$ ½, disegnarne l'andamento. d) Calcolare l'area della regione piana delimitata dalla curva e dall'asse x. [27/2]

53. (Liceo scientifico 1997/98) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva C' di equazione: $y=\frac{x^2-1}{2x}$. a) Studiarla e disegnarne l'andamento, indicando con A e B i punti in cui la curva seca l'asse x ($x_A > x_B$). b) Trovare l'equazione della circonferenza C'' tangente a C' in A e passante per B. [$x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$] c) Disegnare C'' sullo stesso piano di C' dopo aver determinato il raggio e il centro di C'' e inoltre le coordinate dell'ulteriore punto in cui C'' seca C'. [(–1/5; 12/5)] d) Determinare l'angolo sotto cui C' e C'' si secano in B. [90°] e) Calcolare le aree delle regioni in cui C' divide il cerchio delimitato da C''. [S = $cos^{-1}(-3/5) + 2/5 -$ ½ $ln(5)$; $2\pi -$ S]

54. (Liceo scientifico PNI 1997/98) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono dati i punti $A \equiv (-1; 0)$ e $B \equiv (1; 0)$. Il candidato: a) scriva l'equazione di Γ_1, luogo dei punti per cui è uguale a $2\cdot\sqrt{2}$ la somma delle distanze da A e da B, e l'equazione di Γ_2, luogo dei punti per cui è uguale a $\sqrt{2}$ la distanza da B; [$x^2 + 2y^2 - 2 = 0$; $x^2 + y^2 - 2x - 1= 0$] b) verifichi che Γ_1 e Γ_2 hanno due punti C e D in comune e dimostri che CBD è un triangolo rettangolo; [(0; 1), (0; –1)] c) determini, eventualmente sfruttando la simmetria della curva Γ_1 rispetto all'asse delle ordinate, l'area della regione finita di piano S delimitata dagli archi di Γ_1 e di Γ_2 appartenenti al semipiano di equazione $y \geq 0$ e dai segmenti VW e $V'W'$, essendo V,V' e W,W' i punti d'intersezione dell'asse delle ascisse rispettivamente con Γ_1 e con Γ_2 (V e W di ascissa positiva); [1+ π/2] d) considerato il solido T che si ottiene facendo ruotare S di un giro completo attorno all'asse delle ascisse, scriva la funzione $f(x)$ che esprime l'area della sezione di T con il piano perpendicolare all'asse delle ascisse e passante per $P \equiv (x, 0)$, distinguendo le varie posizioni di P, e disegni la curva di equazione $y = f(x)$

$$\left[f(x)=\begin{cases}\frac{\pi\cdot(2-x^2)}{2} & -\sqrt{2}\leq x\leq 1-\sqrt{2}\\ \frac{\pi\cdot(x^2-4x)}{2} & 1-\sqrt{2}<x\leq 0\\ \frac{\pi\cdot(4x-x^2)}{2} & 0<x\leq\sqrt{2}\\ \pi\cdot(-x^2+2x+1) & \sqrt{2}<x\leq 1+\sqrt{2}\end{cases}\right]$$

e) dica cosa rappresenta per il solido T l'area della parte di piano compresa tra S e l'asse delle ascisse. [misura del volume di T]

55. (Liceo scientifico 1998/99) In un piano α sono assegnate una circonferenza k di raggio di lunghezza data r e una parabola p passante per gli estremi A, B di un diametro di k e avente come asse di simmetria l'asse del segmento AB. L'area del segmento parabolico delimitato dalla parabola p e dal segmento AB è $8/3r^2$. Dopo aver riferito il piano α ad un conveniente sistema di assi cartesiani Oxy: a) determinare l'equazione della circonferenza k; [$x^2 + y^2 = r^2$, nel sistema di riferimento in cui $A \equiv (-r, 0)$, $B \equiv (r, 0)$] b) determinare l'equazione della parabola p; $\left[y=\pm\frac{2}{r}x^2\mp 2r\right]$ c) trovare le coordinate dei punti comuni a k e p; $\left[A, B, \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}r; -\frac{r}{2}\right)\vee\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}r; \frac{r}{2}\right)\right]$ d) calcolare le aree delle regioni piane

in cui la parabola *p* divide il cerchio delimitato da *k*; $\left[\frac{2\pi+15\cdot\sqrt{3}-32}{24},\frac{10\pi-15\cdot\sqrt{3}+32}{12}\right]$ e) stabilire per quale valore di *r* la maggiore di tali aree è uguale a $\frac{32+22\pi-15\cdot\sqrt{3}}{3}$ cm^2. $\left[2\cdot\sqrt{\frac{22\pi-15\cdot\sqrt{3}+32}{10\pi-15\cdot\sqrt{3}+32}}\right]$

56. (Liceo scientifico PNI 1998/99) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy* è data la parabola γ di equazione: $y=\frac{x^2}{2}-x$. Siano *A* un punto dell'asse *x* di ascissa λ, con λ > 0, *B* il suo simmetrico rispetto a *O*, e *A*' e *B*' i punti della parabola le cui proiezioni ortogonali sull'asse *x* sono rispettivamente *A* e *B*. Il candidato: a) verifichi che le tangenti *a* e *b* alla parabola γ, rispettivamente in *A*' e *B*', si incontrano in un punto *E* dell'asse *y*; [(0; $-\lambda^2/2$)] b) detti *C* e *D* i rispettivi punti di intersezione di *a* e con l'asse *x*, esprima in funzione di λ l'area del triangolo *CED*; $\left[\frac{\lambda^5}{4\cdot\left|\lambda^2-1\right|}\right]$ c) studi la funzione $s(\lambda)$ e tracci, in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali $O'\lambda s$, la curva *C* di equazione $s = s(\lambda)$;d) detto λ_0 il valore di λ per cui *s* assume valore minimo relativo, e detti a_0 e b_0 le posizioni di *a* e *b* per detto valore, calcoli l'area della regione finita del semipiano di equazione $y \le 0$, compresa tra γ, a_0 e b_0. $\left[\frac{25\cdot\sqrt{15}-48}{72}\right]$

57. (Liceo scientifico 1999/2000) Sia *f*(*x*) una funzione reale di variabile reale, continua su tutto l'asse reale, tale che: [1] $\int_0^1 f(x)\,dx=2$ e $\int_0^2 f(x)\,dx=-5$. a) Di ciascuno dei seguenti integrali: $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$, $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx, \int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx, \int_0^1 f(2x)\,dx$ dire se le condizioni [1] sono sufficienti per calcolarne il valore e in caso di risposta affermativa qual è questo. [No, 4, –14, –5/2] b) Posto: $f(x) = ax^3 + bx + c$, dove *a*, *b*, *c* sono parametri reali con $a \ne 0$, determinare le curve di equazione $y = f(x)$ che soddisfano alle condizioni [1]. [$f(x) = (2/3k - 13/3)\, x^3 + (37/6 - 7/3k)\, x + k$] c) Dimostrare che ognuna delle curve trovate ha uno ed un solo punto di flesso che è centro di simmetria per la curva medesima. [$F \equiv (0; k)$] d) Determinare quella, tra tali curve, che ha il flesso nel punto di ordinata –4. [$k = -4$] e) Fra le curve suddette determinare, infine, quelle che hanno punti estremanti e quelle che non ne hanno. [$k < 37/14 \vee k > 13/12$]

58. (Liceo scientifico PNI 1999/2000) Assegnata la funzione: $f(x) = a\cdot ln^2(x) + b\cdot ln(x)$, dove il logaritmo si intende in base *e*, il candidato: a) determini per quali valori di *a* e *b* la *f*(*x*) ha un minimo relativo nel punto $\left(\sqrt{e};-\frac{1}{4}\right)$. [$a = 1 \wedge b = -1$] b) disegni la curva grafico della *f*(*x*) per i valori di *a* e di *b* così ottenuti e calcoli l'area della regione finita da essa delimitata con l'asse *x*. [$x_m = \sqrt{e}$; A = 3 – *e*]

59. (Liceo scientifico 2000/2001) Considerato un qualunque triangolo *ABC*, siano *D* ed *E* due punti interni al lato *BC* tali che: $\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}$. Siano poi *M* ed *N* i punti medi rispettivamente dei segmenti *AD* ed *AE*. a) Dimostrare che il quadrilatero *DENM* è la quarta parte del triangolo *ABC*. b) Ammesso che l'area del quadrilatero *DENM* sia $45/2a^2$, dove *a* è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo $A\hat{B}C$ sia acuto e si abbia inoltre: $\overline{AB}=13\,a$, $\overline{BC}=15\,a$, verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo. c) Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto b), ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta *BC* e passante per i punti *M*, *N*, *C*. [$y = -2/25x^2 + 1/5x + 6a$] d) Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo *ADC*. [$135\,a^2/5$, $345a^2/8$]

60. (Liceo scientifico 2000/2001) Sia *f*(*x*) una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale,

tale che $f(0) = 2$. Calcolare: $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{2xe^x}$. [1]

61. (Liceo scientifico 2001/2002) La funzione reale di variabile reale $f(x)$, continua per ogni x, è tale che: $\int_0^2 f(x)\,dx = a,\ \int_0^6 f(x)\ dx = b$, dove a e b sono numeri reali. Determinare, se esistono, i valori a, b per cui risulta: $\int_0^3 f(2x)\ dx = ln(2)$ e $\int_1^3 f(2x)\ dx = ln(4)$. [$a = ln(¼)$, $b = ln(4)$]

62. (Liceo scientifico PNI 2001/2002) Due numeri x e y hanno somma e quoziente uguali a un numero reale a non nullo. Riferito il piano a un sistema S di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche (x, y): a) si interpreti e discuta il problema graficamente al variare di a; [Intersezione di due rette, una delle quali privata del punto di ordinata nulla] b) si trovi l'equazione cartesiana del luogo γ dei punti $P \equiv (x, y)$, che soddisfano al problema; $\left[x = \frac{y^2}{y-1}\right]$ c) si rappresentino in S sia la curva γ che la curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante; d) si determini l'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da γ e da γ' e se ne dia un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati; [0,106] e) si calcoli y nel caso che x sia uguale a 1 e si colga la particolarità del risultato. $\left[y = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right]$

63. (Liceo scientifico 2002/2003) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$ g, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$. [≈ 0,96]

64. (Liceo scientifico PNI 2002/2003) L'equazione cartesiana della versiera di Agnesi è: $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$, si provi che l'area compresa fra tale curva e il suo asintoto orizzontale è quattro volte quella del cerchio γ di diametro $OA = a$, con $A \equiv (0; a)$.

65. (Liceo scientifico PNI 2002/2003) Sia $f(x) = a\cdot 2^x + b\cdot 2^{-x} + c$ con a, b, c numeri reali. Si determinino a, b, c in modo che: la funzione f sia pari; $f(0) = 2$; $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{3}{2\cdot\log 2}$. [$a = b = 1$, $c = 0$] a) Si studi la funzione g ottenuta sostituendo ad a, b, c i valori così determinati e se ne disegni il grafico G. [minimo in O] b) Si consideri la retta r di equazione $y = 4$ e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca G, mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta. [≈± 1,899] c) Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra r e G. [≈ 5,2045] d) Si calcoli $\int \frac{1}{g(x)}dx$. $\left[\frac{tan^{-1}\left(2^x\right)}{ln(2)} + c\right]$ e) Si determini la funzione g' il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta r. [$g'(x) = 8 - 2^x - 2^{-x}$]

66. (Liceo scientifico PNI 2002/2003 e 2005/06) Verificare l'uguaglianza: $\pi = 4\cdot\int_0^1 \frac{1}{1+x^2\,dx}$ e utilizzarla per calcolare un'approssimazione di π, applicando un metodo di integrazione numerica.

67. (Liceo scientifico PNI 2002/2003) Dare un esempio di solido il cui volume è dato da $\int_0^1 \pi\cdot x^3\,dx$.

68. (Liceo scientifico 2003/2004) Sia f la funzione definita da: $f(x) = 2x - 3x^3$. Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta $y = c$ che interseca f in due punti distinti e le regioni finite di piano R e S che essa delimita con G. Precisamente: R delimitata dall'asse y, da f e dalla retta $y = c$ e S delimitata da G e dalla retta $y = c$. Determinate c in modo che R e S siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di G con la retta $y = c$. $\left[c = \frac{4}{9}; x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{3}\right]$

69. (Liceo scientifico 2003/2004) Calcolate: $\int_0^1 sin^{-1}\left(x\right)dx$. [π/2 – 1]

70. (Liceo scientifico 2004/2005) Nel primo quadrante del sistema di riferimento O*xy*, ortogonale e monometrico, si consideri la regione *R*, finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ d'equazione: $y = 6 - x^2$. a) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di *R* attorno all'asse *y*. [18π] b) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno alla retta $y = 6$. $\left[\frac{36\cdot\sqrt{6}}{5}\cdot\pi\right]$ c) Si determini il valore di *k* per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di R. $\left[6-3\cdot\sqrt[3]{2}\right]$ d) Per $0<t<\sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa *t*. Si determini $A(1)$. [49/4] e) Si determini il valore di t per il quale $A(t)$ è minima. $\left[6\cdot\sqrt{2}\right]$

71. (Liceo scientifico 2004/2005) Si consideri la funzione *f* definita sull'intervallo $[0;+\infty[$ da:

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=1/2x^2[3-2\log(x)]+1 \ se \ x>0 \end{cases}$$

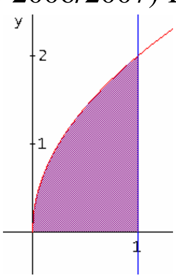
e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento *Oxy*, ortogonale e monometrico. a) Sia *n* un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di *n*, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente *r* e dalle rette: $x=\frac{1}{n}$ e $x = 1$. $\left[\int_{1/n}^{1}\left[f(x)-2x-\frac{1}{2}\right]dx\right]$ b) Si calcoli il limite per *n* che tende a $+\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto. [1/9]

72. (Liceo scientifico PNI 2004/2005) Nel piano *Oxy* sono date le curve χ e *r* d'equazioni: λ: $x^2 = 4(x - y)$ e *r*: $4y = x + 6$. a) Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da λ e dalla retta *s*, simmetrica di *r* rispetto all'asse *x*. [343/24] b) Si determini il valore di *c* per il quale la retta $y = c$ divide a metà l'area della regione S del I quadrante compresa tra λ e l'asse *x*. $\left[1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right]$ c) Si determini il volume del solido di base S le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse *x* sono quadrati. [32/15]

73. (Liceo scientifico 2005/2006) Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = ln(x)$ e $g(x) = x^2$. Si calcoli l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$. $\left[\frac{10}{3}-2\cdot ln(2)\right]$

74. (Liceo scientifico PNI 2005/2006) Si considerino le funzioni $f(x) = ln(x)$ e $g(x) = -e^2\cdot x^2$. Si calcoli, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni *f* e *g* (con $x > 0$) nella striscia di piano determinata dalle rette d'equazioni $y = -1$ e $y = -2$. $\left[\frac{4\cdot\sqrt{2}-5}{3e}+\frac{1}{e^2}\right]$

75. (Liceo scientifico 2006/2007) La regione R delimitata dal grafico di $y=2\sqrt{x}$, dall'asse *x* e dalla retta $x = 1$ (in figura)



è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse *x*, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di *S*. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

76. (Liceo scientifico 2006/2007) Se $f(x)$ è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo [–2, 2], che dire del suo integrale esteso a tale intervallo? [È nullo]

77. (Liceo scientifico 2006/2007) Si calcoli l'integrale indefinito $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ e, successivamente, si veri-

fichi che il risultato di $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ è in accordo con il suo significato geometrico.

78. (Liceo scientifico PNI 2006/2007) Si calcoli $\int_0^t \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$; successivamente se ne trovi il limite per $t \to \infty$ e si interpreti geometricamente il risultato. [$tan^{-1}(e) - \pi/4$; $\pi/4$]

79. (Liceo scientifico PNI 2006/2007) La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione $y = ln(x)$ e l'asse x, con $1 \le x \le e$, è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di S e se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2}. [$3 \cdot (e - 2)$]

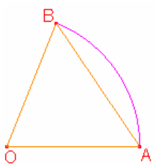
80. (Liceo scientifico PNI 2007/2008) Si determini un polinomio $P(x)$ di terzo grado tale che si abbia: $P(0) = P'(0) = 0$, $P(1) = 0$ e $\int_0^1 P(x)\,dx = \frac{1}{12}$. [$-x^3 + x^2$]

81. (Liceo scientifico PNI 2007/08) Si calcoli l'area Ω della parte di piano delimitata dalla funzione $y = \frac{1}{2}x - 2 + \frac{3}{2x}$ e dalle tangenti a essa nei punti A(1, 0), B(3, 0). Verificato che è $\Omega = \frac{3}{2}\cdot\left(ln(3) - 1\right)$ si illustri una procedura numerica per il calcolo approssimato di $ln(3)$.

82. (Liceo scientifico PNI 2007/2008) Data la funzione $h(x) = 2^x - x^2$, si tracci il suo grafico e si calcoli l'area racchiusa tra il grafico di h e l'asse x sull'intervallo [2; 4]. $\left[\frac{56}{3} - \frac{12}{ln(2)}\right]$

83. (Liceo scientifico PNI 2007/2008) Un solido ha per base un cerchio di raggio 1. Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare ad un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Si calcoli il volume del solido. $\left[\frac{4}{3}\cdot\sqrt{3}\right]$

84. (Liceo scientifico 2008/2009) È assegnato il settore circolare AOB di raggio 2 e ampiezza $\frac{\pi}{3}$.

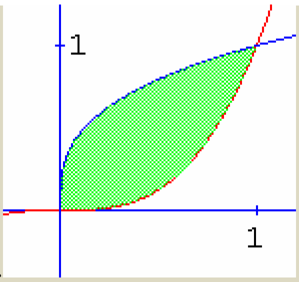


Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OA sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W. [8/3]

85. (Liceo scientifico 2008/2009) Sia D la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, dalla funzione $f(x) = ln(x)$ e dalla retta $y = 1$. Si calcoli l'area di D. [$e - 1$] Si calcoli il volume del solido generato da D nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x = -1$. $\left[\frac{\pi}{2}\cdot\left(e^2 + 4e - 5\right)\right]$

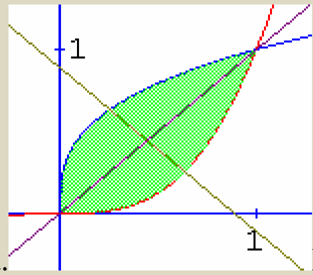
86. (Liceo scientifico PNI 2008/2009) Si calcoli $\int_0^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) dx$ e se ne dia l'interpretazione geometrica. [$3 - 9e^{-2}$]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente problema assegnato agli esami di Liceo scientifico PNI 2008/2009. Sia D la regione finita del primo quadrante delimitata da $g(x) = x^3$ e dal grafico della funzione inversa di g. Si calcoli l'area di D. Determiniamo la funzione inversa. $y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$. Rappresentiamo le due funzioni ed evidenziamo la regione D. 

Si determina abbastanza semplicemente la seconda intersezione delle curve nel punto (1; 1). Pertanto l'area si calcoli abbastanza facilmente

$$\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - x^3\right) dx = \int_0^1 \left(x^{1/3} - x^3\right) dx = \left[\frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left[\frac{3x^{4/3}}{4} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

b) La regione D è la base di un solido W le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di W. La sezione di area massima si ottiene ovviamente quando la generica retta perpendicolare alla bisettrice stacca la massima corda. 

Determinare le intersezioni della perpendicolare generica con le due curve è alquanto complicato, dato che abbiamo a che fare con equazioni di terzo grado. Pertanto conviene determinare metà della corda, data la simmetria di D rispetto alla prima bisettrice. Quindi scelto un generico punto su una delle due curve, per esempio sulla $g(x)$, determiniamo la sua distanza dalla prima bisettrice. $\frac{|x^3 - x|}{\sqrt{2}}$. Determiniamo il massimo di questa funzione per $0 < x < 1$. $D\left(\frac{x^3 - x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3x^2 - 1}{\sqrt{2}}$, che si annulla per $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (unico dei due zeri compreso in [0; 1]) . Si verifica facilmente che è un massimo, quindi la massima corda è lunga $2 \cdot \frac{\left|\left(\sqrt{3}/3\right)^3 - \sqrt{3}/3\right|}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{9}$. E perciò la massima sezione misura $\frac{8 \cdot \sqrt{6}}{3}$. Il solido è una specie di parallelepipedo rettangolo la cui base è D, pertanto il volume è semplicemente l'area della base per l'altezza costante. ½ · 12 = 6.

87. (Liceo scientifico PNI 2008/2009) Siano $0 < a < b$ e $x \in [-b, b]$. Si provi che $\int_{-b}^{b} |x - a| dx = a^2 + b^2$.

88. (Liceo scientifico PNI 2010/2011) Sia f la funzione definita sull'insieme ℝ dei numeri reali da $f(x) = x + ln(4) + \frac{2}{e^x + 1}$. Posto $I(\beta) = \int_0^{\beta} \left[f(x) - x - ln(4)\right] dx$, si calcoli $\lim_{\beta \to +\infty} I(\beta)$. Qual è il significato geometrico del risultato ottenuto? [2 · ln(2)]

89. (Liceo scientifico PNI 2010/2011) Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da: $f(x) = x^3 - 16x$, $g(x) = sin(\pi/2x)$. a) L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di f e g sull'intervallo [0; 4]. Si calcoli l'area di R. [64] b) In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da $h(x) = 5 - x$. quale sarà il volume d'acqua nella piscina? [8/π + 2752/15] Quanti litri d'acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri? [≈ 186013]

90. (Liceo scientifico PNI 2010/2011) Sia R la regione delimitata, per $x \in [0, \pi]$, dalla curva $y = sin(x)$ e

dall'asse x e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W. [$2\pi^2$]

91. (Liceo scientifico 2010/2011) Si considerino le funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da: $f(x) = x^3 - 4x$, $g(x) = sin(\pi x)$. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy si studino le funzioni f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f, G_g. a) Sia R la regione del piano delimitata da G_f e G_g sull'intervallo [0; 2]. Si calcoli l'area di R. [4] b) La regione R rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una piscina. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da $h(x) = 3 - x$. Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? $\left[\int_0^2 \left[sin(\pi x) - x^3 + 4x\right]\cdot(3-x)\,dx\right]$ Supposte le misure in metri, quanti litri d'acqua contiene la piscina? [≈ 8370]

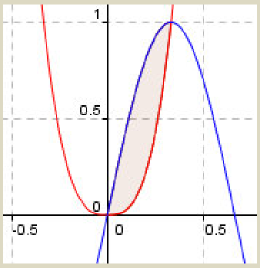
92. (Liceo scientifico 2010/2011) Si studi su $\mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (x - 1)\, e^{-x/3} + 3$ e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ, dall'asse y e dalla retta $y = 3$. $\left[\frac{9}{\sqrt[3]{e}} - 6\right]$

93. (Liceo scientifico 2010/2011) Sia R la regione delimitata dalla curva $y = x^3$ e dall'asse x e dalla retta $x = 2$ e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W. [$64\pi/5$]

94. (Liceo scientifico 2010/2011) Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y = cos(x)$ e dall'asse x da $x = 1$ a $x = 2$ radianti. [$2 - sin(1) - sin(2)$]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente problema assegnato agli esami di Liceo scientifico 2011/2012 Siano f e g le funzioni definite, per tutti gli x reali, da $f(x) = |27x^3|$ e $g(x) = sen(3/2\pi x)$. a) Sia R la regione delimitata da Gf e da Gg. Si calcoli l'area di R.



La regione R è quella mostrata in figura.

L'unico problema potrebbe essere quello di determinare l'ascissa del secondo punto di intersezione, cioè di risolvere l'equazione $27x^3 = sen(3/2\pi x)$. Ma facilmente si ha: $27(1/3)^3 = sen(3/2\pi \cdot(1/3))$, quindi l'area da calcolare è $\int_0^{\frac{1}{3}} \left[sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 27x^3\right] dx$. Perciò:

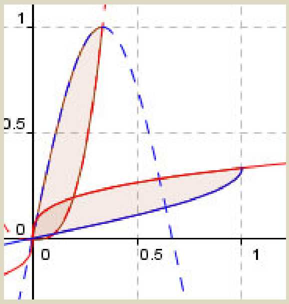
$$\int_0^{\frac{1}{3}} \left[sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 27x^3\right] dx = \frac{2}{3\pi}\cdot\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{3}{2}\pi sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right) dx - 27\cdot\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{2}{3\pi}\cdot\left[-cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right)\right]_0^{\frac{1}{3}} - 27\cdot\frac{1}{4\cdot 81} = \frac{2}{3\pi}\cdot(0+1) - \frac{1}{12} = \frac{8-\pi}{12\pi} \approx 0{,}13$$

b) La regione R, ruotando attorno all'asse x, genera il solido S e, ruotando attorno all'asse y, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T.

per la prima domanda si ha: $S = \pi\int_0^{\frac{1}{3}} \left[sen^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - \left(27x^3\right)^2\right] dx = \frac{5}{42}\cdot\pi$. Per il secondo volume dobbiamo ricorrere alle funzioni inverse delle date, per potere applicare la precedente regola, ricondurre cioè il problema a una rotazione attorno all'asse delle ascisse:

$y = sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \Rightarrow \frac{3}{2}\pi x = sen^{-1} y \Rightarrow x = \frac{2}{3\pi} \cdot sen^{-1} y; y = 27x^3 \Rightarrow x = \frac{\sqrt[3]{y}}{3}$, ovviamente cambiano anche gli



estremi della regione passando da [0; 1/3] a [0; 1], come meglio mostrato in figura

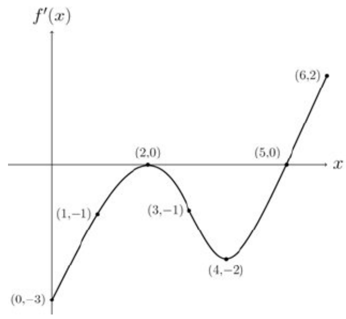
Quindi il volume cercato è $T = \pi \int_0^1 \left[\frac{2}{3\pi} \cdot \left[sen^{-1}(x)\right]^2 - \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{3}\right)^2 \right] dx = \frac{2 \cdot (20 - \pi^2)}{45\pi} \approx 0{,}14$

95. (Liceo scientifico PNI 2011/2012) Siano *f* e *g* le funzioni definite da $f(x) = e^x$ e $g(x) = ln(x)$. a) Fissato un riferimento cartesiano *Oxy*, si disegnino i grafici di *f* e di *g* e si calcoli l'area della regione *R* che essi delimitano tra $x = ½$ e $x = 1$. $\left[e - \sqrt{e} + ln\left(\sqrt{2}\right) + 1/2\right]$ b) La regione *R*, ruotando attorno all'asse *x*, genera il solido *S* e, ruotando attorno all'asse *y*, il solido *T*. Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di *S* e di *T*.

$$\left[\begin{array}{l} S = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{2x}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \left(e^2 - e\right); \\ T = \pi \int_{ln(1/2)}^{0} e^{2x}\, dx - \frac{\pi}{4} \cdot \left(1 + \sqrt{e}\right) + \pi \cdot e - \pi \cdot \int_{\sqrt{e}}^{e} ln^2(x)\, dx = \frac{\pi}{8} \cdot \left(8 \cdot \sqrt{e} + 1\right) \approx 5{,}58 \end{array}\right]$$

96. (Liceo scientifico 2011/2012) Nel primo quadrante del sistema di riferimento *Oxy* sono assegnati l'arco di circonferenza di centro *O* e estremi $A \equiv (3, 0)$ e $B \equiv (0, 3)$ e l'arco *L* della parabola d'equazione $x^2 = 9 - 6y$, i cui estremi sono il punto *A* e il punto (0, 3/2). a) Sia *r* la retta tangente in *A* a *L*. Si calcoli l'area di ciascuna delle due parti in cui *r* divide la regione *R* racchiusa tra *L* e l'arco *AB*. $\left[\frac{3}{2}; \frac{9\pi - 18}{4}\right]$ b) La regione *R* è la base di un solido *W* le cui sezioni, ottenute tagliando *W* con piani perpendicolari all'asse *x*, hanno, per ogni $0 \le x \le 3$, area $S(x) = e^{5 - 3x}$. Si determini il volume di *W*. $[-1/3 \cdot (e^{-4} - e^5)]$ c) Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R intorno all'asse *x*.
[72π/5]

97. (Liceo scientifico PNI 2011/2012) Della funzione *f*, definita per $0 \le x \le 6$, si sa che è dotata di derivata prima e seconda e che il grafico della sua derivata $f'(x)$, disegnato a lato, presenta due tangenti orizzontali per $x = 2$ e $x = 4$. Si sa anche che $f(0) = 9$, $f(3) = 6$ e $f(5) = 3$.



a) Si trovino le ascisse dei punti di flesso di *f* motivando le risposte in modo esauriente. [$x = 2$, $x = 4$] b) Per quale valore di *x* la funzione *f* presenta il suo minimo assoluto? Sapendo che $\int_0^6 f'(t)\,dt = -5$ per quale valore di *x* la funzione *f* presenta il suo massimo assoluto? [$x = 6$] c) Sia *g* la funzione definita da $g(x) = x f(x)$. Si trovino le equazioni delle rette tangenti ai grafici di *f* e di *g* nei rispettivi punti di ascissa $x = 3$ e si determini la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto che esse formano. [$y = -x + 9$; $y = 3x + 9$; ≈ 63°26′6″]

98. (Liceo scientifico 2012/2013) La funzione f è definita da $f(x)=\int_0^x\left[cos(t/2)+1/2\right]dt$ per tutti i numeri reali x appartenenti all'intervallo chiuso [0, 9]. 1. Si calcolino $f'(\pi)$ e $f'(2\pi)$. [½; – ½] 2. Si tracci, in un sistema di coordinate cartesiane, il grafico Σ di $f'(x)$ e da esso si deduca per quale o quali valori di x, $f(x)$ presenta massimi o minimi. Si tracci altresì l'andamento di $f(x)$ deducendolo da quello di $f'(x)$. [$x_M = 0$; $x_m = 2\pi$] 3. Si trovi il valor medio di $f'(x)$ sull'intervallo [0, 2π]. [½] 4. Sia R la regione del piano delimitata da Σ e dall'asse x per $0 \le x \le 4$; R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x hanno, per ciascun x, area $A(x) = 3\ sen\ (\pi/4\ x)$. Si calcoli il volume di W. [24/π]

99. (Liceo scientifico 2012/2013) Sia f la funzione definita, per tutti gli x reali, da $f(x)=\dfrac{8}{4+x^2}$. Si consideri la regione R compresa tra $f(x)$ e l'asse x sull'intervallo [0, 2]. Si provi che R è equivalente a un cerchio di raggio 1 e si provi altresì che la regione compresa tra $f(x)$ e tutto l'asse x è equivalente a quattro volte il detto cerchio. La regione R, ruotando attorno all'asse y, genera il solido W. Si scriva, spiegandone il perché, ma senza calcolarlo, l'integrale definito che fornisce il volume di W.

$$\left[\pi\cdot\int_1^2\left(\sqrt{\frac{8}{x}-4}\right)^2 dx=4\pi\cdot\left[ln(4)-1\right]\right]$$

100. (Liceo scientifico PNI 2012/2013) Sia la funzione $f(x)=\dfrac{8}{1+e^{2-x}}$, si calcoli l'area della regione di piano delimitata da $f''(x)$ e dall'asse x sull'intervallo [0, 2].
$$\left[2-\frac{8e^2}{\left(e^2+1\right)^2}\right]$$

101. (Liceo scientifico PNI 2012/2013) Sia f la funzione definita per tutti gli x positivi da $f(x) = x^3\ ln(x)$. Sia R la regione delimitata da essa e dall'asse x sull'intervallo aperto a sinistra]0, 1]. Si calcoli l'area di R, illustrando il ragionamento seguito, e la si esprima in mm^2 avendo supposto l'unità di misura lineare pari a 1 *decimetro*. [625 mm^2]

Quelli che … vogliono sapere di più

Equazioni differenziali

Gli integrali indefiniti sono un caso particolare di un più generale e importante oggetto matematico, infatti determinare le primitive della funzione $f(x)$, equivale a risolvere l'equazione $g'(x) = f(x)$, in cui l'incognita da trovare è $g(x)$, la cui soluzione formale è appunto $g(x)=\int f(x)dx$. L'equazione che cerchiamo di risolvere non ha come incognita uno o più numeri reali, come siamo stati abituati in algebra, ma una funzione. Diamo un nome particolare a questo tipo di equazioni.

Definizione 4

Un'equazione le cui incognite sono una o più funzioni, si chiama **equazione funzionale**.

Gli integrali indefiniti sono particolari equazioni funzionali, anche se l'incognita non è presente come funzione, ma come sua derivata.

Definizione 5

Un'equazione funzionale, in cui è presente la derivata di qualsiasi ordine della funzione incognita, si chiama **equazione differenziale**.

Esempio 17

L'equazione $y' \cdot sin(y) = ln(x) + y - 1$, in cui $y = f(x)$ è la funzione incognita da determinare, è un'equazione differenziale.

Le equazioni differenziali hanno un ruolo molto importante in tutte le scienze, per esempio nella determinazione dei modelli di crescita delle popolazioni. Uno dei primi modelli del genere è dovuto A Thomas Malthus (1766 – 1834), il quale ipotizzò che la crescita della popolazione, non solo umana, dipendesse in modo proporzionale dal numero di abitanti già presenti. Quindi indicando con $p(t)$ il numero di abitanti al tempo t, la loro variazione è ovviamente di tipo differenziale, cioè $p'(t)$. Perciò secondo Malthus per ogni popolazione esiste una costante k per la quale si ha: $p'(t) = k \cdot p(t)$. Ovviamente questo modello non è realistico, poiché presuppone che la popolazione cresca senza alcun limite. Questo fatto è ovviamente impossibile per diversi fattori, intanto la popolazione ha a disposizione un numero limitato di metri quadrati su cui stare, così come ha un numero limitato di beni di cui disporre e con i quali vivere. Per questo successivamente Pearl e Reed modificarono il modello malthusiano, ipotizzando appunto che vi fosse un valore limite, M, al di là del quale la popolazione non può crescere. Hanno perciò ipotizzato che la proporzione fosse con il fattore $p \cdot (1 - p/M)$ e quindi l'equazione differenziale relativa è $p'(t) = k \cdot p(t) \cdot (1 - p(t)/M)$.
Cercheremo di risolvere queste equazioni successivamente, intanto cominciamo a catalogare le equazioni differenziali.

Definizione 6

Data un'equazione differenziale, diciamo suo **ordine** l'ordine massimo della derivata della funzione incognita; diciamo suo **grado** l'esponente massimo della derivata di ordine massimo presente.

Esempio 18

- Un integrale è un'equazione differenziale del primo ordine e di primo grado(si dice anche lineare).
- L'equazione $y'' + ln(y) = x^2$, è del secondo ordine e di primo grado.
- L'equazione $2(y'')^3 + y^{IV} - x = (y^{IV})^2$, è di quarto ordine e di secondo grado.
- Sia l'equazione di Malthus $p'(t) = k \cdot p(t)$ che quella di Pearl e Reed sono lineari di primo grado.

Ovviamente le equazioni differenziali più semplici saranno quelle di primo grado e primo ordine, che ovviamente non sono solo gli integrali.

Esempio 19

L'equazione differenziale $y' + y + 1 = 0$ è del primo ordine e di primo grado e non è un integrale semplice.

Definizione 7

Un'equazione differenziale di primo ordine si chiama **equazione differenziale lineare**. Se presenta solo i termini y' e y si dice **omogenea**.

Esempio 20

Le equazioni differenziali seguenti sono tutte lineari: $y' + xy = 0$; $y' + 2y + x - 3 = 0$. La prima di esse è omogenea, la seconda no.

Riferendoci all'esempio precedente pensiamo che la seconda equazione dovrebbe essere più semplice da risolvere della prima, perché in essa i coefficienti delle incognite sono numeri, mentre nella prima il coefficiente di y è variabile, x.

Definizione 8

Un'equazione differenziale lineare in cui i coefficienti dell'incognita, comunque essa si presenti, sono numeri reali, si dicono **equazioni a coefficienti costanti**.

Abbiamo detto che in generale un'equazione differenziale ha infinite soluzioni.

Esempio 21

L'equazione differenziale $xy'+\frac{1}{y'}-y=0$ ha come sue soluzioni per esempio le funzioni $y_1 = x + 1$ e $y_2 = 3x + 1/3$. Infatti abbiamo: $y_1' = 1$ e $y_2' = 3$, da cui: $x\cdot 1+\frac{1}{1}-(x+1)=0; x\cdot 3+\frac{1}{3}-\left(3x+\frac{1}{3}\right)=0$. Ovviamente ciò non significa che ogni funzione è soluzione della data equazione, per esempio non lo è $y_3 = x$, dato che si ha: $x\cdot 1'+\frac{1}{1}-x=1$.

Poniamo ancora qualche definizione.

Definizione 9

Una soluzione di un'equazione differenziale si chiama suo **integrale particolare**.

Esempio 22

Le funzioni $y_1 = x + 1$ e $y_2 = 3x + 1/3$, sono entrambe integrali particolari dell'equazione $xy'+\frac{1}{y'}-y=0$.

Definizione 10

Un'espressione parametrica che contenga infinite soluzioni di un'equazione differenziale si chiama suo **integrale generale**.

Esempio 23

$y = cx + 1/c$ (*), con c numero reale non nullo, rappresenta l'integrale generale dell'equazione $xy'+\frac{1}{y'}-y=0$, infatti si ha: $y' = c$ e $x\cdot c+\frac{1}{c}-\left(cx+\frac{1}{c}\right)=0, \forall c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ma non contiene tutti gli integrali particolari, per esempio non contiene l'integrale particolare $y=2\cdot\sqrt{x}$. Verifichiamo che questo è effettivamente un integrale particolare: $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}-2\cdot\sqrt{x}=x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{x-x}{\sqrt{x}}=0$.

In considerazione dell'esempio precedente abbiamo la seguente definizione.

Definizione 11

Un'integrale particolare che non faccia parte dell'integrale generale di un'equazione differenziale si chiama suo **integrale singolare**.

Cominciamo a considerare qualche tipo di equazione differenziale.

Esempio 24

L'equazione differenziale $yy' = cos(x)$, si risolve facilmente tenendo conto che $y = y(x)$ e quindi $y' = \frac{dy}{dx}$, se quindi trattiamo questa espressione differenziale alla stregua di una frazione l'equazione si può riscrivere: $y\,dy = cos(x)\,dx$ e quindi adesso possiamo risolverla semplicemente integrando termine a termine, poiché ogni membro contiene una sola delle due variabili, nonché il relativo fattore differenziale. Si ha perciò: $\int y\,dy = \int cos(x)\,dx$, che si risolve ovviamente scrivendo una volta, a piacere nel primo o secondo membro, il parametro additivo c. Abbiamo quindi: $\frac{y^2}{2} = sin(x) + c \Rightarrow y = \pm\sqrt{2sin(x) + 2c}$, che è l'integrale generale, il cui dominio è ovviamente dato dai valori x per i quali $2sin(x) + 2c \geq 0$.

Le precedenti equazioni meritano una classificazione.

Definizione 12

Un'equazione differenziale che può scriversi nella forma $y' = f(x) \cdot g(y)$ si dice **equazione differenziale a variabili separabili**.

Si ha il seguente ovvio risultato.

Teorema 10

L'integrale generale dell'equazione differenziale a variabili separabili $y' = f(x) \cdot g(y)$, supposte $f(x)$ e $g(y)$ integrabili e $g(y) \neq 0$, si ottiene risolvendo l'equazione $\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)\,dx$.

Dimostrazione sulla falsariga dell'esempio 24.

Consideriamo adesso le equazioni differenziali lineari.

Esempio 25

- L'equazione differenziale $y' + y = 0$, è lineare a coefficienti costanti. Per risolverla la cominciamo a scrivere *scorporando* le variabili della derivata: $dy + y\,dx = 0$, così ci accorgiamo che essa è a variabili separabili, poiché possiamo scriverla $dy/y = -dx$ e quindi si risolve integrando membro a membro:
$$\int \frac{1}{y}dy = -\int dx \Rightarrow ln(y) = -x + c \Rightarrow y = e^{-x+c}$$
- L'equazione differenziale $y' + xy = 0$, è lineare a coefficienti variabili ed è ancora a variabili separabili, infatti può scriversi: $dy/y = -xdx$ che si risolve: $\int \frac{1}{y}dy = -\int x\,dx \Rightarrow ln(y) = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y = e^{-x^2/2+c}$.
- L'equazione differenziale $y' + xy = x$, è lineare a coefficienti variabili ma non è a variabili separabili.
- Risolviamo l'equazione differenziale di Malthus $p' = kp$. Si ha: $dp/dt = kp \Rightarrow dp/kp = dt \Rightarrow ln(kp)/k = t + c \Rightarrow ln(kp) = kt + kc$. Possiamo indicare con $Ct = kt + kc$, ottenendo: $kp = e^{Ct} \Rightarrow p = p_0 \cdot e^{kt}$, in cui abbiamo incluso tutte le costanti nell'unica p_0, che indica il valore della popolazione al tempo $t = 0$.

Abbiamo quindi visto che le equazioni differenziali lineari omogenee sono a variabili separabili e quindi le sappiamo risolvere, vediamo di risolvere anche quelle non omogenee. Abbiamo altresì visto che entrambe le equazioni differenziali lineari omogenee avevano come integrale generale un'espressione esponenziale. In effetti in generale si ha: $dy + f(x)\,y\,dx = 0 \Rightarrow dy/y = -f(x)\,dx\;0 \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = -\int f(x)\,dx \Rightarrow y = e^{-\int f(x)dx}$. Questo ci porta a pensare che anche l'equazione differenziale non omogenea $y' + f(x)\,y = g(x)$, abbia, almeno come un suo integrale particolare, la funzione $y = e^{-\int f(x)dx}$.

Esempio 26

L'equazione differenziale $y' + xy = x$, ha come suo integrale particolare $y = e^{-x^2/2}$? Verifichiamo. Si ha: $y' = -x \cdot e^{-x^2/2}$, da cui $-x \cdot e^{-x^2/2} + x \cdot e^{-x^2/2} = x$. La risposta è negativa.

Il risultato che risolve la questione precedente è il seguente.

Teorema 11

L'integrale generale dell'equazione differenziale lineare $y' + f(x) \cdot y = g(x)$, è

$$y = e^{-\int f(x)dx} \cdot \left[\int e^{\int f(x)dx} \cdot g(x)\,dx + c \right].$$

Dimostrazione omessa

Esempio 27

Risolviamo l'equazione differenziale $y' + xy = x$, usando il risultato del teorema precedente. Si ha: $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$, quindi $y = e^{-x^2/2} \cdot \left[\int e^{x^2/2} \cdot x\,dx + c \right] \Rightarrow y = e^{-x^2/2} \cdot \left[e^{x^2/2} + c \right] \Rightarrow y = 1 + c \cdot e^{-x^2/2}$. Verifichiamo: $y' = -c \cdot x \cdot e^{-x^2/2} \Rightarrow -c \cdot x \cdot e^{-x^2/2} + x \cdot \left(1 + c \cdot e^{-x^2/2}\right) = x \Rightarrow \cancel{-c \cdot x \cdot e^{-x^2/2}} + x + \cancel{c \cdot x \cdot e^{-x^2/2}} = x$.

Per concludere questa breve introduzione alle equazioni differenziali consideriamo quelle lineari omogenee di ordine n e a coefficienti costanti. Cioè equazioni del tipo $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$. Enunciamo i seguenti risultati.

Teorema 12

Data l'equazione differenziale omogenea $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$, se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sono suoi integrali particolari, allora lo è anche $c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$, $c_k \in \mathbb{R}$, $1 \le k \le n$.

Dimostrazione

Infatti, dire che y_1 è un integrale particolare vuol dire che si ha: $a_0y_1^{(n)} + a_1y_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y_1' + a_ny_1 = 0$, analogamente per gli altri integrali, quindi

$$a_0y_2^{(n)} + a_1y_2^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y_2' + a_ny_2 = 0,\ \ldots,\ a_0y_n^{(n)} + a_1y_n^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y_n' + a_ny_n = 0$$

d'altro canto $D^{(k)}(c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n) = c_1y_1^{(k)} + c_2y_2^{(k)} + \ldots + c_ny_n^{(k)}$. Pertanto avremo: $a_0 \cdot (c_1y_1^{(n)} + c_2y_2^{(n)} + \ldots + c_ny_n^{(n)}) + a_1 \cdot (c_1y_1^{(n-1)} + c_2y_2^{(n-1)} + \ldots + c_ny_n^{(n-1)}) + \ldots + a_{n-1} \cdot (c_1y_1' + c_2y_2' + \ldots + c_ny_n') + a_n \cdot (c_1y + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n) = c_1 \cdot (a_0y_1^{(n)} + a_1y_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y_1' + a_ny_1) + c_2 \cdot (a_0y_2^{(n)} + a_1y_2^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y_2' + a_ny_2) + \ldots + c_n \cdot (a_0y_n^{(n)} + a_1y_n^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y_n' + a_ny_n) = 0$, che è proprio quello che volevamo dimostrare.

Il risultato precedente ci suggerisce quindi di cercare degli integrali particolari.

Esempio 28

Consideriamo l'equazione differenziale omogenea $y'' + 5y' + 6y = 0$. Poiché $D^{(k)}(e^{ax}) = a^k \cdot e^{ax}$, pensiamo che esistano dei valori reali di a per cui $y = e^{ax}$, possa essere un integrale particolare dell'equazione data. Vediamo di determinare un tale a. Sostituiamo nell'equazione data $y = e^{ax}$, $y' = ae^{ax}$, $y'' = a^2e^{ax}$, ottenendo:

$$a^2e^{ax} + 5ae^{ax} + 6e^{ax} = 0 \Rightarrow e^{ax} \cdot (a^2 + 5a + 6) = 0 \Rightarrow a^2 + 5a + 6 = 0 \Rightarrow a = -2 \vee a = -3$$

Quindi abbiamo trovato due integrali particolari: $y = e^{-2x}$ e $y = e^{-3x}$.

Quanto visto prima non è un caso, ma fa parte di un risultato più generale, che prima di enunciare facciamo precedere da una definizione.

Definizione 13

Data l'equazione differenziale omogenea $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$, l'equazione algebrica $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, si dice **equazione ausiliaria della data equazione differenziale**.

Possiamo enunciare il risultato cercato.

Teorema 13

Data l'equazione differenziale omogenea $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$, siano $h_1, h_2, \ldots, h_n$ le soluzioni, reali o complesse, della sua equazione ausiliaria. Allora $y = e^{h_k x}, 1 \le k \le n$ sono tutti suoi integrali particolari.

Dimostrazione omessa

Per capire meglio il precedente risultato consideriamo qualche esempio.

Esempio 296

- L'equazione differenziale $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$, ha come ausiliaria l'equazione $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, le cui soluzioni sono $x = -2, 1, 3$. Pertanto sono suoi integrali particolari $y = e^{-2x}$, $y = e^x$ e $y = e^{3x}$.
- L'equazione differenziale $y'' + y = 0$, ha come ausiliaria l'equazione $x^2 + 1$, le cui soluzioni sono $x = \pm i$. Pertanto sono suoi integrali particolari $y = e^{-ix}$, $y = e^{ix}$

Il secondo esempio ha bisogno di una definizione, per ottenere una migliore espressione.

Definizione 14

Si ha: $e^{a+ib} = e^a \cdot [cos(b) + i\ sin(b)]$.

Esempio 30

Possiamo quindi dire che $y = cos(x) \pm i\ sin(x)$ sono integrali particolari dell'equazione $y'' + y = 0$.

Per il momento abbiamo parlato di integrali particolari, adesso invece troviamo l'integrale generale.

Teorema 14

Data l'equazione differenziale omogenea $a_0\cdot y^{(n)} + a_1\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\cdot y' + a_ny = 0$, e siano $h_1, h_2, \ldots, h_n$ le soluzioni, reali o complesse, della sua equazione ausiliaria. Allora l'integrale generale è

- $y = c_1e^{h_1x} + c_1e^{h_2x} + \ldots + c_1e^{h_nx}$, se tutte le soluzioni dell'ausiliaria sono distinte;
- Per ogni soluzione dell'ausiliaria di molteplicità k, il generico addendo $c_me^{h_mx}$ del precedente caso, sarà sostituito da $\left(c_1 + c_2x + x^2c_3 + \ldots + c_kx^{k-1}\right)e^{h_mx}$.

Dimostrazione omessa

Esempio 31

- L'integrale generale dell'equazione differenziale $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$ è $y = a\cdot e^{-2x} + b\cdot e^x + c\cdot e^{3x}$.
- L'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' + y = 0$ è $y = a\cdot e^{-ix} + b\cdot e^{ix}$, che può anche scriversi $y = a\ [cos(x) + i\ sin(x)] + b\ [cos(x) - i\ sin(x)]$, o meglio, $y = a \cdot cos(x) + b \cdot i\ sin(x)$.
- L'equazione differenziale $y^{IV} - 2y'' + y = 0$ ha come ausiliaria $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$, che può anche scriversi $(x^2 - 1)^2 = 0$ e perciò ha soluzioni $x = \pm 1$, entrambe di molteplicità 2. Quindi l'integrale generale è $y = (a + bx)\cdot e^{-x} + (c + dx)\cdot e^x$.

Non consideriamo le equazioni non omogenee, chiudiamo invece con un'importante applicazione.

Esempio 32

L'equazione fondamentale della meccanica è $F = m\cdot a$, che può anche scriversi $F = m\cdot y''$, in cui y è la funzione spazio al variare del tempo. Questa equazione rappresenta l'apice del cosiddetto determinismo, cioè di quell'approccio filosofico-scientifico, secondo il quale, conoscendo la posizione e la velocità iniziale di una particella siamo in grado di determinare esattamente il suo percorso.

Il problema precedente, di determinare un integrale particolare di una data equazione differenziale ha un nome.

Definizione 15

Data un'equazione differenziale, il cui integrale generale dipende da n parametri, la determinazione di un integrale particolare che verifica le n condizioni $y(x_0) = a_0$, $y'(x_0) = a_1$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$, si chiama **problema di Cauchy ai valori iniziali**.

Esempio 33

Data l'equazione differenziale $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$ che abbiamo visto avere come integrale generale $y(x) = a\cdot e^{-2x} + b\cdot e^{x} + c\cdot e^{3x}$, vogliamo trovare l'integrale particolare che verifica le condizioni $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$. Per fare ciò, tenuto conto che si ha: $y'(x) = -2a\cdot e^{-2x} + b\cdot e^{x} + 3c\cdot e^{3x}$ e $y''(x) = 4a\cdot e^{-2x} + b\cdot e^{x} + 9c\cdot e^{3x}$ basta risolvere il sistema: $\begin{cases} a\cdot e^{-2\cdot 0} + b\cdot e^{0} + c\cdot e^{3\cdot 0} = 1 \\ -2a\cdot e^{-2\cdot 0} + b\cdot e^{0} + 3c\cdot e^{3\cdot 0} = 0 \\ 4a\cdot e^{-2\cdot 0} + b\cdot e^{0} + 9c\cdot e^{3\cdot 0} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ -2a+b+3c=0 \\ 4a+b+9c=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2/15 \\ b = 7/6 \\ c = -3/10 \end{cases}$. Pertanto l'integrale particolare cercato è $y(x) = 2/15\cdot e^{-2x} + 7/6\cdot e^{x} - 3/10\cdot e^{3x}$.

Non approfondiamo ulteriormente, concludiamo dicendo che non sempre i problemi di Cauchy hanno soluzioni.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Per una molla di massa m di costante elastica k, vale cosiddetta legge di Hooke: $F = -k\cdot x$, in cui x è il tratto di cui la molla viene dilatata o compressa. Ovviamente x è dipendente dal tempo, quindi in effetti dovremmo scrivere $F = -k\cdot x(t)$. Del resto la forza elastica verifica anche la seconda legge della dinamica: $F = m\cdot a$ e visto che l'accelerazione è la derivata seconda dello spazio rispetto al tempo, possiamo scrivere $F = m\cdot x''(t)$. Quindi l'equazione risolvente è differenziale: $m\cdot x''(t) = -k\cdot x(t) \Rightarrow m\cdot x''(t) + k\cdot x(t) = 0$. Questa è un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine.

Determinare ordine e grado delle seguenti equazioni differenziali

Livello 1

1. $y'' + y' - x = 0$ [II; I] $\quad xy''^2 + y^{V} - sin(x) = y^3$ [IV; II] $\quad y^3 + ln(x)y''' - y = x^2$ [III ; I]
2. $xy + (y')^4 - 2x = 0$ [I; IV] $\quad y^5 + y^{VI} + x^4 = (y')^3$ [VI; I] $\quad (y'')^4 + y'' - 3y = x^5$ [II ; IV]

Tradurre in equazione differenziale i seguenti problemi

Livello 2

3. II legge della Dinamica [$m\cdot x''(t) = F$] Oscillatore armonico di pulsazione ω [$x''(t) = -\omega^2\cdot x(t)$]
4. Moto di una molla soggetta a un attrito $c\cdot x'(t)$ [$m\cdot x''(t) + c\cdot x'(t) + k\cdot x(t) = 0$]
5. Diminuzione del principio attivo di un medicinale proporzionale al tempo. [$y'(t) = -k\cdot y(t)$]
6. Diminuzione del tasso di decadimento radioattivo al passare del tempo. [$y'(t) = -k\cdot y(t)$]

Livello 3

7. Circuito RL alimentato da tensione costante V e attraversato da corrente $i(t)$ [$V = R\cdot i(t) + L\cdot i'(t)$]
8. Circuito RLC alimentato da tensione variabile $V(t)$ [$L\cdot i''(t) + R\cdot i'(t) + i(t)/C = V'(t)$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo stabilire se la funzione $y(x) = cos(x) + sin(x) + 8/3 + 8/3\ sin^2(x)$ è un integrale particolare dell'equazione differenziale $y'' + y = 8cos^2(x)$. Verifichiamo: $y'(x) = cos(x) - sin(x) + 16/3\ sin(x) \cdot cos(x)$ e quindi $y''(x) = -cos(x) - sin(x) - 16/3 + 32/3 cos^2(x)$. Adesso sostituiamo: $-cos(x) - sin(x) - 16/3 + 32/3 cos^2(x) + cos(x) + sin(x) + 8/3 + 8/3\ sin^2(x) = -8/3 + 8/3 \cdot [cos^2(x) + sin^2(x)] + 16/3 cos^2(x) = -8/3 + 8/3 + 8cos^2(x) = 8cos^2(x)$. Quindi effettivamente è un suo integrale particolare.

Verificare se i seguenti sono integrali particolari delle rispettive equazioni differenziali

Livello 1

9. $y = 2$; $y' + y - y^2 + 2 = 0$ [Sì] $\qquad y = (x^2 + 1)^2/x$; $y' + 3xy - 2x = 0$ [No]

10. $y = 1/x$; $xy' - 2y + xy^2 + 2/x$ [Sì] $\qquad y = x$; $xy' - 2y + xy^2 + 2/x$ [No]

11. $y = x + 1$; $xy' - cos(y') - y = 0$ [No] $\qquad y = x$; $xy' - cos(y') - y = 0$ [Sì]

12. $y = x + e$; $xy' - e^{y'} - y = 0$ [Sì] $\qquad y = 2x + e^2$; $xy' - e^{y'} - y = 0$ [Sì]

13. $y = 2cos(2x)$; $y'' + 4y = 0$ [Sì] $\qquad y = 3cos(2x) - 2i\ sin(2x)$; $y'' + 4y = 0$ [Sì]

Livello 2

14. $y = \dfrac{1}{\sqrt{e^{-x^2} - 1}}$; $y' - xy - xy^3 = 0$ [Sì] $\qquad y = 2e^{2x} cos(3x)$; $y'' - 4y' + 13y = 0$ [Sì]

15. $y = e^{2x} - 5/2x$; $y'' - 2y' + 5 = 0$ [No] $\qquad y = e^{2x} + e^{-2x} - x^3/12 + x^2/4 - x/8 + 1/8$; $y''' - 4y' - x^2 + 2x = 0$ [Sì]

Livello 3

16. $p(t) = \dfrac{Mp_0}{p_0 + (M - p_0) \cdot e^{-kt}}$, per l'equazione di Pearl e Reed: $p'(t) = k \cdot p(t) \cdot \dfrac{M - p(t)}{M}$. [Sì]

17. $x(t) = A \cdot cos(\omega t) + B \cdot sin(\omega t)$, per l'equazione dell'oscillatore armonico di pulsazione ω (Es. 3). [Sì]

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione differenziale $x \cdot y' = ln(x) \cdot y$. Possiamo scrivere: $x \cdot dy/dx = ln(x) \cdot y$ e ancora $dy/y = ln(x)/x\ dx$. Quindi l'equazione è a variabili separabili. Integriamo membro a membro, ottenendo:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{ln(x)}{x} dx \Rightarrow ln(y) = \frac{ln^2(x)}{2} + c \Rightarrow y = e^{ln^2(x)/2+c}$$

Verifichiamo: $y' = e^{ln^2(x)/2+c} \cdot 2 \cdot \dfrac{ln(x)}{2} \cdot \dfrac{1}{x} = e^{ln^2(x)/2+c} \cdot \dfrac{ln(x)}{x}$, quindi sostituendo:

$$\cancel{x} \cdot e^{ln^2(x)/2+c} \cdot \frac{ln(x)}{\cancel{x}} = ln(x) \cdot e^{ln^2(x)/2+c}.$$

Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali a variabili separabili

Livello 1

18. $y' + xy = 0$ $\left[y = e^{c - x^2/2}\right]$ $\qquad y' + ln(x)y^2 = 0$ $\left[y = \dfrac{1}{x \cdot ln(x) - x - c}\right]$ $\qquad xy' + y^3 = 0$ $\left[y^2 = \dfrac{1}{2 \cdot ln(x) - 2c}\right]$

19. $e^x y' - y = 0$ $\left[y = e^{c - e^{-x}}\right]$ $\qquad y' + e^x y = 0$ $\left[y = e^{c - e^x}\right]$ $\qquad (x^2 + 1) \cdot y' - 1/y = 0$ $[y^2 = 2 \cdot tan^{-1}(x) + 2c]$

20. $\sqrt{1 - x^2} \cdot y' = \dfrac{x}{sin(y)}$ $\left[y = cos^{-1}\left(\sqrt{1 - x^2} - c\right)\right]$ $\qquad (1 + x) \cdot y' + (1 - x) \cdot y = 0$ $\left[y = \dfrac{e^{x+c}}{(x+1)^2}\right]$

Livello 2

21. $(1 + e^x) \cdot y' = e^{2x} \cdot e^y$ $\left[y = ln\left(\dfrac{1}{ln\left(e^x+1\right)-e^x-c}\right)\right]$ $\sqrt{1-x^2}\cdot y' = \dfrac{1}{ln(y)}$ $[y \cdot (ln(y) - 1) = sin^{-1}(x) + c]$

22. $y' + ln(x) \cdot y^2 = 0$ $\left[y = \dfrac{1}{x\cdot ln(x)-x-c}\right]$ $(x^2 - x) \cdot y' = \sqrt{y}$ $\left[y = \dfrac{1}{4}\cdot\left[ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+c\right]^2\right]$

23. $y'/ln(x) = e^{3y} \cdot ln(x)$ $\left[y = -\dfrac{1}{3}\cdot ln\left[6x\cdot ln(x)-3x\cdot ln^2(x)-6x-3c\right]\right]$

24. $[sin(x) + cos(x)]\, y' = [sin(x) - cos(x)]/y^2$ $\left[y = \sqrt[3]{3c-ln\left[cos(x)+sin(x)\right]^3}\right]$

Livello 3

25. $y' = x + y + 1$ (sostituire $t = x + y + 1$ e differenziare in modo opportuno) $[y = e^{x+1+c} - 2 - x]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione differenziale lineare del primo ordine: $y' + y/x = cos(x)$.

Ricordiamo il risultato del Teorema 11: $y = e^{-\int f(x)dx}\cdot\left[\int e^{\int f(x)dx}\cdot g(x)dx+c\right]$, in cui si ha: $f(x) = 1/x$ e $g(x) = cos(x)$. Abbiamo quindi:

$$y = e^{-\int 1/x\,dx}\cdot\left[\int e^{\int 1/x\,dx}\cdot cos(x)dx+c\right] = e^{ln(1/x)}\cdot\left[\int e^{ln(x)}\cdot cos(x)dx+c\right] = \frac{1}{x}\cdot\left[\int x\cdot cos(x)dx+c\right]$$

Il secondo integrale si calcola per parti: $\int x\cdot cos(x)dx = x\cdot sin(x)-\int 1\cdot sin(x)dx = x\cdot sin(x)+cos(x)$, quindi alla fine si ha: $y = \dfrac{1}{x}\cdot\left[x\cdot sin(x)+cos(x)+c\right] \Rightarrow y = sin(x)+\dfrac{cos(x)}{x}+\dfrac{c}{x}$.

Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine

Livello 1

26. $y' + y/x = 1$ $\left[y = \dfrac{x^2+2c}{2x}\right]$ $y' + y/x = x^2$ $\left[y = \dfrac{x^4+4c}{4x}\right]$ $y' + y = e^{2x}$ $[y = e^{2x}/3 + ce^{-x}]$

27. $y' + y/(x + 1) = sin(x)$ $\left[y = cos(x)-\dfrac{sin(x)+c}{x+1}\right]$ $y' + y = x^3$ $[y = ce^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x - 6]$

Livello 2

28. $y' + y/x = e^x$ $\left[y = \dfrac{e^x\cdot(x-1)+c}{x}\right]$ $y' + 2y/x = 1/(x^3 + 1)$ $\left[y = \dfrac{ln\left(x^3+1\right)+3c}{3x^2}\right]$

29. $y' - 2y/x = 1/(x^2 + 1)$ $[y = cx^2 - x - x^2 \cdot tan^{-1}(x)]$ $y' - 4y/x = x/(x^2 + 1)$ $\left[y = \dfrac{x^4\cdot ln\left(1+1/x^2\right)+2cx^4-x^2}{2}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione differenziale del terzo ordine: $y''' - y'' + y' - y = 0$. È lineare a coefficienti costanti, pertanto consideriamo la sua ausiliaria: $p^3 - p^2 + p - 1 = 0$, che si risolve fattorizzando a coppie: $p^2 \cdot (p - 1) + p - 1 = 0 \Rightarrow (p^2 + 1)\cdot (p - 1) = 0$, che perciò ha le soluzioni $p = 1, i, -i$. Usando il risultato del Teorema 12 possiamo dire che l'integrale generale è $y = a\cdot e^x + b\cdot e^{ix} + c\cdot e^{-ix}$. Che possiamo anche scrivere:

$y = a\cdot e^x + b\cdot[cos(x) + i\cdot sin(x)] + c\cdot [cos(x) - i\cdot sin(x)] \Rightarrow y = a\cdot e^x + (b + c)\cdot cos(x) + i\cdot(b - c)\cdot sin(x)$. Verifichiamo: $y' = a\cdot e^x - (b + c)\cdot sin(x) + i \cdot (b - c)\cdot cos(x)$; $y'' = a\cdot e^x - (b + c)\cdot cos(x) - i \cdot (b - c) \cdot sin(x)$; $y''' = a\cdot e^x + (b + c)\cdot sin(x) - i \cdot (b - c) \cdot cos(x)$. Sostituiamo: $a\cdot e^x + (b + c)\cdot sin(x) - i \cdot (b - c)\cdot cos(x) - [a\cdot e^x - (b + c)\cdot cos(x) - i \cdot (b - c)\cdot sin(x)] + a\cdot e^x - (b + c)\cdot sin(x) + i \cdot (b - c)\cdot cos(x) - [a\cdot e^x + (b + c)\cdot cos(x) + i \cdot (b - c)\cdot sin(x)] = 0$. Facilmente si vede che l'espressione è nulla.

Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Livello 1

30. $y'' + y' - 6y = 0$ $[y = a\cdot e^{2x} + b\cdot e^{-3x}]$ $y'' + 4y' + 4y = 0$ $[y = (a + bx)\cdot e^{-2x}]$
31. $y'' + 7y' - 10y = 0$ $[y = a\cdot e^{2x} + b\cdot e^{5x}]$ $9y'' - 6y' + y = 0$ $[y = (a + bx)b\cdot e^{1/3x}]$
32. $4y'' + y = 0$ $[y = a\cdot e^{2x} + b\cdot e^{-3x}]$ $y''' - y'' + y' - y = 0$ $[y = (a + b)\cdot cos(x/2) + i\cdot(a - b)\cdot sin(x/2)]$
33. $6y'' - y' - y = 0$ $[y = a\cdot e^{½x} + b\cdot e^{-1/3x}]$ $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ $[y = (a + bx + cx^2)\cdot e^{x}]$
34. $y'' - 2y = 0$ $\left[y = a\cdot e^{\sqrt{2}x} + b\cdot^{-\sqrt{2}x}\right]$ $y^{IV} - 2y'' + y = 0$ $[y = (a + bx)\cdot e^x + (c + dx)\cdot e^{-x}]$

Livello 2

35. $y'' - 2y' - y = 0$ $\left[y = a\cdot e^{(1-\sqrt{2})x} + b\cdot^{(\sqrt{2}+1)x}\right]$ $y''' + y'' - y' - 2y = 0$ $[y = a\cdot e^x + b\cdot e^{-x} + c\cdot e^{-2x}]$
36. $y''' - y'' - y' + y = 0$ $[y = (a + bx)\cdot e^x + c\cdot e^{-x}]$ $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$ $[y = a + (b + cx + dx^2)\cdot e^x]$
37. $y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0$ $[y = (a + bx + cx^2 + dx^3)\cdot e^{-x}]$
38. $y^{IV} - 16y = 0$ $[y = a\cdot e^{2x} + b\cdot e^{-2x} + (c + d)\cdot cos(2x) + i\cdot(c - d)\cdot sin(2x)]$
39. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$ $[y = (a + c + (b + d) \cdot x)\cdot cos(x) + i\cdot(a - c + (b - d) \cdot x) \cdot sin(2x)]$

Livello 3

40. $y''' - y = 0$ $\left[y = a\cdot e^x + e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left[(b+c)\cdot cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + i(b-c)\cdot sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]\right]$
41. $y^{IV} + 16y = 0$ $\left[y = \left[(a+b)\cdot e^{-\sqrt{2}x} + (c+d)\cdot e^{\sqrt{2}x}\right]\cdot cos\left(\sqrt{2}x\right) - i\cdot\left[(a-b)\cdot e^{-\sqrt{2}x} + (c-d)\cdot e^{\sqrt{2}x}\right]\cdot sin\left(\sqrt{2}x\right)\right]$
42. $4y^{IV} - 4y''' - 3y'' + 2y' + y = 0$ $[y = (a + bx)\cdot e^x + (c + dx)\cdot e^{-½x}]$
43. $2y^{IV} + 5y''' + 3y'' - y' - y = 0$ $[y = (a + bx + cx^2)\cdot e^{-x} + d\cdot e^{½x}]$
44. $y^{VIII} + 3y^{VI} + 3y^{IV} + y'' = 0$
$[y = a + bx + [(e + h)x^2 + (d + g)x + c + f]\cdot cos(x) + i\cdot[(e - h)x^2 + (d - g)x + c - f]\cdot sin(x)]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = -1 \end{cases}$. Ci riferiamo al precedente box, in cui abbiamo già calcolato le derivate dell'integrale generale, per scrivere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} a\cdot e^0 + (b+c)\cdot cos(0) + i\cdot(b-c)\cdot sin(0) = 0 \\ a\cdot e^0 - (b+c)\cdot sin(0) + i\cdot(b-c)\cdot cos(0) = 1 \\ a\cdot e^0 - (b+c)\cdot cos(0) - i\cdot(b-c)\cdot sin(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+i\cdot(b-c)=1 \\ a-b-c=-1 \end{cases}$$

Sommando prima e terza otteniamo: $2a = -1$, da cui $a = -½$ e il sistema diventa

$$\begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b - c = \dfrac{1}{2i} \\ b + c = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1-3i}{4} \\ c = \dfrac{1+3i}{4} \end{cases}$$

Pertanto l'integrale particolare cercato è $y = ½\cdot e^x + ½\cdot cos(x) + 3/2\cdot sin(x)$.

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

Livello 1

45. $y' - y = 0,\ y(0) = 1$ $[y = e^x]$ $y' + y = 0,\ y(0) = 1$ $[y = e^{-x}]$ $y' - y^2 = 0,\ y(0) = 1$ $\left[y = \dfrac{1}{1-x}\right]$
46. $y' - x^2y = 0,\ y(0) = 0$ $[\varnothing]$ $y' - x^2y = 0,\ y(0) = 1$ $\left[y = e^{x^3/3}\right]$ $y' - e^xy = 0,\ y(0) = 1$ $\left[y = e^{e^x - 1}\right]$
47. $y' - y^2/x = 1,\ y(1) = 1$ $\left[y = \dfrac{1}{1 - ln(x)}\right]$ $y' + xy = x,\ y(0) = 0$ $\left[y = 1 - e^{x^2/2}\right]$ $y' + y = x^2,\ y(0) = 0$ $\left[y = \dfrac{1-e^{x^3}}{x}\right]$

Livello 2

48. $y'' - 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ $[y = -e^{2x} + e^{3x}]$ $y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ $[y = x\cdot e^x]$
49. $y'' + y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ $[y = 1 - e^{-x}]$ $y'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ $[y = sin(x)]$
50. $y'' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ $[y = cos(x)]$ $y'' - y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ $[y = ½e^x - ½e^{-x}]$
51. Legge del decadimento radioattivo (vedi esercizio 6), indicando con N_0 il valore della radioattività all'inizio dell'osservazione e con λ la costante di decadimento. $[N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}]$

Livello 3

52. $y''' - y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$ $[y = ½e^x - ½e^{-x}]$
53. $y''' - y'' = 0,\ y(1) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$ $[y = e^x - x - e + 2]$
54. $y''' - y'' - y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1$ $[y = -3 + (3 - 2x)\cdot e^x]$
55. $y^{IV} - y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1,\ y'''(0) = -1$ $[y = sin(x) + cos(x)]$

L'angolo di Derive

Derive ha predefinite alcune funzioni per il calcolo di certi tipi di equazioni differenziali. Vediamo solo quelli relativi ad equazioni da noi affrontate.

```
#1:   SEPARABLE_GEN(x^2, 1, x, y, c)

#2:   y = x^3/3 + c

#3:   SEPARABLE(x^2, 1, x, y, 0, 0)

#4:   y = x^3/3

#5:   LINEAR1_GEN(1, x, x, y, c)

#6:   y = c·e^(-x) + x - 1

#7:   LINEAR1(1, x, x, y, 0, 0)

#8:   y = e^(-x) + x - 1
```

In pratica i comandi sono per la determinazione dell'integrale generale e per il relativo problema di Cauchy. Si capisce facilmente che il primo comando risolve equazioni a variabili separabili scritte nella forma $y' =$

$p(x)\cdot q(y)$, e le seconde differenziali lineari del primo ordine scritte nella forma $y' + p(x)\cdot y = q(x)$.

Quesiti assegnati in gare nazionali o internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

CB = College Board   CC = Cincinnati University Calculus Contest   HH = Houston High School Math Contest
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest   RICE = Rice University Mathematics Tournament

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato agli HSMC nel 2007. Vogliamo calcolare $\int_0^1 \binom{207}{7}\cdot x^{200}\cdot(1-x)^7 dx$.

Integriamo per parti:

$$\int_0^1 \binom{207}{7}\cdot x^{200}\cdot(1-x)^7 dx = \left[\binom{207}{7}\cdot\frac{x^{201}}{201}\cdot(1-x)^7\right]_0^1 - \int_0^1 \binom{207}{7}\cdot\frac{x^{201}}{201}\cdot(-7)\cdot(1-x)^6 dx =$$

$$= \binom{207}{7}\cdot\frac{1}{201}\cdot(1-1)^7 - \binom{207}{7}\cdot\frac{0^{201}}{201}\cdot 1^7 + \int_0^1 \binom{207}{7}\cdot\frac{7\cdot x^{201}}{201}\cdot(1-x)^6 dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{207\cdot 206\cdot\ldots\cdot 201}{7\cdot 6\cdot 5\ldots\cdot 1}\cdot\frac{7\cdot x^{201}}{201}\cdot(1-x)^6 dx = \int_0^1 \frac{207\cdot 206\cdot\ldots\cdot 200}{6\cdot 5\ldots\cdot 1}\cdot x^{201}\cdot(1-x)^6 dx =$$

$$= \int_0^1 \binom{207}{6}\cdot x^{201}\cdot(1-x)^6 dx$$

Quindi: $\int_0^1 \binom{207}{7}\cdot x^{200}\cdot(1-x)^7 dx = \int_0^1 \binom{207}{6}\cdot x^{201}\cdot(1-x)^6 dx$. Non è difficile capire che ripetendo il procedimento troveremo anche:

$$\int_0^1 \binom{207}{6}\cdot x^{201}\cdot(1-x)^7 dx = \int_0^1 \binom{207}{5}\cdot x^{202}\cdot(1-x)^5 dx = \int_0^1 \binom{207}{4}\cdot x^{203}\cdot(1-x)^4 dx =$$

$$= \int_0^1 \binom{207}{3}\cdot x^{204}\cdot(1-x)^3 dx = \int_0^1 \binom{207}{2}\cdot x^{205}\cdot(1-x)^2 dx = \int_0^1 \binom{207}{1}\cdot x^{206}\cdot(1-x) dx =$$

$$= \int_0^1 \binom{207}{0}\cdot x^{207} dx = \int_0^1 x^{207} dx = \left[\frac{x^{208}}{208}\right]_0^1 = \frac{1}{208}$$

1. (Rice 2007) Calcolare il volume di una clessidra, ottenuta ruotando il grafico di $y = sin^2(x) + 1/10$, nell'intervallo $[-\pi/2; \pi/2]$ attorno all'asse delle ascisse. $[97/200\pi^2]$
2. (Rice 2008) Calcolare $\int_{-\infty}^{x} t\cdot 2^t\cdot e^t \, dt$. $\left[\frac{x\cdot(2e)^x}{1+ln(2)} - \frac{(2e)^x}{[1+ln(2)]^2}\right]$
3. (HSMC 2006) Calcolare $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}\cdot\int_0^2 x^n \, dx$. [2]
4. (CC 2008) Calcolare $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\, dx$. $[\pi/8]$
5. (HSMC2009) Calcolare $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{5+4\cdot cos(2x)}$. $[\pi/18]$

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato al 2009 University of Houston Math Contest.

Se $\int_0^4 f(x)dx = 5, \int_2^4 f(x)dx = 7, \int_0^7 f(x)dx = 10$, calcolare $\int_7^2 f(x)dx$.

Si ha: $\int_7^2 f(x)\,dx = -\int_2^7 f(x)\,dx$. D'altro canto si ha:

$$\int_2^7 f(x)\,dx = \int_2^4 f(x)\,dx + \int_4^7 f(x)\,dx = 7 + \int_0^7 f(x)\,dx - \int_0^4 f(x)\,dx = 7 + 10 - 5 = 12$$

Quindi il valore cercato è – 12.

6. (HH 2012) Se $\int_1^4 f(x)\,dx = 5, \int_3^4 f(x)\,dx = 7, \int_1^8 f(x)\,dx = 11$, calcolare $\int_3^8 f(x)\,dx$. [– 13]

Equazioni differenziali

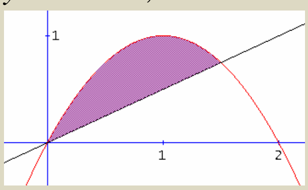
7. (HH 2003) Determinare tutti i numeri reali A per i quali ogni funzione $y = \frac{A}{1+ke^{-3t}}$, con k costante, sia soluzione dell'equazione differenziale $y' = y(3 - y)$, in ogni punto del suo dominio. [$0 \vee 3$]
8. (HH 2003) Sapendo che $f''(t) = 6e^{-3t}$ per ogni t e che $f(0) = 0$ e $f'(0) = 4$, determinare $f(t)$. [$2/3e^{-3t} + 6t - 2/3$]
9. (HH 2003) La massa corporea m di Fred verifica l'equazione differenziale $\frac{dm}{dt} = \frac{C-40m}{8000}$, in cui t è misurato in giorni, C è l'apporto energetico misurato in Cal/giorno. Se la massa di Fred è attualmente 100 Kg ed egli ingerisce 3000 Cal/giorno, fra quanti giorni la sua massa sarà 90 Kg? [≈102]
10. (HH 2004) Determinare il valore della costante k in modo che $y = 2x - kx^2$ sia soluzione dell'equazione differenziale $xy' = y - x^2$. [1]
11. (CB 2005) Data l'equazione differenziale $y' = -½xy^2$. Determinare il suo integrale particolare che verifica la condizione iniziale $f(-1) = 2$. [Sì; minimo; $m = -½$, $b = ½$]
12. (CB 2007) Data l'equazione differenziale $y' = ½x + y - 1$. Se $y = f(x)$ è un suo integrale particolare che verifica la condizione iniziale $f(0) = 1$, per $x = 0$ $f(x)$ ha estremo relativo? E se sì di che tipo? Determinare poi per quali m e b $y= mx + b$ è soluzione dell'equazione data. $\left[y = \frac{4}{x^2+1}\right]$

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2005.

The diagram shows the area under $y = 2x - x^2$, above the x–axis and a line $y = mx$. Find the slope m of the line which divides the area in half.



Consider the intersections between the line and the parabola.

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow x^2 + (2-m)\cdot x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2-m \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2-m \\ y = m\cdot(2-m) \end{cases}$$

The area under the parabola above the line is

$$\int_0^{2-m} (2x - x^2 - mx)\,dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - m\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^{2-m} = \left[x^2\cdot\left(1 - \frac{m}{2} - \frac{x}{3}\right)\right]_0^{2-m} =$$

$$= (2-m)^2\cdot\left(1 - \frac{m}{2} - \frac{2-m}{3}\right) = (2-m)^2\cdot\frac{(2-m)}{6} = \frac{(2-m)^3}{6}$$

The area under the parabola and the line is

$$\int_0^{2-m} mx\,dx + \int_{2-m}^{2}\left(2x-x^2\right)dx = \left[m\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^{2-m} + \left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_{2-m}^{2} = \frac{m\cdot(2-m)^2}{2}+4-\frac{8}{3}-(2-m)^2\cdot\left(1-\frac{2-m}{3}\right)=$$

$$=(2-m)^2\cdot\left(\frac{m}{2}-1+\frac{2-m}{3}\right)+\frac{4}{3}=(2-m)^2\cdot\frac{m-2}{6}+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}-\frac{1}{6}\cdot(2-m)^3$$

Areas must be equal: $\frac{(2-m)^3}{6}=\frac{4}{3}-\frac{(2-m)^3}{6}\Rightarrow\frac{(2-m)^3}{3}=\frac{4}{3}\Rightarrow(2-m)^3=4\Rightarrow 2-m=\sqrt[3]{4}\Rightarrow m=2-\sqrt[3]{4}$.

13. (HSMC 2000) Suppose f is a positive continuous function on the interval [−2; 3] and A(t) is the area of the region bounded by the graph of $y = f(x)$ and the lines $y = 0$; $x = -2$ and $x = t$ for t between −2 and 3: Compute $\lim_{t\to3^-}\frac{A(3)-A(t)}{3-t}$. [$f$(3)]

14. (CC 2009) Calculate $\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+sin(x)}\,dx$. [2]

15. (Rice 2009) At RMT 2009 is a man named Bill who has an infinite amount of time. This year, he is walking continuously at a speed of $\frac{1}{1+t^2}$, starting at time t = 0. If he continues to walk for an infinite amount of time, how far will he walk? [π/2]

16. (HH 2012) The region in the first quadrant bounded by the graph of $y = e^{2x}$, the vertical line $x = ln(3)$, and the x–axis is revolved about the y–axis. Find the volume of the solid that is generated. [π · (9 · ln(3) – 4)]

17. (AK 2012) Calculate the volume of the solid of revolution generated by the region bounded by the curve $x=\sqrt{25-y^2}$ and the lines $x = 0$ and $x = 3$, rotated around the y–axis. [244/3π]

Differential equations

Working together

This is a question assigned at HH in 2010. A cup of coffee, cooling off in a room at temperature 20°C, has cooling constant k = 0.09 min^{-1}. Assume the temperature of the coffee obeys Newton's Law of Cooling: $-k\cdot(T-T_0)=dT/dt$, where T_0 is the surrounding temperature.
a) Show that the temperature of the coffee is decreasing at a rate of 5.4°C/min when its temperature is T = 80°C. Substituting T = 80 in the Newton's Law we have: $dT/dt = -0.09\cdot(80-20) = -5.4$
(b) The coffee is served at a temperature of 90°. How long should you wait before drinking it if the optimal temperature is 65°C?
Solve $dT/dt = -0.09\cdot(T-20)\Rightarrow \int\frac{dT}{T-20}=-\int 0.09dt\Rightarrow ln(T-20)=-0.09t+c\Rightarrow T-20=Ce^{-0.09t}$, where $C = e^c$. At t = 0 we have T = 90 and so c = 70. The time at which T = 65 is then 70 $e^{-0.09t}$ + 20 = 65 ⇒ $t = ln(45/70)/(-0.09) = -100/9\ ln(9/14)$

18. (HH 2002) A bacteria-infested swimming pool was chemically treated this morning, and since then, the bacteria count has been decreasing at rate proportional to the count itself. An hour ago, the count was a third of what it was two hours ago. For safety, the count must be ≤ 1% of what it is now. When will that be? [≈ 4.2 hours]

19. (HH 2006) Find the general solution of $y' = y(y-2)$. Find the particular solution that satisfies initial condition $y(0) = 0.5$ $\left[y=\frac{2}{1-ce^{2x}};\ y=\frac{2}{1-3e^{2x}}\right]$

20. (HH 2006) Given that $f''(t) = e^{-2t} + cos\left(\frac{t}{2}\right)$ for all *t*, find an explicit formula for *f*(*t*) if *f*(0) = *f* ′(0) = 0.

$$\left[f(t) = \frac{1}{4}e^{-2t} - 4cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}t + \frac{15}{4} \right]$$

21. (CB 2006) Consider the differential equation $y' = (y - 1)^2 \, cos(\pi x)$. There is a horizontal line with equation *y*= *c* that satisfies this differential equation. Find the value of *c*. [1] Find the particular solution *y* = *f*(*x*) with the initial condition *f*(1) = 0. $\left[y = 1 - \frac{\pi}{sin(\pi x) + \pi} \right]$

22. (HH 2007) A cup of coffee at 96°C is set on a table in an air-conditioned classroom. It cools to 60°C in 10 minutes, and then to 40°C in another 10 minutes. What is the temperature of the room? (recall Newton's law of cooling) [15°]

23. (HH 2008) The levels of a sedative in a patient's blood were monitored to determine the appropriate time for an operation. Every fifteen minutes a blood sample was taken to determine the concentration *C* of the sedative in milligrams per litre, and then recorded in the table of data shown below. a) Estimate the rate of change of concentration with respect to time at 30 minutes and 60 minutes. Is the rate of change of concentration with respect to time *t* a constant? [No, it is variable] b) Show that the rate of change is roughly proportional to the concentration. Write this relationship as a differential equation leaving the constant of proportionality, *k*, undetermined. [$C' = kC$] c) Solve the differential equation from part (b) and choose the constant of proportionality, *k*, so that the solution satisfies both the entries C(0) = 20 and C(60) = 1.31 from the table. Write the constant of proportionality accurate to 4 decimal places. [$C(t) = 20e^{-0.454t}$]

Time(*min*)	Concentration *C* (*mg*/*l*)
0	20
15	110.21
30	5.15
45	2.68
60	1.31
75	0.72

24. (HH 2012) If $dy/dx = y \, tan(x)$ and $y = 3$ when $x = 0$, then, when $x = \pi/3$, *y* is? [6]

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_3_3.htm

12 Incertezza e realtà fisica

12.1 Statistica descrittiva

Prerequisiti

- Frazioni e percentuali.
- Piano cartesiano.
- Circonferenza e i settori circolari.
- Aritmetica elementare.
- Calcolo delle probabilità.

Obiettivi

- Acquisire l'abitudine a trattare grandi quantità di dati, rappresentandole graficamente.
- Determinare e interpretare gli indici centrali più comuni.
- Determinare e interpretare gli scarti più comuni.
- "Leggere", "interpretare" e utilizzare i sondaggi d'opinione.
- Creare modelli statistici di semplici situazioni reali.

Contenuti

- Prime nozioni
- Rappresentazioni grafiche
- Indici centrali
- Variabilità

Parole Chiave

Aerogramma – Campione statistico – Distribuzione statistica – Frequenza – Istogramma –
Modalità – Media aritmetica – Media ponderata – Mediana – Moda –
Scarto quadratico medio – Scarto semplice medio – Varianza

Prime nozioni

Il problema

Un pasticciere vuole aprire un negozio in una certa località e, per far ciò, ha pensato di licenziarsi dal bar nel quale lavora e di mettersi in proprio. Poiché investirebbe in questa nuova attività tutti i suoi risparmi, vorrebbe avere qualche informazione sul livello di vita, sui gusti e sul consumo di dolci degli abitanti di quella zona, che gli indichi se è il caso di fare questo passo.

Quanto sopra descrive una situazione concreta nella quale risulta importante acquisire dei dati che consentano, successivamente, di fare una scelta ponderata.
Un primo problema che si presenta è la modalità con cui devono essere acquisiti i dati.

Definizione 1

L'operazione di raccogliere informazioni di tipo qualitativo o quantitativo da un insieme di persone o cose viene chiamata **indagine statistica**.

Quindi in una indagine statistica si raccolgono i dati in modo che siano il più possibile attendibili. Poiché il pasticciere non può intervistare tutta la sua potenziale clientela, deve fare una scelta e intervistarne solo una parte. Ed ecco un'altra questione: che caratteristiche deve avere l'insieme degli intervistati per essere attendibile?

Definizione 2

Dato un insieme sul quale vuole effettuarsi una indagine statistica, chiamiamo suo **campione statistico** il sottoinsieme sul quale effettivamente si opera.

Di un campione statistico non importa soltanto la cardinalità ma anche e soprattutto la costituzione.

Esempio 1

Se il pasticciere intervistasse solo bambini, probabilmente riceverebbe delle informazioni così entusiastiche relative a pasticcini e gelati che intraprenderebbe immediatamente l'attività; viceversa se intervistasse solo persone che soffrono di diabete, le informazioni ottenute gli sconsiglierebbero l'apertura del negozio.

Come dovrà comportarsi quindi il pasticciere? Dovrà stabilire le caratteristiche che possono incidere sulla risposta di ciascun intervistato, per esempio il sesso, l'età, il reddito medio e via dicendo.

Esempio 2

Nel caso del pasticciere sarà certamente importante stabilire le fasce di età dei potenziali clienti; invece non gli interesserà sapere se una data persona parla o no correntemente l'inglese.

Il passo successivo da compiere per un'indagine statistica sarà quello di determinare la composizione del campione rappresentativo dell'universo che si sta esaminando.

Esempio 3

Sempre con riferimento al nostro esempio, supponiamo che la popolazione interessata sia formata dal 55% di donne, dal 20% di persone con meno di 10 anni, dal 15% di persone con un reddito familiare superiore a 50 milioni lordi l'anno, dal 23% di pensionati. Se il pasticciere ritiene che tutte le precedenti caratteristiche influiscano sulla quantità di dolci consumati periodicamente, dovrà scegliere un campione in cui le percentuali non si discostino di molto da quelle dette. Diversamente rischia di ottenere informazioni poco utili.

Sottolineiamo il fatto che le informazioni ottenute dal pasticciere, anche se provenissero da tutte le persone che potrebbero essere sue clienti, non avranno mai la certezza matematica. Potrebbe capitare infatti che una

persona che ha dichiarato di comprare almeno un chilo di dolci a settimana, si ammali improvvisamente, venga a perdere il lavoro, inizi una dieta, o più semplicemente non abbia voluto dire la verità per burla o per motivi personali.
Da quanto detto finora appare chiaro che la statistica, così come il calcolo delle probabilità, non deve intendersi come una disciplina matematica nel senso stretto, giacché essa fornisce solo misure di rischi, non dà certezze, come del resto è giusto che accada quando si ha a che fare con indagini che si riferiscono alla vita reale. Ricordiamo per esempio che spesso i cosiddetti exit poll che vengono effettuati per le elezioni forniscono risposte del tutto errate, proprio perché per vari motivi gli intervistati all'uscita del seggio elettorale possono mentire sul voto realmente espresso.
Stabilito come scegliere il campione statistico e come deve essere condotta l'indagine, si passa all'analisi dei dati. Come fa il pasticciere a capire se vale la pena di aprire il suo negozio oppure no? Ha bisogno di stabilire un modo per misurare quantitativamente le informazioni ottenute. Dobbiamo quindi cominciare a trattare la rappresentazione e l'interpretazione numerica dei dati.
Cominciamo con l'osservare che un campione statistico, in quanto insieme, è privo di elementi ripetuti, non così i dati che, invece, non costituiscono un insieme.

Esempio 4

Se interroghiamo 100 persone su una questione in cui le risposte possibili sono **Sì**, **No** e **Non so**, suddividiamo le 100 persone in tre sottoinsiemi, ognuno dei quali ha una cardinalità che varia da un minimo di zero a un massimo di 100.

Definizione 3

Diciamo **modalità** di un certo fenomeno che deve essere indagato statisticamente l'insieme dei valori su cui indagare, scelti tra quelli che il fenomeno può assumere.

Esempio 5

Se si vuole indagare sul numero di nati in Italia nello scorso anno, si potrebbe scegliere di valutare il numero dei nati vivi e dei nati morti, oppure quello dei nati maschi e dei nati femmina, o ancora quello dei nati nelle isole, al sud, al centro e al nord, o tutti i precedenti insieme,......

Definizione 4

Dato un fenomeno indagato statisticamente, diciamo **frequenza assoluta** di una sua modalità il numero di volte in cui la stessa modalità si è presentata.

Esempio 6

Se alla domanda *Quale musica preferisce*? Su 93 persone 35 hanno detto rock, 41 rap, 13 classica e 4 non hanno risposto, diciamo che la frequenza di coloro che, nel dato campione, prediligono il rock è 35.

Nell'esempio precedente il numero 35 non fornisce molte informazioni, mentre è importante stabilire il rapporto fra questo numero e il totale delle persone intervistate. Per esempio se avessimo intervistato 40 persone vorrebbe dire che quasi tutti preferiscono il rock, viceversa se fossero state 400 avrebbe significato che quasi nessuno ama il rock. Quindi un dato più significativo è il rapporto del detto valore rispetto al totale degli intervistati, in questo caso $35/93 \approx 0{,}38 = 38\%$

Definizione 5

Dato un fenomeno indagato statisticamente diciamo **frequenza relativa** di una sua modalità il rapporto fra la frequenza assoluta della modalità e la cardinalità dell'insieme delle modalità.

Esempio 7

Con riferimento all'esempio precedente, calcoliamo le seguenti frequenze relative:

Frequenza relativa	Frequenza Percentuale
35/93	≈38%
41/93	≈44%
13/93	≈14%
4/93	≈4%

Osserviamo che la somma è pari al 100%, fatto che dovrebbe sempre accadere, ma che a volte, può differire di 1-2 unità da 100% a causa delle approssimazioni usate.

Adesso possiamo associare ciascuna modalità con la relativa frequenza assoluta.

Definizione 6

Dato un fenomeno indagato statisticamente, diciamo sua **distribuzione statistica**, l'insieme delle coppie i cui elementi sono le modalità e le rispettive frequenze assolute.

Esempio 8

Ancora con riferimento al sondaggio musicale, possiamo dire che la distribuzione statistica associata al fenomeno in esso descritto è l'insieme {(rock, 35), (rap, 41), (classica, 13), (non risponde, 4)}.

Capita a volte che le modalità da considerare siano troppe, in questo caso si raggruppano.

Esempio 9

I seguenti dati sono relativi al numero di laureati dell'anno solare 2006 aggiornati al 27/05/2006, essi sono distinti per facoltà, tipo corso e corso di studio e raggruppati per classe di voto. Noi presentiamo solo quelli di alcune facoltà.

Classe di voto/ Facoltà	66-90	91-100	101-105	106-110	110 e lode
Agraria	11	24	10	6	1
Farmacia	16	38	26	13	12
Giurisprudenza	78	92	20	6	1
Medicina	10	19	4	7	1
Scienze MFN	10	80	37	38	21

Come si vede, invece di riportare tutte le possibili votazioni, da 66 a 110 e lode, i dati sono raggruppati in classi non uniformi per ampiezza.

Il primo problema che nasce dai dal precedente tipo di raggruppamento, e che risulterà molto importante per la determinazione di erti valori statistici, è stabilire il significato di questi dati. Noi sappiamo per esempio che 13 laureati in Farmacia hanno conseguito un voto da 106 a 110, ma non sappiamo altro e quindi non siamo in grado di stabilire quanti di essi hanno avuto 106 o 109 o qualsiasi altro voto compreso nell'intervallo. Questo è ovviamente un problema poiché in questo modo le informazioni non sono *precise*, ma del resto la possibilità di avere tutti i dati raggruppati per singolo voto farebbe sì che avremmo una distribuzione troppo vasta e quindi più difficile da studiare. Pensate per esempio cosa accadrebbe con la distribuzione degli abitanti di una città suddivisi per altezza. Avremmo da considerare valori in intervalli troppo ampi, diciamo da circa 50 *cm* per i neonati, fino a più di 2 metri. Non solo, ma possiamo accontentarci di suddividere per *cm* o dobbiamo considerare anche i *mm*? In tal modo i dati a disposizione sarebbero quasi impossibili da trattare, ecco perché è meglio suddividere in classi. Approfondiremo meglio questo problema in seguito.

L'angolo storico

La statistica intesa come disciplina che raccoglie dati e informazioni a fini politici, economici, fiscali, … è antichissima. Sono state ritrovate tavolette in caratteri cuneiformi presso i Sumeri (da 4000 a 2000 anni prima di Cristo), in cui erano elencati uomini e beni materiali. Addirittura uno dei libri che formano la Bibbia: *I Numeri*, dedica tutta la sua prima parte al censimento effettuato da Mosé subito dopo la fuga dall'Egitto. Ricordiamo che anche il censimento della popolazione narrato nei Vangeli, che portò Giuseppe e Maria a re-

carsi a Betlemme, è stato storicamente accertato. Questi rilevamenti avevano carattere totale e non campionario.
Si deve arrivare alla metà del XVII secolo perché si pongano i fondamenti della statistica descrittiva. È Hermann Conring (1606 – 1681) a essere considerato il fondatore della statistica su basi scientifiche. Un suo allievo, l'ungherese Martin Schmeitzel usò per la prima volta in un testo il vocabolo statistica, intitolando la raccolta delle sue lezioni all'Università di Jena *Collegium politico-statisticum*.
La prima applicazione "seria" della statistica, come l'elaborazione di tavole di mortalità per prevedere l'insorgere di epidemie, si effettuò in Inghilterra verso la metà del 1600. Ciò diede inizio alla cosiddetta statistica investigativa.
La parola statistica ha un'origine italiana, essendo derivata da Stato. Ne è testimonianza il titolo di un libro del 1589, *Ristretto della civile, politica, statistica e militare scienza*, dell'italiano Gerolamo Ghilini.
Con lo sviluppo del calcolo delle probabilità, fra il XVIII e il XIX secolo, la statistica comincia a fondarsi su basi più strettamente matematiche, divenendo così scienza.
Fra i più importanti studiosi ricordiamo Francis Galton (1822 – 1911), che introdusse diversi importanti concetti statistici, come i quartili e i decili. Iniziò anche lo studio delle correlazioni fra caratteri statistici diversi, come l'altezza dei padri e quella dei relativi figli.
In Francia ricordiamo poi Auguste Bravais (1811 – 1863) e in Inghilterra brilla la figura di Karl Pearson. Entrambi questi studiosi si occuparono approfonditamente di correlazione di eventi. Concludiamo ricordando il nostro Corrado Gini (1884 – 1965), a cui si deve la fondazione dell'Istituto Centrale di Statistica, l'attuale ISTAT, negli anni trenta del XX secolo. I diversi importanti contributi che alla scienza statistica, che lo hanno reso celebre nel mondo.
Queste informazioni sono state ricavate da G. Leti "Statistica descrittiva", Il Mulino, Bologna 1983.

Verifiche

Livello 1

1. Consideriamo i seguenti caratteri statistici: sesso, religione, età, titolo di studio, reddito medio, conoscenza di una lingua straniera, attività lavorativa, composizione media della famiglia, numero di auto possedute dalla famiglia, hobbies, stato di salute, orientamento politico.
2. Di seguito sono proposte alcune attività per la cui realizzazione si richiede una indagine statistica, decidere quali dei precedenti caratteri sono indispensabili per ottenere risultati interessanti. Eventualmente aggiungere altri caratteri oltre quelli qui citati.
   a) Apertura di un supermercato in una certa zona.
   b) Apertura di una palestra.
   c) Vendita di una enciclopedia.
   d) Vendita di videocassette educative.
   e) Apertura di un cinema.
   f) Elezioni politiche.
   g) Indagine sul sesso.
   h) Indagine sui gusti musicali dei giovani.
   i) Indagine sui programmi televisivi preferiti dai bambini.
   j) Produzione di un nuovo modello di automobile.

Calcolare le frequenze relative riferite ai seguenti dati ISTAT

3. Raccolta rifiuti urbani in Kg per abitante) per i capoluoghi di provincia piemontesi, riferiti all'anno 2001

Provincia	Torino	Vercelli	Novara	Biella	Cuneo	Verbania	Asti	Alessandria
Indifferenziati	465,2	528,8	365,1	438,7	402,5	275,7	391,3	508,4
Differenziati	136,0	55,2	138,7	158,0	162,1	298,0	95,5	138,2

4. Lunghezza di coste balneabili in Km per alcune regioni italiane riferite all'anno 1998

Regione	Liguria	Toscana	Lazio	Campania	Calabria	Puglia	Abruzzo	Marche
Costa balneabile	274,0	381,9	244,7	348,0	617,7	689,6	113,3	148,2
Totale costa	349,3	601,1	361,5	469,7	715,7	865,0	125,8	173,0

5. Opere consultate nelle Biblioteche statali italiane riferite all'anno 1996

Manoscritti	179903
Volumi	21685763
Opere consultate	3591881

6. Cause di morte per i maschi, in Italia riferite all'anno 1996

Causa	Mal. Infet.	Tumore	Mal. Sist. Circ.	Mal. App. resp.	Mal. App. dig.	Mal definite	Cause violente	Altre
Numero	1451	90882	110186	19597	13857	3603	16720	27756

7. Iscritti scuole superiori in Italia riferite all'anno scolastico 1997/98

Professionali	Tecnici	Licei
565723	1049682	1002180

8. Dati dell'esempio 9.

Lavoriamo insieme

Sappiamo che il 19% dei laureati in Filosofia dell'Università di Milano dell'anno solare 2006, ha ottenuto un voto di laurea compreso tra 101 e 105. Se il totale dei laureati sono stati 111, quanti di essi hanno avuto tale voto? In pratica vogliamo sapere quanto vale il 19% di 111, cioè il risultato dell'operazione $111 \cdot 0{,}19 = 21{,}09$. Ovviamente tale valore non ha senso reale, poiché i laureati sono rappresentati da un numero intero. Concludiamo perciò che 19% è un valore approssimato e i laureati che hanno ottenuto da 101 a 105 sono stati 21. Se invece avessimo saputo che il 23% dei laureati in lettere ha avuto 110 e lode e che essi sono in totale 24, potremmo calcolare quanti sono stati i laureati in lettere in totale. In questo caso noi sappiamo che $T \cdot 0{,}23 = 24$, quindi $T = 24/0{,}23 \approx 104$.

Livello 2

9. Dai dati Istat relativi al 1998 si evince che in Emilia Romagna vi erano 125569 ettari di aree protette, che rappresentavano il 4% delle aree protette italiane e il 5,7% del totale della superficie della regione. Inoltre rappresentavano 3,2 ettari per ogni 100 abitanti. Da questi dati stimare il numero di ettari di aree protette in Italia, la superficie in ettari dell'Emilia Romagna e la sua popolazione. [314148; 22045,4; 3926844]
10. Dai dati Istat relativi al 1998 si evince che 103,8 Km delle coste del Veneto erano balneabili. Se esse rappresentavano il 65,3% del totale, quanti Km di coste ha il Veneto? [158,9]
11. Dai dati Istat relativi al 1998 si evince che 57,1 Km delle coste della Sicilia avevano un inquinamento permanente. Se esse rappresentavano il 10% del totale delle coste non balneabili, quanti Km di coste sono state considerate balneabili in Sicilia nel 1998? [Dati insufficienti per rispondere]
12. Sappiamo che dei laureati in Filosofia del 2006 alla Statale di Milano, il 2% ha avuto da 66 a 90 e il 7% da 91 a 100. Sappiamo inoltre che i secondi sono il quadruplo dei primi, come si spiega questo fatto, dato che 7 non è il quadruplo di 2? [Sono valori approssimati]
13. Con riferimento al precedente quesito, se in 2 hanno avuto da 66 a 90, quanti sono in totale i laureati in Filosofia? [da 100 a 114]
14. Se 60 laureati del 2006 alla Statale di Milano in scienze motorie hanno avuto un voto inferiore a 106 e il 5% ha avuto un voto da 106 in poi, quanti sono in totale i laureati? [63]
15. I seguenti dati Istat sono relativi all'incidenza percentuale dei capitoli di spesa sulla spesa totale per coppie con 2 figli nel 1997. Da essi calcolare le spese assolute per singolo capitolo.

Spesa totale in lire	Alimenti bevande	Abbigliam. calzature	Abitazione energia	Arredam. art. casa	Spese sanitarie	Trasporti comunic.	Spettacoli cultura	Altre spese
4924081	19,9	7,6	23,3	6,6	3,8	18,2	8,3	12,3

Rappresentazioni grafiche

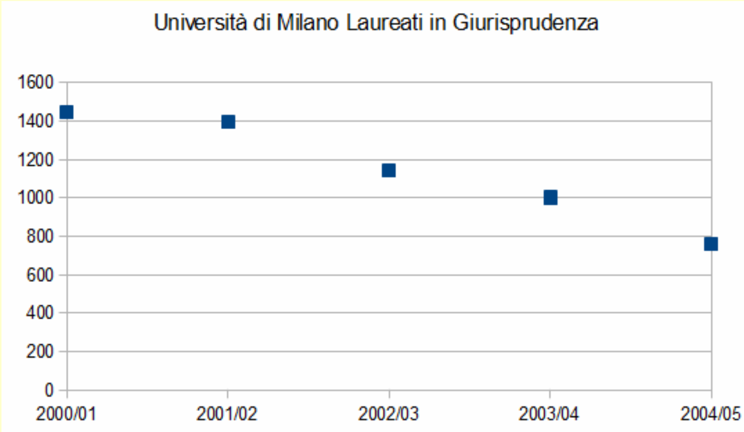
Per visualizzare meglio i dati raccolti si usano le rappresentazioni grafiche.

Esempio 10

I dati seguenti si riferiscono ai laureati in Giurisprudenza negli ultimi 5 anni aggiornati al 27/05/2006 dell'Università Statale di Milano

A.A.	2000/01	2001/02	2002/03	2003/04	2004/05
Laureati	1445	1395	1142	1001	760

Si osserva subito che il numero dei laureati è in costante diminuzione, ma si vede meglio rappresentando graficamente i dati.



Questo grafico illustra l'andamento temporale dei voti ed è molto utile in tutte quelle distribuzioni di cui si vuole seguire l'andamento temporale dei dati.

Definizione 7

Una distribuzione statistica nella quale le diverse modalità vengono studiate al variare del tempo, si chiama **serie temporale**

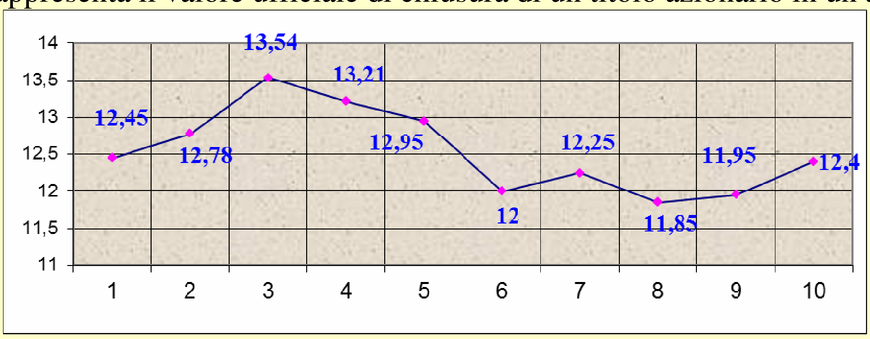
Definizione 8

La rappresentazione di una distribuzione statistica mediante dei punti su un piano cartesiano ortogonale si chiama **grafico a dispersione**.

Possiamo seguire meglio l'andamento temporale unendo i valori con segmenti.

Esempio 11

Il grafico seguente rappresenta il valore ufficiale di chiusura di un titolo azionario in un arco di 10 giorni.



Non dobbiamo dimenticare che queste sono solo alcune rilevazioni, non tutte, così questo grafico ci fornisce un'idea generale che può anche risultate errata; potrebbe per esempio accadere che il prezzo 12,78 sia diventato 13,54, passando per valori molto minori di 12,78 o molto maggiori di 13,54 che non sono rappresentati solo perché non sono stati rilevati.
Inoltre non è detto che l'andamento sia continuo: se il titolo ha fatto segnare 12,80 e 12,90 può non essere mai passato per 12,85 o per qualsiasi altro valore compreso tra gli estremi.

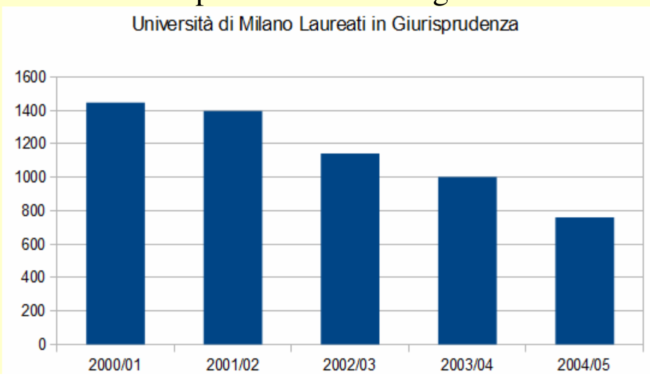
Definizione 9

La rappresentazione di una distribuzione statistica mediante punti su un piano cartesiano ortogonale, in modo che ciascun punto sia collegato al seguente mediante un segmento, si chiama **grafico a linee**.

Vediamo ancora come visualizzare in altro modo una distribuzione statistica.

Esempio 12

Possiamo rappresentare i dati dell'Esempio10 anche nel seguente modo.



Definizione 10

La rappresentazione di una distribuzione statistica su un piano cartesiano ortogonale, in modo che ciascun dato, o classe di dati, sia rappresentato da un rettangolo di base arbitraria e altezza pari alla frequenza assoluta, si chiama **istogramma**.

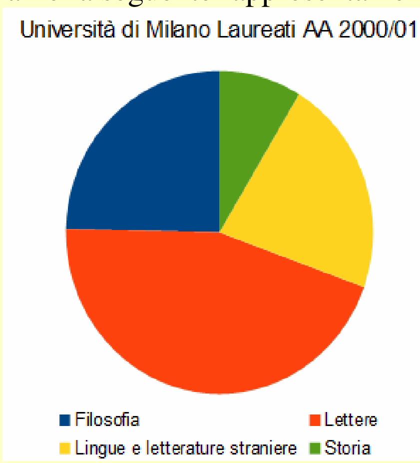
Che cosa significa?

Istogramma Gramma si usa spesso nella lingua italiana per riferirsi a rappresentazioni scritte o grafiche (ricordiamo diagramma, grammatica,…). Isto è derivato dal greco *hìstos* che ha il significato di *trama*. Quindi l'istogramma è una rappresentazione grafica mediante delle barre.

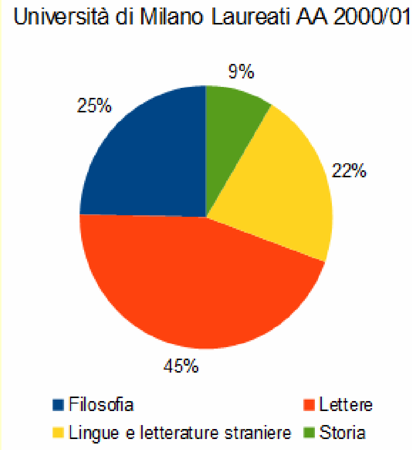
Presentiamo un ultimo tipo di rappresentazione grafica.

Esempio 13

Vogliamo rappresentare i laureati dell'A.A. 2000/01 della facoltà di Lettere e Filosofia della Università Statale di Milano, suddivisi per corso di laurea. In questi casi non sono significativi i precedenti tipi di grafici, perché ci interessa di più vedere, all'interno dei laureati in Lettere e Filosofia quanti di essi sono laureati per ciascuno dei corsi di laurea. Allora usiamo la seguente rappresentazione



Così facendo stiamo ripartendo il totale dei laureati in proporzione al corso di laurea. Quindi immediatamente vediamo che i laureati in lettere sono la maggioranza che rappresenta poco meno del 50%. Ovviamente se volessimo avere maggiori informazioni potremmo scrivere su ogni fetta la relativa frequenza



percentuale.

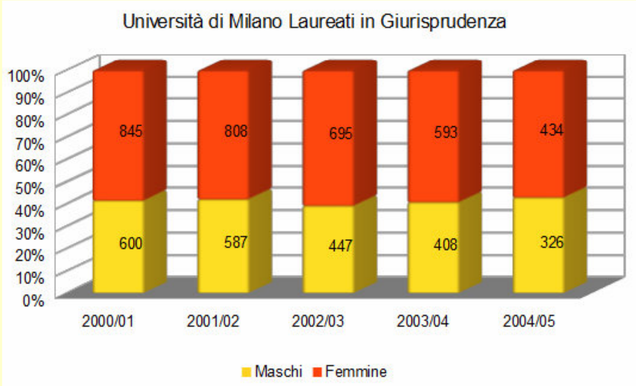
Definizione 11

La rappresentazione di una distribuzione statistica, in modo che l'intera distribuzione sia rappresentata da un cerchio suddiviso in settori circolari proporzionali alle relative frequenze assolute delle modalità, si chiama **aerogramma o diagramma a torta**.

In alcuni casi possiamo usare un formato misto fra i precedenti, se vogliamo visualizzare sia un andamento nel tempo che una distribuzione dei dati all'interno di ciascun valore temporale.

Esempio 14

Rappresentare i dati dell'Esempio10 distinguendo anche, per ogni anno accademico, i maschi e le femmine, distinguendo i valori assoluti nonché le percentuali. Questo tipo di istogramma si dice in pila.



Verifiche

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato nell'ambito delle prove OCSE-PISA.
Il grafico seguente mostra l'altezza media dei ragazzi e delle ragazze olandesi nel 1998.

1. A partire dal 1980 l'altezza media delle ragazze di 20 anni è aumentata di 2,3 cm arrivando a 170,6 cm. Qual era l'altezza media delle ragazze di 20 anni nel 1980?
   Ovviamente era 2,3 *cm* in meno di quella del 1998, cioè (170,6 – 2,3) *cm* = 168,3 *cm*.
2. Spiega in che modo il grafico mostra che, in media, la crescita delle ragazze è più lenta dopo i 12 anni.
   Perché dai 10 ai 12 anni passa da 140 *cm* a circa 160 *cm*, diciamo approssimativamente 158 *cm*, con un incremento perciò di 18 *cm*, che rispetto ai 140 *cm* iniziali è di 18/140 ≈ 12,9%. Invece da 12 anni a 20 l'aumento è di circa 14 *cm* (considerando come valore a 20 anni circa 172 *cm*) che in percentuale rispetto al valore iniziale di 158*cm* è di circa il 14/158 ≈8,9%. Inoltre si nota anche che la curva da 10 a 12 anni è molto più *ripida* che nel successivo periodo 12-20 anni.
3. In base al grafico, in che periodo della vita le ragazze sono, in media, più alte dei maschi della stessa età? Dobbiamo considerare le ascisse per le quali le rispettive ordinate della curva tratteggiata sono maggiori di quelle della curva continua. Ciò accade da 11 a 13 anni.

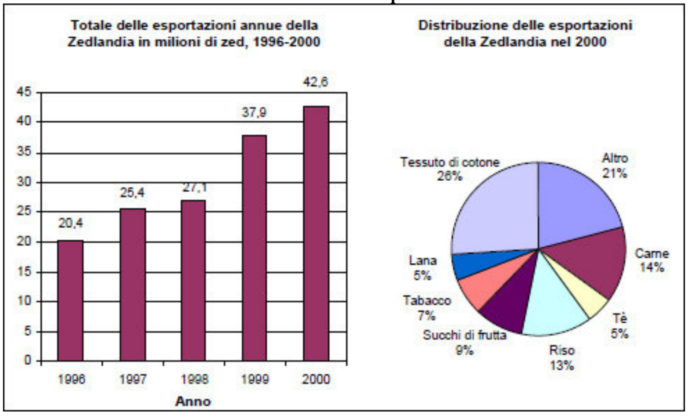
Livello 1

1. (OCSE PISA) Nell'ambito di una ricerca sull'ambiente, gli studenti hanno raccolto informazioni sui tempi di decomposizione di diversi tipi di rifiuti che la gente butta via:

Tipo di rifiuto	Tempo di decomposizione
Buccia di banana	1–3 anni
Buccia d'arancia	1–3 anni
Scatole di cartone	0,5 anni
Gomma da masticare	20–25 anni
Giornali	Pochi giorni
Bicchieri di plastica	Oltre 100 anni

Uno studente prevede di presentare i risultati con un diagramma a colonne. Scrivi un motivo per cui un diagramma a colonne non è adatto per rappresentare questi dati. [I dati sono molto diversi, qualunque unità di misura scegliamo sulle ordinate avremo un grafico poco leggibile; inoltre che significa "pochi giorni"?]

2. (OCSE PISA) I seguenti grafici forniscono alcune informazioni sulle esportazioni della Zedlandia, un Paese in cui si usa lo zed come moneta corrente.



Qual è stato l'ammontare totale (in milioni di zed) delle esportazioni della Zedlandia nel 1998? [37,9]

Quale è stato l'ammontare delle esportazioni di succhi di frutta della Zedlandia nel 2000?

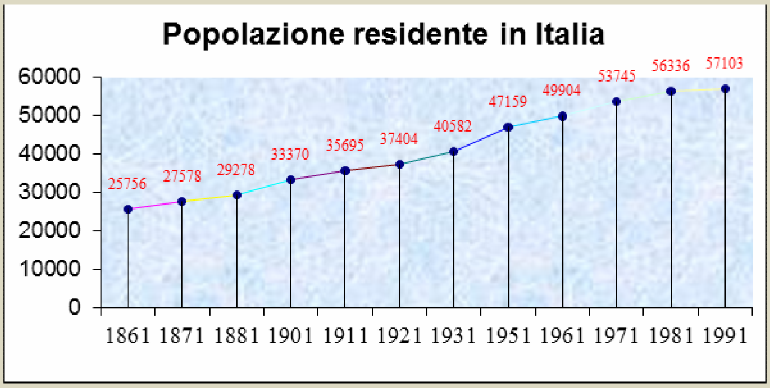
A 1,8 milioni di zed B 2,3 milioni di zed C 2,4 milioni di zed D 3,4 milioni di zed E 3,8 milioni di zed [E]

Lavoriamo insieme

Nella tabella seguente è riportata la popolazione residente in Italia, espressa in migliaia di unità, come risulta da alcuni censimenti (dati ISTAT).

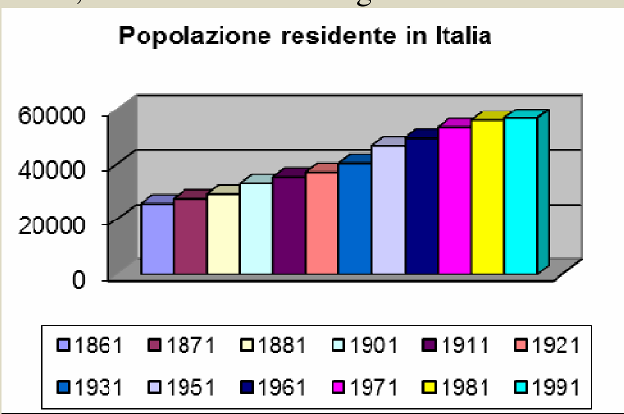
1861	1871	1881	1901	1911	1921	1931	1951	1961	1971	1981	1991
25 756	27 578	29 278	33 370	35 695	37 404	40 582	47 159	49 904	53 745	56 336	57 103

Con l'aiuto delle rappresentazioni grafiche vogliamo interpretare questi risultati. Cominciamo con un grafico a linee.



Questo grafico ci suggerisce quel che già vediamo dalla tabella, ossia la popolazione è sempre aumentata da un censimento al successivo. Ci mostra però qualcosa che può sfuggire dalla lettura della tabella, cioè che la popolazione non è cresciuta sempre nello stesso modo, piccole variazioni percentuali nei primi tre censimenti, una crescita più netta in quelli centrali e poi un assestamento verso gli ultimi dati. Non dobbiamo però dimenticare che in questo grafico vi sono dei "buchi", ossia la differenza fra due successivi censimenti non è sempre di 10 anni, ma per due volte è di 20 anni. Inoltre in uno dei due casi i valori mancanti si riferiscono a un periodo di guerre, che ha senz'altro fatto diminuire la popolazione.

Proviamo a variare il tipo di grafico, considerando un istogramma tridimensionale.



Questo grafico, ottenuto come il precedente con Excel, è sicuramente più efficace del primo non solo perché più colorato, ma anche perché appare più netta la differenza fra un valore e il precedente.

Livello 1

1. Nella tabella seguente (dati ISTAT), sono riportate le precipitazioni medie, espresse in millimetri di pioggia, relative all'anno 1992 riscontrate in alcune località italiane. Raggrupparle in classi di ampiezza 50 *mm*, 100 *mm*. e 200 *mm*. Quindi fornire una rappresentazione grafica mediante un istogramma in tutti e tre i casi.

Località	Firenze	Perugia	Potenza	Reggio C.	Crotone	Brindisi	Pescara	Rimini
Quantità	836	749	398	383	353	424	136	714

2. Nella seguente tabella sono raccolti i valori della popolazione maschile e femminile, espressa in migliaia di unità, risultata residente in Italia in alcuni censimenti (dati ISTAT). Rappresentare i dati su uno stesso grafico mediante diagrammi a dispersione e istogrammi. Discutere i risultati.

Anno	1911	1921	1931	1936	1951	1961	1971	1981	1991
Maschi	18608	18814	20181	20826	23259	24784	26476	27056	27405
Femmine	18313	19042	20862	21573	24257	25840	27661	29051	29006

3. Con riferimento alla tabella precedente, determinare le percentuali di maschi e femmine relative a ciascun censimento, rappresentandoli con degli aerogrammi. Rappresentare poi con un diagramma a dispersione i valori percentuali relativi all'intera tabella.
4. Data la seguente distribuzione statistica relativa ai voti ottenuti da uno studente in una certa materia, rappresentarli in un diagramma a dispersione, un istogramma e un aerogramma, raggruppando i detti voti prima in classi di ampiezza 0,5 e poi di ampiezza 1. Si tenga conto che + significa aggiungere 0,25; – togliere 0,25.

6	6+	7–	8	4	5–	6	6+	6 ½	5–	7 ½	7	8–

5. Rappresentare con un aerogramma il numero di nati nel 1991, come risulta dai seguenti dati ISTAT, suddivisi per aree geografiche.

NORD	CENTRO	SUD	ISOLE
175881	136910	162621	80763

6. Rappresentare con un diagramma a linee, l'andamento di un titolo azionario come risulta dalle seguenti rilevazioni intervallate di 1 ora.

ORARIO	9:30	10:30	11:30	12:30	13:30	14:30	15:30	16:30	17:30
VALORE	12,40	12,35	12,26	12,28	12,32	12,30	12,24	12,27	12,26

7. Nella seguente tabella (dati ISTAT) sono riportati i consumi interni delle famiglie italiane, in miliardi di lire del 1995, dal 1990 al 1999. Costruire un grafico a linee.

1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
1004266	1033071	1046852	1019186	1041953	1064471	1073110	1105399	1129125	1148315

8. Nella seguente tabella (dati ISTAT), sono riportati i tassi ufficiali di disoccupazione italiana, dal 1988 al 1999, costruire con essi un grafico a linee.

1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
12,3	12	11,4	10,9	11,5	10,1	11,1	11,6	11,6	11,7	11,8	11,4

9. Nella seguente tabella sono riportati (dati ISTAT del 1999, espressi in miliardi di lire) i valori delle importazioni ed esportazioni di beni dello stato italiano. Rappresentarli nello stesso diagramma a linee; determinare poi la differenza fra i due valori, ottenendo il così detto *saldo commerciale*, che si rappresenterà unitamente ai due precedenti.

ANNI	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Import.	209910	217703	225767	232111	232991	272382	335661	321286	357587	378783	394271
Esport.	192797	203515	209744	219436	266214	308046	381175	388885	409128	426183	419124

10. Con un diagramma a linee descrivere la curva dell'altezza di un giovane come si evince dalle seguenti rilevazioni espresse in centimetri.

ETÀ	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
ALTEZZA	72	94	110	125	140	168	174	178	178	178

11. Nella tabella seguente sono riportati (dati ISTAT del 1999 espressi in miliardi di lire) i valori delle importazioni e delle esportazioni del 1998 per lo stato italiano, suddivise in grandi settori. Rappresentarli in due distinti aerogrammi. Sulla base di questi dati determinare quale fra i settori indicati è il più vantaggioso in termini assoluti e quale lo è in termini percentuali per l'Italia.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Importazioni	20738	29790	35268	6539	52584	95986	50748	26154	28549	32427
Esportazioni	11246	5734	16867	16533	36472	151800	47083	17771	67882	54793

Legenda: A = Prodotti agricoltura, silvicultura e pesca; B = Prodotti energetici; C = Minerali ferrosi e non ferrosi; D = Minerali e prodotti non metallici; E = Prodotti chimici; F = Prodotti metalmeccanici; G = Mezzi di trasporto; H = Prodotti industrie alimentari, bevande e tabacco; I = Prodotti tessili, cuoio, abbigliamento; J = Legno, carta, gomma e altri prodotti.

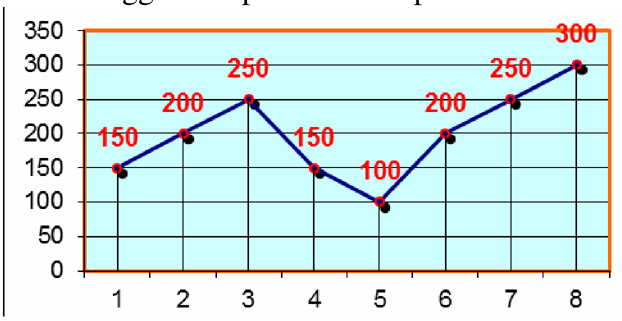
12. I seguenti dati (Fonte EUROSTAT) si riferiscono al prodotto interno lordo dal 1991 al 1999, espresso in milioni di euro del 1995, di 4 nazioni europee. Rappresentare in un unico grafico gli istogrammi relativi a ciascuna nazione. Determinare poi le relative variazioni percentuali, segnandole in un unico diagramma a linee.

NAZIONE	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Italia	798605	804679	797568	815173	839008	848179	863581	876806	889298
Germania	1786030	1826064	1806207	1848589	1880509	1894708	1922198	1963566	1992230
Francia	1141005	1157860	1146348	1168723	1188102	1201207	1224559	1263963	1301851
Spagna	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	447062	457524	475072	493865	512376

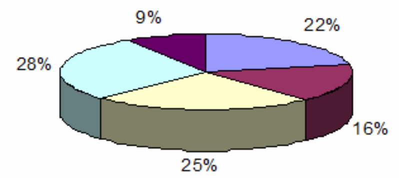
LEGENDA: N. R. = Non rilevato.

Livello 2

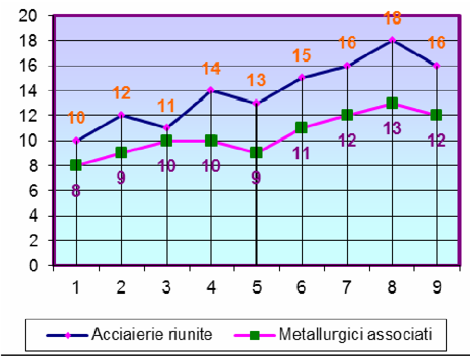
13. Dalla lettura del seguente grafico a linee, determinare la variazione percentuale dalla posizione 2 alla posizione 7, l'intervallo a estremi consecutivi, in cui si sono avuti il maggiore apprezzamento percentuale e quello in cui si è avuto maggiore deprezzamento percentuale. [25%; [5, 6]; [3, 4]]



14. Il seguente aerogramma rappresenta la suddivisione delle quote azionarie di una certa azienda. Se le azioni sono in totale 12345000, quante ne possiede l'azionista di maggioranza e quante quello di mi-



noranza? [3456600; 1111050]



15. Nel grafico seguente è riportato l'andamento di due titoli azionari in alcune rilevazioni contemporanee. Dalla lettura di tale grafico determinare

A) la variazione percentuale che hanno avuto i due titoli nel totale delle osservazioni [40%; 50%]

B) gli intervalli a estremi consecutivi, di maggiore apprezzamento per entrambi i titoli [[7-8], [3-4]]

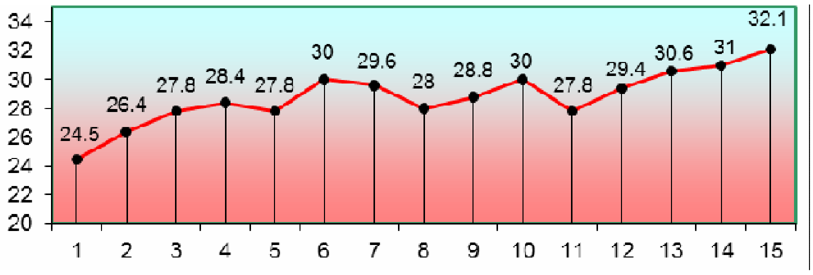
C) gli intervalli a estremi consecutivi, di maggiore deprezzamento dei due titoli [[8-9], [4-5]]

D) la rilevazione in cui maggiore è stata la differenza fra i valori dei due titoli [8]

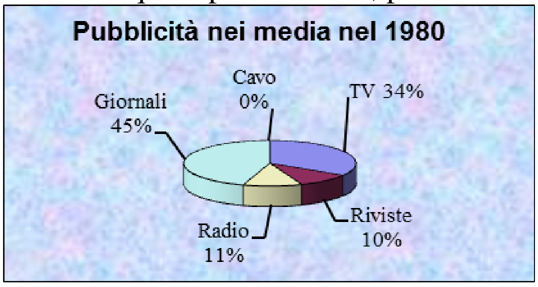
E) quale dei due titoli ha mostrato un andamento più regolare. [Metallurgici associati]

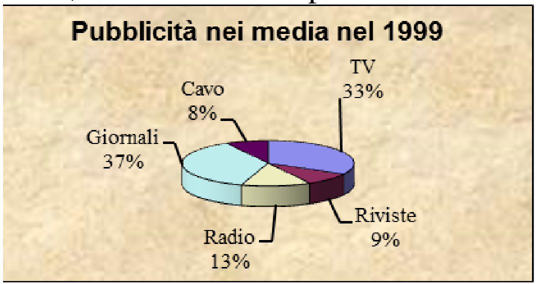
16. Nel seguente diagramma è illustrato l'andamento del prezzo, in dollari, di un barile di petrolio nel periodo maggio – giugno 2000, con rilevamenti ogni 4 giorni. Mediante tale grafico determinare

A) il periodo di massimo apprezzamento assoluto [5-6] B) il periodo di massimo deprezzamento assoluto [10-11] C) la variazione percentuale in tutto l'arco dei rilevamenti [+31%]



17. I due diagrammi seguenti (dati Sole 24 Ore) illustrano la ripartizione pubblicitaria nei diversi mezzi di comunicazione nel 1980 e nel 1999. Mediante tali dati costruire un istogramma che metta a confronto la variazione di quote pubblicitarie, per i diversi media, al variare del tempo.

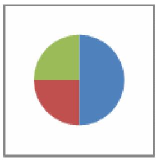


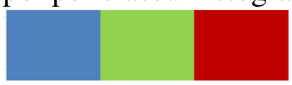


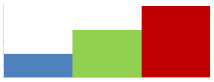
18. Nella tabella seguente (dati ISTAT), sono riportati i valori relativi ai quozienti di fecondità secondo l'età della madre (ossia il numero di figli nati ogni 1000 donne in età feconda (15–49 anni)), rilevati in alcuni trienni. Rappresentare i dati mediante istogrammi, prima relativamente a ciascun triennio, poi in tutto l'arco temporale interessato.

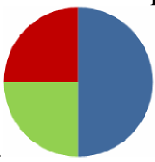
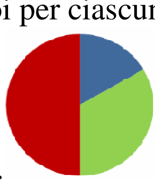
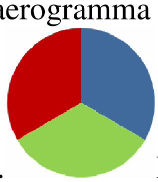
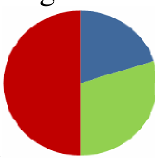
TRIENNI/ETÀ	15 – 20	21 – 24	25 – 29	30 – 34	35 – 39	40 – 44	45 – 49
1930–32	24,4	135,3	176,5	157,7	118,2	53,3	6,3
1950–52	22,5	110,1	142,1	114,5	72,8	29,7	2,8
1960–62	27,2	121,1	156,7	111,8	61,0	22,7	1,7
1970–72	36,6	139,2	152,2	98,2	51,0	15,7	1,2
1980–82	26,0	102,3	111,5	65,6	26,5	6,0	0,4
1990–92	12,3	58,2	90,0	68,1	28,0	5,2	0,2

19. Con riferimento ai dati della tabella precedente, determinare il quoziente totale di fecondità per triennio. [672,01; 494,50; 502,20; 494,1; 338,3; 262]

20. Dato il seguente aerogramma,  quale degli istogrammi proposti rappresenta la stessa distribuzione statistica? Costruire poi per ciascun istogramma l'aerogramma equivalente. [C]

A.  B.  C.  D. 

21. Dato il seguente istogramma,  quale degli aerogrammi proposti rappresenta la stessa distribuzione statistica? Costruire poi per ciascun aerogramma l'istogramma equivalente. [B]

A.  B.  C.  D. 

22. Utilizzando la rappresentazione grafica dell'istogramma in pila, rappresentare e discutere i seguenti dati che si riferiscono al consumo di alcolici, come risulta da un'indagine effettuata fra i consumatori di alcolici statunitensi. Da questi dati determinare la distribuzione totale del consumo alcolico fra uomini e donne.

Bevanda	Birra	Liquori	Vino	Spumanti
Uomini	84%	54%	49%	41%
Donne	16%	46%	51%	59%

[57% uomini, 43% donne]

23. Nella seguente tabella (dati ISTAT), sono riportati il numero di iscritti in corso, il numero dei "fuori corso" e il numero dei laureati relativamente all'A.A. 1991/92 delle Università Italiane di alcuni corsi di laurea (dati ISTAT). Tenuto conto dei valori riportati quale corso di laurea è risultato più "difficile"? [Architettura] Quale ha avuto una durata più "lunga" del previsto? [Medicina]

Corso di laurea.	Iscritti in corso.	Iscritti fuori corso.	Laureati.
Architettura	63407	27503	4537
Economia e commercio	141664	61376	10644
Fisica	10605	6058	1065
Giurisprudenza	161284	81699	14244
Ingegneria civile	22690	9923	1942
Ingegneria elettronica	36678	15703	2854
Lettere	51010	24135	4279
Matematica	12319	5095	1340
Medicina	42259	31316	9687
Scienze Biologiche	25228	15376	3329

24. Ripetere quanto detto nell'esercizio precedente per la seguente tabella, relativa ai maschi di cinque regioni italiane, come risultava dal censimento del 1981. I valori si riferiscono alle percentuali dell'intera popolazione maschile di ciascuna regione.

	Piemonte	Toscana	Lazio	Campania	Sicilia
Celibi	42,8	40,4	46	52,3	49,0
Coniugati	52,9	55,7	50,8	45,1	48,3
Separati	1,1	0,8	0,9	0,3	0,4
Vedovi	2,9	2,9	2,0	2,2	2,1
Divorziati	0,3	0,2	0,3	0,1	0,2

25. Nella tabella seguente (dati ISTAT) sono riportati i valori relativi alle iscrizioni e cancellazioni anagrafiche per trasferimento, secondo la regione, per l'anno 1990, riferite a 5 regioni italiane. Determinare i flussi migratori, ossia stabilire la composizione percentuale degli emigrati e degli immigrati regione per regione.

	Piemonte	Lombardia	Veneto	Campania	Sicilia
Piemonte	95433	5227	1499	2485	4171
Lombardia	4568	156048	3442	3275	5380
Veneto	707	2809	63081	686	654
Campania	3026	7442	1704	98454	1313
Sicilia	4785	10165	1712	1108	73780

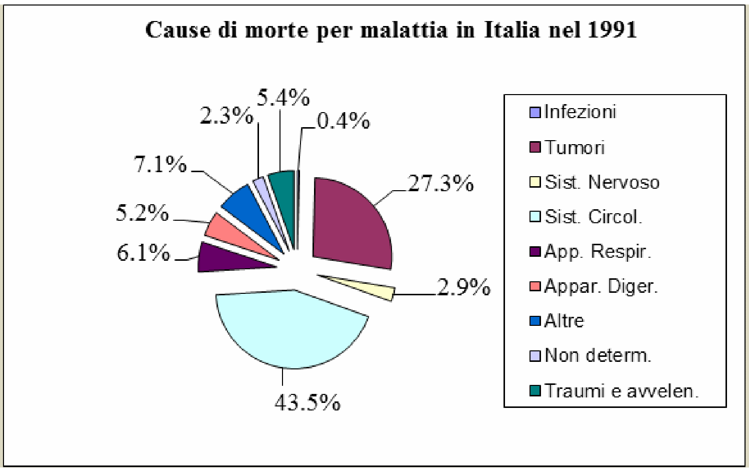
Lavoriamo insieme

Nella tabella seguente riportiamo i dati ISTAT relativi alle cause di morte per malattia registrate nel 1997 in Italia, raggruppate per grandi gruppi di cause e per aree geografiche.

	Infezioni	Tumori	Sistema Nervoso	Sist. Circolat.	App. Resp.	Apparato Digerente	Altre	Non determinato	Traumi e avvelen.
NORD	929	67139	6853	93759	13221	11322	13376	4729	12335
CENTRO	644	48792	5382	75286	9723	8199	11600	3363	9340
SUD	285	21894	2116	44543	6647	6159	8829	2323	4908
ISOLE	175	12628	1418	26613	4175	2798	5150	2141	3064

Mediante questa tabella possiamo determinare la probabilità frequentista che, per esempio, una persona morta al nord di malattia sia morta di tumore. Per far ciò basta dividere il numero di morti di tumore per il numero totale di morti per malattie in quell'area geografica. Pertanto in questo caso è $P = \frac{67139}{223663} \approx 30\%$.

Dalla tabella notiamo già che la maggior causa di morte per malattia, relativamente al 1991, in qualsiasi area geografica in Italia sono stati problemi al sistema circolatorio, includendo in ciò anche le malattie cardiache. Concludiamo presentando un aerogramma relativo ai dati della distribuzione riferiti all'intera nazione.



Livello 3

26. Nella tabella seguente (dati ISTAT), sono riportati i valori relativi ai nati vivi in alcuni trienni, espressi in numero di nati per ogni 1000 donne in età feconda (15 – 49 anni). Sono altresì riportati i nati vivi per 1000 abitanti. Rappresentare i dati nello stesso grafico a dispersione.

Trienni	Nati vivi per 1000 abitanti	Nati vivi per 1000 donne in età feconda
1930 – 32	29,4	94,3
1950 – 52	18,4	70,0
1960 – 62	18,3	72,5
1970 – 72	16,6	68,0
1980 – 82	11,3	46,5
1990 – 92	9,9	38,5

Con riferimento alla precedente tabella calcolare una stima del numero di abitanti donne in età feconda in ciascun triennio, in percentuale rispetto al totale della popolazione.

[32,7; 38,04; 39,6; 40,9; 41,1; 38,9]

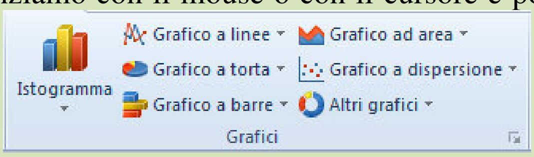
27. Tenuto conto della tabella dell'esercizio precedente, determinare la probabilità che una donna scelta a caso fra quelle erano feconde: a) nel triennio 1960–62, avesse un'età compresa tra 30 e 34 anni [22,2%] b) nel triennio 1980–82, avesse un'età compresa tra 21 e 39 anni [90,2 %] c) nel triennio 1930–32, avesse o un'età compresa tra 15 e 34 anni o un'età compresa tra 25 e 44 anni [99,1%]
28. Relativamente alla tabella dell'esercizio 23, calcolare la probabilità che uno studente che nell'A.A. 1991/92 risultava iscritto in una delle Università italiana e in uno dei corsi di laurea indicati nella tabella: a) si sia laureato in quell'anno [6,4%] b) si sia laureato in Matematica, essendo iscritto in tale corso [7,7%] c) fosse fuori corso in un corso di laurea tecnico – scientifico. [34,2%]

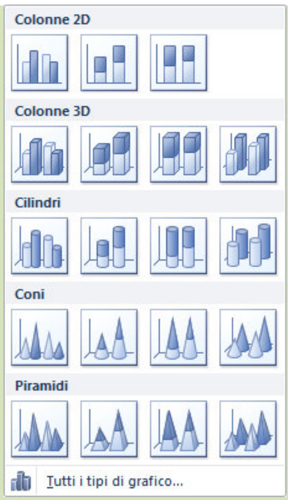
L'angolo di Excel

I fogli elettronici in generale ed Excel in particolare sono gli ambienti adatti per rappresentare graficamente dei dati. Vediamo come fare. Iniziamo immettendo dei dati, per esempio quelli dell'esercizio 23

	A	B	C	D	E
1	**Bevanda**	**Birra**	**Liquori**	**Vino**	**Spumanti**
2	**Uomini**	84%	54%	49%	41%
3	**Donne**	16%	46%	51%	59%

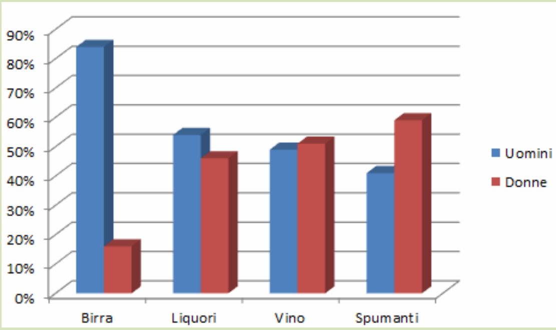
Supponiamo di voler rappresentare graficamente i dati. Li evidenziamo con il mouse o con il cursore e poi clicchiamo su **Inserisci** e quindi su una delle icone seguenti



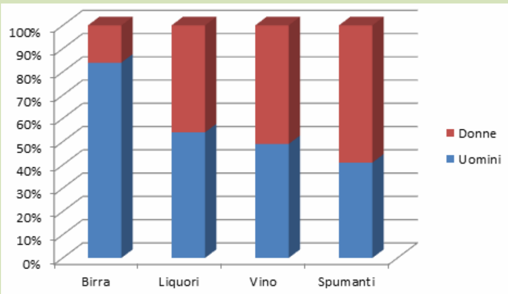


Per esempio scegliamo **Istogramma**, attivando tutte le possibilità seguenti

Sostanzialmente tutte equivalenti. Le differenze rilevanti sono quelle non in pila e quelle in pila.

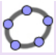
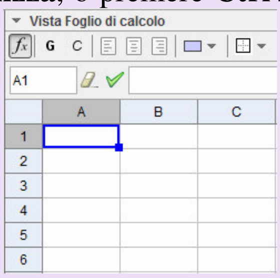
 Da luogo al seguente grafico 

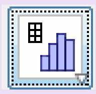
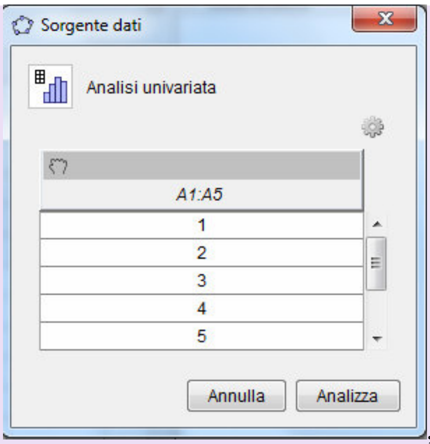
, che può modificarsi in vari modi che non descriviamo.

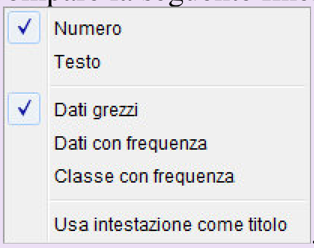
 

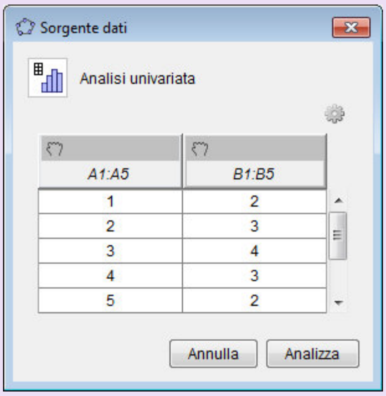
Gli altri grafici funzionano più o meno allo stesso modo.
Attività Riprodurre con Excel i grafici presentati e quelli proposti nelle verifiche.

L'angolo di Geogebra

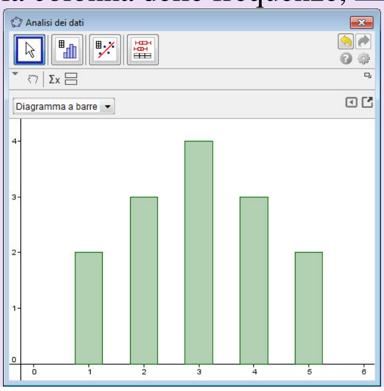
 Anche Geogebra nelle sue versioni più recenti permette la rappresentazione grafica di dati statistici. Basta scegliere l'opzione **Vista Foglio di Calcolo** nel menu **Visualizza**, o premere **Ctrl+Maius+S**. Appare sulla destra del foglio di lavoro una tabella come quella proposta 

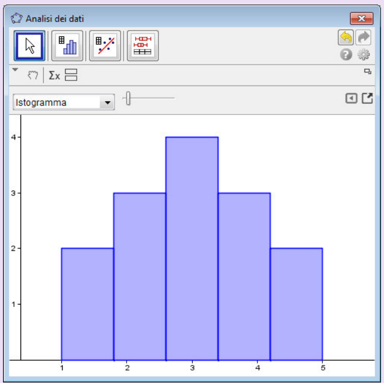
sul quale si opera appunto come un normale foglio di calcolo. Immessi i dati abbiamo lapossibilità di studiarli e rappresentarli graficamente, cliccando sulla nuova barra dei comandi, in particolare sull'icona . Inseriamo alcuni dati, clicchiamo sull’icona detta e compare la seguente finestra 

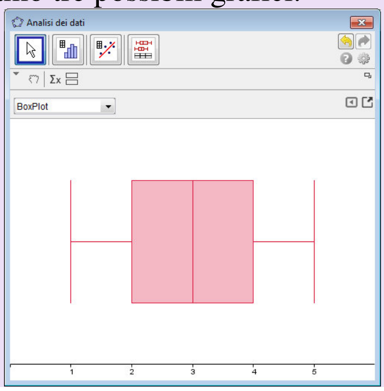
, clicchiamo sul simbolo  che apre il menu 

. Scegliamo **Dati con frequenza**, e immettiamo anche la colonna delle frequenze, 

e otteniamo tre possibili grafici.







Indici centrali

Il problema

Abbiamo raccolto i dati, li abbiamo rappresentati e ora li vogliamo analizzare. Cerchiamo di rappresentare l'intera distribuzione statistica con un solo valore.

Cominciamo a porre una definizione.

Definizione 12

Data una distribuzione statistica a valori numerici, chiamiamo suo **indice centrale** un elemento che rappresenti tutte le sue modalità.

Esempio 15

Da una rilevazione ISTAT nelle scuole elementari italiane, nell'a.s. 1997/98 risultavano iscritti 2820919 alunni a fronte di 282403 insegnanti. Ovviamente non tutti gli insegnanti hanno lo stesso numero di alunni. Ma se *facessimo finta* di volere affidare a ogni insegnante lo stesso numero di alunni quale dovrebbe essere questo numero? Dobbiamo semplicemente distribuire tutti i 2820919 alunni ai 282403 insegnanti, cioè dobbiamo svolgere la divisione 2820919/282403 il cui risultato è circa 9,989. Ovviamente questo valore è privo di significato perché il numero di alunni deve essere intero. Quindi diciamo che ci sono circa 10 alunni per classe.

Il precedente modo di procedere, *facendo finta* che tutti i componenti di una popolazione abbiano la stessa altezza, lo stesso peso, lo stesso reddito e così via, è un modo di procedere molto utilizzato nella pratica.

Definizione 13

Data una distribuzione statistica numerica di cardinalità finita diciamo **media aritmetica** delle sue modalità il numero ottenuto dal rapporto fra la somma delle modalità e la loro cardinalità totale.

In alcuni casi il calcolo della media aritmetica può essere facilitato.

Esempio 16

Supponiamo che un impiegato abbia ricevuto i seguenti stipendi durante un certo anno.

Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno
1245,24	1220,31	1254,12	1245,24	1245,24	1245,24
Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre
1220,31	1260,12	1245,24	1220,31	1260,12	2014,24

Vogliamo calcolare il reddito medio annuo, ci accorgiamo che ci sono alcuni valori che si ripetono (1245,24 per 5 volte, 1220,31 per 3 volte e 1260,12 per 2 volte). Piuttosto che sommare tutte le modalità, allora conviene moltiplicare ciascun valore per le relativa frequenza e poi divider per la somma delle frequenze: $\frac{1245,24\cdot 5+1220,31\cdot 3+1254,12\cdot 1+1260,12\cdot 2+2014,24\cdot 1}{12}\approx 1306,31$.

Definizione 14

Data una distribuzione statistica numerica di cardinalità finita diciamo **media aritmetica ponderata o pesata** delle sue modalità, il numero ottenuto dal rapporto fra la somma delle differenti modalità, ciascuna moltiplicata per la rispettiva frequenza, e la somma delle frequenze.

Notazione 1

La media aritmetica ponderata delle modalità della distribuzione $\{(a_1, f_1), (a_2, f_2), ..., (a_n, f_n)\}$, si indica con il simbolo $\mu = \frac{a_1 \cdot f_1 + a_2 \cdot f_2 + ... + a_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n}$, o con $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$.

Nella notazione breve il simbolo Σ si chiama **sommatoria** e indica appunto la somma di elementi indicati tutti con un simbolo uguale, in questo caso *a*, che differiscono fra loro per un numero posto in basso a destra del simbolo stesso; quest'ultimo simbolo è quello variabile. Nella sommatoria si indicano i valori iniziale, nel precedente esempio 1, e finale, nell'esempio *n*.

Esempio 17

Per indicare la precedente media di tredici elementi in modo abbreviato indichiamo le 8 modalità con i simboli a_1, a_2, ..., a_8 e le relative frequenze con f_1, f_2, ..., f_8. Così scriveremo: $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{8} a_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{8} f_i}$.

Nasce un altro problema, come calcolare la media per dati raggruppati in classi? Vediamo un esempio.

Esempio 18

Nella seguente tabella sono riportati il numero di laureati in Economia e commercio nell'Università di Bari nel 2004, suddivisi per classi di età (dati MIUR)

Età	22-25	26-29	30-34	>=35
Numero di laureati	279	325	143	44

Se vogliamo calcolare l'età media di un laureato come possiamo comportarci? Per applicare la formula stabilita per la media ponderata dobbiamo sostituire l'intervallo con un suo rappresentante. In questi casi in genere si considera il punto medio dell'intervallo, così per esempio a 22-25 sostituiamo (22+25)/2 = 23,5; a 26-29 sostituiamo (26+29)/2 = 27,5 e a 30-34 sostituiamo (30+34)/2 = 32. Ovviamente, come già detto in precedenza stiamo effettuando un abuso, perché nessuno dice che per esempio i 279 laureati di età compresa tra 22 e 25 anni sia distribuita uniformemente, cioè, avendo 4 classi di età, ¼ dei laureati hanno 22 anni, ¼ 23 anni e così via. In questo caso poi 279 non è neanche multiplo di 4 e quindi non può essere. Ma non avendo altre informazioni siamo costretti ad agire in questo modo. Nasce però un altro problema, che significa maggiore o uguale di 35 anni? Anche in questo caso non abbiamo altre informazioni, quindi dobbiamo effettuare una supposizione. Allora o stabiliamo che l'intervallo abbia la stessa ampiezza degli altri, cioè 4 o 5 anni, e perciò lo consideriamo come l'intervallo 35-39 o 35-40 e gli sostituiamo perciò il termine centrale (35+39)/2=37 o 37,5. Oppure consideriamo per esempio che, altri dati ci suggeriscono che non ci sono stati laureati di età superiore ai 37 anni per esempio e perciò consideriamo come rappresentante della classe il numero (35+37)/2 = 36. Ovviamente ogni scelta produrrà una media diversa. Supponiamo di effettuare le scelte mostrate nella successiva tabella.

Età	23,5	27,5	32	36
Numero di laureati	279	325	143	44

L'età media sarà perciò di circa 27,4 anni. Scegliendo come rappresentante dell'ultima classe 37 avremmo ottenuto sempre un valore approssimato di 27,4 anni; scegliendo invece 37,5 avremmo ottenuto 27,5. In questo caso quindi, essendo il numero di laureati della classe *aperta* relativamente piccolo rispetto al resto, il risultato finale non è molto influenzato dalla scelta dell'ampiezza.

Osserviamo che negli esempi svolti la media aritmetica non è un valore soddisfacente a rappresentare l'intera distribuzione, perché per esempio non ha alcun significato, come nel primo esempio del numero di alunni per docente. Ma anche nell'esempio precedente potremmo obiettare che 27,4 anni pur essendo un valore *ragionevole*, però non è un valore appartenente alla distribuzione, dato che essa conteneva 23,5; 27,5; 32 e 36. Questi due fatti accadono spesso nel calcolo della media aritmetica. Per evitarli possiamo cercarli diversi tipi di rappresentanti.

Esempio 19

Poiché la maggior parte dei laureati ha un età di circa 27,5 anni potremmo assumere questo valore come rappresentante dell'età dei laureati.

Ovviamente il precedente indice centrale ha un significato molto diverso rispetto alla media aritmetica.

Definizione 15

Diciamo **moda** di una distribuzione statistica di cardinalità finita, le modalità che presentano la massima frequenza.

Una distribuzione con una sola modalità più frequente si dice *unimodale*, con due *bimodale* e così via; in generale una distribuzione con più di una moda si dice *plurimodale*.
La moda, si capisce anche il perché di questo nome, si usa soprattutto nei sondaggi d'opinione ed è in qualche modo la traduzione del modo di dire: "la maggioranza ha sempre ragione". Con la moda si determina appunto la "tendenza" della maggior parte degli intervistati.

Esempio 20

Un cartolaio vuole evitare che si ripeta quel che è successo l'anno prima, quando ha avuto decine di diari invenduti, perché i ragazzi preferivano diari – agende, mentre lui aveva acquistato soprattutto diari legati a personaggi di cartoni animati. Quindi quest'anno effettua un sondaggio fra la sua clientela, chiedendo quale diario preferirebbero acquistare. Dai risultati della sua indagine, raccolti nella successiva tabella

Pers. Disney	Manga	Barbie e simili	Agende	Smemoranda	Altri
20%	32%	10%	8%	18%	12%

il cartolaio rileva che la preferenza, almeno fra la sua clientela abituale, quest'anno è per i diari con protagonisti i personaggi dei cartoni giapponesi, pertanto provvederà ad acquistare più diari del genere.

Osserviamo tuttavia che, per quanto seria e scrupolosa possa essere l'indagine, nessuno garantisce al cartolaio di vendere effettivamente tutti o la maggior parte dei diari acquistati. Potremmo anche fare un altro tipo di ragionamento.

Esempio 21

Consideriamo la seguente distribuzione di altezze in un gruppo di undici amici: {172, 170, 168, 170, 169, 184, 182, 159, 167, 168, 171}. Se calcolassimo la media aritmetica essa varrebbe circa 170,9 *cm*. Invece mettiamo le altezze in ordine crescente: {159, 167, 168, 168, 169, 170, 170, 171, 172, 182, 184}. Dato che i valori sono undici vi è un termine centrale, cioè il sesto, che in questo caso è 170, che divide gli 11 valori in modo che vi siano 5 valori non superiori a 170 e 5 non inferiori a 170. Scegliere 170 come indice centrale equivale a sapere che *almeno il* 50% *degli amici ha un'altezza di almeno* 170 *cm* e un 50% *che ha un'altezza di al più* 170 *cm*.

Diamo un nome a questo nuovo indice centrale.

Definizione 16

Data una distribuzione statistica numerica di cardinalità finita, diciamo sua **mediana** il numero, non per forza appartenente alla distribuzione, che divide la distribuzione in due insiemi ugualmente numerosi ì cui valori sono rispettivamente tutti *non inferiori alla mediana* e *tutti non superiori alla mediana*.

Non è sempre facile calcolare la mediana. Se gli elementi sono in numero dispari, li indichiamo con $2n + 1$, essa è l'elemento che, nell'ordinamento crescente o decrescente, occupa la posizione $n + 1$. Se gli elementi sono in numero pari, li indichiamo con $2n$, la mediana è la media aritmetica degli elementi che occupano le posizioni n e $(n + 1)$.

Esempio 22

Se agli amici dell'esempio precedente se ne fosse aggiunto un altro alto 165 *cm*, la distribuzione sarebbe divenuta {159, 165, 167, 168, 168, 169, 170, 170, 171, 172, 182, 184}. A noi interessano gli elementi che occupano le posizioni 6 e 7, che lasciano 5 elementi prima e 5 dopo. Essi sono 169 e 170, quindi la mediana è la loro media aritmetica, cioè 169,5.

L'angolo storico

Il termine **mediana** è stato usato per la prima volta da Francis Galton nel 1881. Invece il termine **moda** è stato coniato nel 1895 dal grande statistico Karl Pearson.

Come possiamo calcolare la mediana nel caso di una distribuzione per classi di valori?

Esempio 23

Riprendiamo l'esempio 18 dei laureati in Economia e Commercio. Vogliamo sapere qual è la minima età del 50% dei laureati. Tutti i laureati sono in numero di 791 = 2 · 395 + 1, che è un numero dispari. Pertanto la mediana è l'elemento che occupa la posizione 395. Essendo i valori giù ordinati crescentemente per età possiamo dire che questo elemento fa parte della classe 26-29. Ma che numero compreso tra 26 e 29 dobbiamo prendere? Facciamo sempre un'ipotesi, cioè che i 325 laureati siano distribuiti uniformemente nella classe, cioè che il primo di essi abbia 26 anni, il 325° ne abbia 29 e poi i 3 anni che separano questi due siano ripartiti uniformemente tra tutti. Cioè il secondo abbia (26 + 3/325) anni, il terzo abbia (26 + 6/325) anni, e così via aggiungendo sempre 3/325 a ogni elemento successivo. In questo modo effettivamente il 325° avrà 26 + 3/325 ·325 = 29 anni. Allora dato che il primo elemento della classe è in realtà il 280° di tutta la distribuzione ordinata, il 395° elemento della distribuzione occuperà la posizione (395 – 279) = 116 nella classe 26-29 ed avrà perciò un'età teorica di 26 + 3/325 · 116 ≈ 27,07 anni.

Quanto detto nell'esempio precedente si può generalizzare.

Teorema 1

Data una distribuzione statistica numerica, finita di n elementi, se la mediana M_e appartiene alla classe $[a; b]$ si ha: $M_e = a + \frac{n/2 - \sum_i f_i}{f_{Me}} \cdot (b-a)$, in cui con f_i abbiamo indicato le frequenze delle classi precedenti la classe mediana e con f_{Me} la frequenza della classe mediana.

Verifichiamo che la precedente formula applicata ai dati dell'esempio precedente fornisce lo stesso risultato già ottenuto.

Esempio 24

La classe mediana è [26-29] e la sua frequenza è 325; solo la classe 22-25 precede la classe mediana e la sua frequenza è 279. a = 26, b = 29. La formula diventa: $M_e = 26 + \frac{791/2 - 279}{325} \cdot (29-26) \approx 27{,}07$

Possiamo ottenere la mediana di una distribuzione statistica per classi anche in un altro modo. Prima poniamo una definizione.

Definizione 17

Data una distribuzione statistica numerica di cardinalità finita di valori raggruppati per classi, diciamo **distribuzione delle frequenze relative cumulate**, l'insieme ordinato delle somme delle frequenze relative.

Esempio 25

Considerando sempre la distribuzione dei laureati in Economia e Commercio, la distribuzione delle sue frequenze relative è {279/791; 325/791; 143/791; 44/791} = {≈ 0,35; ≈ 0,41; ≈ 0,18; ≈ 0,06}. La distribuzione delle frequenze relative cumulate è {≈ 0,35; ≈ 0,35 + 0,41 = 0,76; ≈ 0,76 + 0,18 = 0,94; ≈ 0,94 + 0,06 = 1}.

Ovviamente l'ultimo elemento della distribuzione delle frequenze relative cumulate deve essere 1 o comunque, tenuto conto delle approssimazioni, un valore molto prossimo a 1 (0,98; 0,99 o 1,01 vanno bene. Mentre 0,95 o 1,03 non vanno bene). Usando le frequenze relative cumulate per determinare la mediana dobbiamo considerare la prima classe la cui frequenza cumulata supera 0,5.

Esempio 26

Considerando la distribuzione precedente la prima frequenza cumulata superiore a 0,5 è 0,76 che si riferisce alla classe [26-29]. Quindi come visto in precedenza dobbiamo adesso determinare quale valore meglio rappresenta la mediana. Non è difficile capire che il ragionamento è lo stesso di quello visto in precedenza con le frequenze assolute. Quindi nella formula applicata prima basta sostituire le frequenze cumulate piuttosto che quelle assolute.

Avevamo $M_e = 26 + \frac{791/2 - 279}{325} \cdot (29 - 26)$. Cosa dobbiamo cambiare? Ovviamente non i valori della classe, ma solo le frequenze. Pertanto al posto di 791/2 dobbiamo mettere il centro delle frequenze cioè 0,5. Al posto di 279 la frequenza cumulata precedente a quella in cui si trova la mediana, cioè 0,35. Al posto di 325, che rappresentava quanti elementi vi sono nella classe, l'ampiezza della classe in termini di frequenze cumulate è cioè 0,76 – 0,35. Pertanto la formula diventa: $M_e = 26 + \frac{0,5 - 0,35}{0,76 - 0,35} \cdot (29 - 26) \approx 27,07$. Ovviamente il risultato non varia.

Possiamo allora enunciare il seguente risultato del tutto simile al Teorema 1.

Teorema 2

Data una distribuzione statistica numerica, finita di n elementi, la cui distribuzione delle frequenze cumulate è $\{f_1, f_2, \ldots, f_h\}$, se si ha $f_{m-1} < 0,5$ e $f_m \geq 0,5$, allora la mediana M_e appartiene alla classe $[x_{m-1}; x_m]$, relativa a f_m e si ha: $M_e = x_{m-1} + \frac{0,5 - f_{m-1}}{f_m - f_{m-1}} \cdot (x_m - x_{m-1})$.

In effetti potremmo generalizzare il concetto di mediana considerando piuttosto che il valore che separa gli elementi ordinati della distribuzione in due classi ugualmente numerose, in n classi ugualmente numerose. Per esempio in 4 parti, considerando così i cosiddetti **quartili**, q_1, q_2, q_3 e q_4. Che rappresentano il 25%, il 50% (perciò q_2 è la mediana), il 75% e il 100% della distribuzione.

Esempio 27

Riportiamo i dati dei laureati in Economia e Commercio, scritti con le rispettive frequenze cumulate

Classe di età	Freq. Ass.	Freq. Rel.	Freq. Rel. Cum.
22-25	279	0,35	0,35
26-29	325	0,41	0,76
30-34	143	0,18	0,94
35-37	44	0,06	1,00

Possiamo dire che il primo quartile appartiene alla classe 22-25, la mediana e il terzo quartile a 26-29, il quarto quartile è ovviamente l'estremo delle classi, cioè 37. Per calcolare primo e terzo quartile possiamo fare un ragionamento simile a quello fatto per la mediana, con formula simile:

$$q_1 = 22 + \frac{0,25 - 0}{0,35 - 0} \cdot (25 - 22) \approx 24,14; q_3 = 26 + \frac{0,75 - 0,35}{0,76 - 0,35} \cdot (29 - 26) \approx 28,93$$

Quindi possiamo dire che il 25% dei laureati ha un'età non superiore a 24,14 anni e il 75% un'età non superiore a 28,93 anni.

Poniamo una ulteriore definizione.

Definizione 18

Data una distribuzione statistica numerica di cardinalità finita, diciamo suoi **quantili** i numeri, non per forza appartenenti alla distribuzione, che dividono la distribuzione ordinata in n insiemi ugualmente numerosi e ordinati allo stesso modo. In particolare se $n = 4$ li chiameremo **quartili**, se $n = 10$ li chiameremo **decili**.

Vale il seguente risultato.

Teorema 3

Data una distribuzione statistica numerica, finita di n elementi, la cui distribuzione delle frequenze cumulate è $\{f_1, f_2, \ldots, f_h\}$, se si ha $f_{m-1} < 1/h$ e $f_m \geq 1/h$, allora il quantile q_h che divide la distribuzione in h insiemi ugualmente numerosi, appartiene alla classe $[x_{m-1}; x_m]$, relativa a f_m e si ha: $q_h = x_{m-1} + \frac{1/h - f_{m-1}}{f_m - f_{m-1}} \cdot (x_m - x_{m-1})$.

Vi sono anche altri indici centrali.

Esempio 28

Abbiamo già parlato in altre unità di questo corso della cosiddetta capitalizzazione composta, nella quale gli interessi vengono liquidati alla fine del prestito, insieme con il rimborso della somma. Il che significa che l'interesse si va a sommare al capitale che così aumenta. Abbiamo visto anche la validità della seguente formula $C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$, in cui C_n indica il capitale maturato dopo n rate, C_0 è il capitale inizialmente investito e i è il tasso di interesse espresso come numero decimale.
Così, nel caso di un capitale iniziale di € 8200,00, impiegato a capitalizzazione composta con tasso del 3,1% per 15 anni, con cedola annuale, si riceverà alla fine del prestito un capitale di € $8200{,}00 \cdot (1 + 0{,}031)^{15} \approx$ € 12962,65. In effetti negli ultimi anni vengono utilizzati dei nuovi certificati di deposito il cui il tasso è variabile, legato a certi indici (prezzo del petrolio, valore di una o più azioni, ecc…). supponiamo per esempio che un risparmiatore abbia depositato una certa somma vincolata per cinque anni, ottenendo i tassi rispettivi del 2,35%, 2,73%, 3,15%, 3,24%, 3,68%. Vogliamo sapere quale sarebbe stato il valore del tasso fisso annuale in ipotesi di capitalizzazione composta. Per semplificare le idee supponiamo che il risparmiatore avesse investito 1000 euro, nella tabella seguente seguiamo l'evolversi del suo capitale.

Capitale iniziale	Tasso	Interesse	Capitale maturato
1000,00	2,35%	23,50	1023,50
1023,50	2,73%	≈27,94	≈27,94 + 1023,50 = 1051,44
≈ 1051,44	3,15%	≈ 33,12	≈ 1051,44 + 33,12 = 1084,56
≈ 1084,56	3,24%	≈ 35,14	≈1084,56 + 35,14 = 1119,70
≈ 1119,70	3,68%	≈ 41,20	≈ 1119,70 + 41,20 = 1160,90

Se avesse impiegato i soldi a un tasso fisso i, abbiamo invece visto che il suo capitale sarebbe diventato $(1 + i)^5$. Ma questo valore deve essere pari ai diversi valori del capitale di partenza aumentato dell'interesse annuo. Cioè $(1 + i)^5 = 1023{,}5 \cdot 1027{,}3 \cdot 1031{,}5 \cdot 1032{,}4 \cdot 1036{,}8$, il che significa che $(1 + i) = \sqrt[5]{1023.5 \cdot 1027.3 \cdot 1031.5 \cdot 1032.4 \cdot 1036.8} \approx 1030.3$, quindi $i \approx 3{,}03$ %.

Nell'esempio precedente abbiamo considerato un nuovo indice centrale relativo a una distribuzione statistica

Definizione 19

Data una distribuzione statistica numerica di cardinalità finita, $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ ad elementi positivi, diciamo sua **media geometrica** la quantità $G = \sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_N}$

La media geometrica si usa per determinare il valore medio di una distribuzione in cui ciascuno degli elementi della distribuzione si ottiene dal precedente moltiplicandolo per un dato fattore.

Vediamo ancora un indice centrale.

Esempio 29

Tre operai sbrigano uno stesso lavoro in 6, 8 e 9 ore rispettivamente. Un operaio "medio" che cioè lavorasse in media quanto i tre in quanto tempo sbrigherebbero il lavoro? Poiché ogni operaio in un'ora sbriga rispettivamente $\frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ *e* $\frac{1}{9}$ del lavoro, se lavorano insieme ciascuno concorre al lavoro con questa percentuale, perciò ogni ora vengono svolti $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}=\frac{12+9+8}{72}=\frac{29}{72}$ del lavoro. Questo significa che ciascuno dei tre mediamente in un'ora ha svolto $\frac{1}{3}\cdot\frac{29}{72}=\frac{29}{216}$ del lavoro, quindi un operaio che lavora quanto i tre in media completerà il lavoro in $\frac{216}{29}=\frac{3}{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}}\approx 7.45$ (ore).

Abbiamo così definito ancora un indice centrale.

Definizione 20

Data una distribuzione statistica numerica di cardinalità finita, $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ ad elementi diversi da zero, diciamo sua **media armonica** la quantità $H=\frac{N}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i}}$

.

Verifiche

Lavoriamo insieme

I seguenti dati ISTAT si riferiscono al numero di Kg di concimi chimici per ettaro di terra coltivata in Italia in alcuni anni.

Anno	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
Kg/Ettaro	145,5	145,7	136,7	145,6	150,9	150,5	172,3	174,3	161,8

Vogliamo calcolare quanti Kg per ettaro mediamente sono stati usati in Italia nei 9 anni indicati. Basta sommare i valori e dividere per 9, ottenendo così 1383,3/9 ≈ 153,7.

Date le seguenti distribuzioni statistiche, calcolarne la media aritmetica e rispondere alle altre eventuali domande

Livello 1

1. Biblioteche statali: consistenza del materiale, consultazioni, prestiti (Dati ISTAT)

Anno	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1993	1994
Biblioteche statali	42	42	47	47	49	46	50	50
Manoscritti	140868	143381	143731	147148	159362	159422	162504	163315
Volumi	15669407	15874223	16133067	16361424	16740783	16884696	20485525	21229466
Opere consultate	3379657	3840622	3433517	3552974	3850811	3718685	2963070	3013284

[46,625; 152466,4; 17422324; 3469078]

2. Prezzo medio della benzina anno 2008

Data	01/03	02/05	02/05	01/07	03/08	08/09	04/10	09/11	08/12
Prezzo medio	1,373	1,444	1,504	1,544	1,489	1,468	1,438	1,221	1,12

[1,40]

3. Delitti denunciati all'Autorità giudiziaria (Dati ISTAT)

Tipo di delitto	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Omicidi volontari	2783	2678	2773	2631	2571	2529
Furti	1369692	1333118	1338446	1393974	1401471	1478221
Rapine	31515	29981	28614	31244	32896	37782
Estorsioni	3214	3340	3261	3842	3352	3534
Sequestro di persona	84	86	98	89	85	91
Stupefacenti	33310	38290	38269	38954	41420	43014
Altri delitti	819305	765984	856027	952257	958959	860577

[2661; 1385820; 32005; 3424; 89; 38876; 868852]

4. Potenza eolica installata a fine 2011

Paese	Cina	USA	Germania	Spagna	India	Francia	Italia
Potenza in MW	62412	47084	29075	21726	16078	6836	6743

Di quanto il valore italiano è minore della media, in percentuale? [27136,29; ≈302%]

5. Prezzi medi al consumo del pane al Kg, in Italia, riportati in Euro correnti. (Dati ISTAT)

ANNO	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
PREZZO	0,09	0,15	0,44	0,84	1,19	1,72	2,07	2,35	2,69

Qual è la variazione percentuale del prezzo del pane dal 1970 al 2010? In quale quinquennio il prezzo del pane è aumentato percentualmente di più? [€ 1,28; ≈2889%; 75-80]

6. Prezzi medi al consumo del pane al Kg, in Italia, riportati in Euro del 2010. (Dati ISTAT)

ANNO	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
PREZZO	1,53	1,48	1,96	1,94	2,09	2,36	2,54	2,58	2,69

Possiamo dire che il trend intravisto tenuto conto del valore assoluto del prezzo del pane è rimasto uguale a quello considerandone il valore relativo? [€ 2,13; No, in questo caso il prezzo non è in costante aumento, ha anzi quinquenni in cui il prezzo diminuisce]

7. Prezzi medi al consumo del latte in Lt, in Italia, riportati in Euro del 2010. (Dati ISTAT)

ANNO	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
PREZZO	1,14	1,17	1,19	1,22	1,29	1,35	1,35	1,37	1,42

Possiamo dire che dal 1970 al 2010 il prezzo del latte ha avuto un comportamento simile a quello del pane? [€ 1,28; No, il latte nel 95-00 ha avuto sempre un aumento di prezzo; il pane invece ha avuto due periodi (70-75 e 80-85) di decrescita. D'altro canto però gli aumenti del prezzo del pane sono stati considerevolmente più alti, specialmente nel periodo 75-80]

8. Consumo giornaliero di litri di benzina di una compagnia di taxi. [≈6,87]

Litri	5	6	7	8	9	10
Num. Auto	14	15	10	16	5	3

9. Numero massimo di posti a sedere per autobus di una compagnia. [≈43]

Num. Posti	12	15	20	30	52	54
Num. Bus	3	4	2	8	24	12

10. Numero di scarpa di candidati a essere ammessi in una scuola militare. [≈42,8]

Num. scarpa	39	40	41	42	43	44	45	46	47
Num. Bus	2	15	24	38	55	36	20	5	2

11. Popolazione residente in Italia, espressa in milioni, relativamente a 8 censimenti ufficiali(dati ISTAT). [52,95]

Data	21/4/1931	4/11/1951	15/10/1961	24/10/1971	25/10/1981	20/10/1991	21/10/2001	9/10/2011
Popolazione	41,6	47,5	50,6	54,1	56,6	56,8	57	59,4

Livello 2

Nei seguenti esercizi per le classi di ampiezza non specificata, considerarle omogenee con le altre.

12. Numero di azioni trattate in un giorno in borsa per alcune società (in migliaia). [≈ 404286]

Num. scambi	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	>600
Num. Società	25	45	78	104	27	36

13. Stipendio medio mensile dei dipendenti di una società (in migliaia di euro). [≈ 1415,15]

Stipendio	<1000	1000-1200	1201-1400	1401-1600	1601-1800	>1800
Num. Dipendenti	10	24	57	68	27	12

14. Ripartizioni percentuali degli iscritti di leva nati nel 1972 per classi di stature relativamente ad alcune regioni italiane (dati ISTAT). Determinare la statura media degli iscritti per ognuna delle regioni presentate. [174,06; 174,53; 173,77; 172,44; 170,33]

Regione	155–159	160–164	165–169	170–174	175–179	180–184	185–189	190–194
Piemonte	1,3	6	17,4	28,7	26	14,4	5	1,2
Emilia Romagna	1,1	5,2	16,2	27,8	27,3	15,4	5,5	1,5
Lazio	1,3	6,1	17,9	30,1	26,1	13,3	4,1	1,1
Puglia	2,3	8,8	21,4	30,7	23	10,3	2,9	0,6
Sardegna	4,6	13,9	27,4	28,8	17,2	6,3	1,5	0,3

15. (OCSE-PISA) In Zedlandia sono stati effettuati alcuni sondaggi di opinione per determinare il livello di popolarità del Presidente in vista delle prossime elezioni. Quattro editori di giornali hanno svolto sondaggi indipendenti su scala nazionale. I risultati dei quattro sondaggi dei giornali sono i seguenti: Giornale 1: 36,5% (sondaggio effettuato il 6 gennaio su un campione di 500 cittadini con diritto di voto, scelti a caso), Giornale 2: 41,0% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su un campione di 500 cittadini con diritto di voto, scelti a caso), Giornale 3: 39,0% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su un campione di 1.000 cittadini con diritto di voto, scelti a caso), Giornale 4: 44,5% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su 1.000 lettori che hanno telefonato alla redazione per votare).Quale giornale è più attendibile per prevedere il livello di popolarità del Presidente, se le elezioni si svolgono il 25 gennaio? Scrivi due motivi che giustifichino la tua risposta.
[3 perché è più recente di 1 e coinvolge più cittadini di 2 e la scelta è a caso]

16. (OCSE-PISA) Nella scuola di Martina, l'insegnante di scienze fa delle verifiche nelle quali il punteggio massimo è 100. Martina ha un punteggio medio di 60 nelle sue prime quattro verifiche di scienze. Alla quinta verifica, prende 80. Qual è la media dei punteggi in scienze di Martina dopo tutte e cinque le verifiche? [64]

17. Per far sì che risulti più difficile copiare, il professor De Pignolis assegna 6 diversi compiti di matematica, in ogni gruppo vi sono rispettivamente 3, 4, 4, 5, 3 e 4 ragazzi. Dato che il voto medio di ciascun gruppo è stato rispettivamente 5,25, 5,75, 6,75, 4,25, 7,25 e 6,25, determinare il voto medio della classe. [≈ 5,82]

18. La media aritmetica del voto in matematica dei ragazzi della I A è 5,38, quella dei ragazzi della I B è 5,72, infine quella dei ragazzi della I C è 5,63. Sapendo che nelle tre classi vi sono rispettivamente 24, 27 e 22 studenti, determinare la media in matematica degli alunni delle classi prime. [≈5,58]

Lavoriamo insieme

Un insieme di 35 numeri ha per media 22, eliminiamo un numero e la media diviene 20. Quale numero abbiamo tolto? Apparentemente il problema sembra privo di soluzione, sono poche le informazioni in nostro possesso, almeno così ci pare. Ragioniamo un attimo. Cosa significa che la media dei 35 numeri è 22? Che la somma di tutti i numeri è $35 \cdot 22 = 770$.
Allora cosa significa che se eliminiamo un numero la media diviene 20? Che adesso abbiamo 34 numeri, ogni numero vale 20, quindi la loro somma è $34 \cdot 20 = 680$. Perciò il numero eliminato è semplicemente $770 - 680 = 90$.

Livello 2

19. Le seguenti sono le distribuzioni statistiche dei voti di due studenti in una stessa materia.

Studente A	6	4	5	3	7	4	4
Studente B	5	6	5	4	6	7	3

Calcolare le relative medie aritmetiche, indicate con μ_A e μ_B. [≈ 4,7; ≈ 5,1]

20. Si consideri la distribuzione unione delle due distribuzioni dell'esercizio precedente e se ne calcoli la relativa media aritmetica μ. Si verifichi che, a parte qualche errore nelle approssimazioni, vale la seguente uguaglianza: $\mu = \frac{\mu_A + \mu_B}{2}$. [≈ 4,93]

21. Di seguito sono riportati i compensi, espressi in Euro, percepiti da un professionista in due distinte giornate di lavoro da diversi clienti. Si calcolino le rispettive medie aritmetiche μ_A e μ_B.
[≈ 45,2; ≈ 39,3]

I giornata	25	36	42	18	74	58	94	29	31
II giornata	47	51	24	32	36	58	72	15	19

22. Con riferimento all'esercizio precedente si calcoli la media aritmetica μ_C relativa alle due giornate. Si verifichi che, a parte qualche errore nelle approssimazioni, si ha: $\mu_C = \frac{\mu_A + \mu_B}{2}$. [≈ 42,3]

23. Calcolare la media aritmetica della distribuzione statistica S formata dai primi 10 numeri naturali. Ripetere il procedimento per le distribuzioni formate dai primi 11, 12, 13, 14 e 15 numeri naturali. Enunciare quindi una congettura su quale può essere la media aritmetica della distribuzione formata dai primi *n* numeri naturali. Per quali valori di *n* la media è un elemento della distribuzione?
[5,5; 6; 6,5; 7; 7,5; 8; (*n* + 1)/2; *n* dispari]

24. Calcolare la media aritmetica della distribuzione statistica S formata dai primi 10 numeri naturali pari. Ripetere il procedimento per le distribuzioni formate dai primi 11, 12, 13, 14 e 15 numeri naturali pari. Enunciare quindi una congettura su quale può essere la media aritmetica della distribuzione formata dai primi *n* numeri naturali pari. Per quali valori di *n* la media è un elemento della distribuzione?
[11; 12; 13; 14; 15; 16; *n* + 1; qualsiasi *n*]

25. La media di un insieme numerico è 41, eliminiamo il numero 74 e la media dei rimanenti numeri diviene 38. Quanti sono gli elementi dell'insieme? [12]

26. La certificazione ISO9000 viene assegnata a tutti quei prodotti che superano severi tests di affidabilità. Una ditta che produce cerniere per porte richiede questo riconoscimento. La commissione procede alla scelta di un campione di 500 cerniere. Se non più del 10% di tale campione si discosta dalla lunghezza prefissata di *cm*. 15 per non più dello 0,1%, viene rilasciata la relativa certificazione. In tabella sono presentati i risultati del campionamento. Completare la tabella in modo che la ditta riceva il certificato.
[14,99: min 0; 15,03 max 204]

Lunghezza	14,97	14,98	14,99	15,00	15,01	15,02	15,03
Frequenza	12	15		125	114	30	

27. Risolvere il precedente quesito nel caso in cui lo scarto è massimo di 0,1 *cm*. [Impossibile]

28. In relazione al precedente quesito, qual è la massima percentuale che può discostarsi per non più di 0,1 *cm*, affinché il problema abbia soluzioni? [11,4%]

29. Uno studente per calcolare la media μ di tre numeri, *a*, *b* e *c*, calcola la media fra *c* e la media di *a* e *b*. Se $a < b < c$, possiamo dire che la procedura è corretta? Giustifica la risposta. [No]

30. Il numero medio di francobolli che hanno cinque ragazzi è 68, i primi quattro ne hanno rispettivamente 75, 62, 84 e 53. Quanti ne ha il quinto? [66]

31. Sia la media che la mediana di un insieme di cinque distinti numeri naturali è 7, mentre il rango è 6. Quali sono i numeri? [{5, 6, 7, 8, 9} oppure {4, 6, 7, 8, 10}]

32. La media di sette numeri naturali diversi è 7. Qual è il massimo valore possibile che può assumere uno dei sette numeri? [28]

33. Aumentiamo tutti i numeri di un dato insieme di una stessa quantità *k*, cosa accade alla media dei numeri? [aumenta di *k*]

34. Un insieme è formato da (*n* – 1) elementi uguali a 1 e un elemento pari a 24/25. Determinare *n* sapendo che la media aritmetica dell'insieme è $\frac{624}{625}$. [25]

35. Un insieme è formato da 15 elementi uguali fra loro e un elemento pari a 45. Determinare il valore comune dei 15 elementi sapendo che la media aritmetica dell'insieme è 60. [61]

36. Calcoliamo la media $\overline{x}$ di *n* numeri e la aggiungiamo agli *n* numeri. Poi calcoliamo la media di questi *n* + 1 numeri, in che relazione è con $\overline{x}$? [Sono uguali]

37. Alex ha una media aritmetica esattamente uguale a 7, quindi possiamo dire con certezza che
A) Ha preso sempre 7 in ogni verifica B) Non ha preso meno di 4 in ogni verifica C) Non ha preso più di 9 in ogni verifica D) Ha preso sempre voti interi (cioè non ha preso per esempio 7+ o 7 e mezzo) E) Nessuna delle precedenti è vera con certezza [B]

38. Al primo anno del corso di laurea di Ingegneria di una certa Università, sono previste le materie di Analisi matematica I, Geometria, Chimica, Economia, Statistica, Informatica. Ciascuno degli insegnamenti ha un valore in crediti così distribuito, le materie matematiche valgono 9 crediti, Informatica 12 crediti e le rimanenti 6 crediti. Uno studente ha superato gli esami con i seguenti voti, nell'ordine, {27, 24, 30, 25, 28, 27}. Qual è la sua media, tenuto conto dei crediti? Quanto dovrebbe valere, in crediti, la materia di Statistica perché la media divenga 27? [≈ 26,7; 21]

Livello 3

39. Con riferimento al precedente quesito se calcolassimo la media delle materie con uguale valore in crediti e poi calcolassimo la media di queste medie, lo studente risulterebbe favorito o sfavorito? Giustificare la risposta. [Avvantaggiato, la media diverrebbe ≈ 27,2]

40. Con riferimento al precedente quesito possiamo dire che la media delle medie ha sempre un valore maggiore della media ponderata dei valori?
[No, p.e. se le 4 materie in cui si sono ottenuti i migliori voti valgono 12 crediti e le rimanenti materie 6, la media ponderata è 27,3 mentre la media delle medie è 26,25]

41. Sia μ_A la media aritmetica di N elementi e μ_B quella di altri H elementi, quanto vale la media μ_C di tutti gli (M + H) elementi? $\left[\mu_C = \dfrac{N \cdot \mu_A + H \cdot \mu_B}{N + H}\right]$

42. Provare che la media e la mediana di un numero qualunque di numeri interi consecutivi hanno lo stesso valore.

43. Chiamiamo progressione aritmetica una successione di numeri disposti in ordine crescente o decrescente, in modo che la differenza fra due termini consecutivi sia costante (per esempio 1, 4, 7, 10, 13, ... in cui la differenza costante è 3). Provare che la media aritmetica di una progressione aritmetica è uguale alla media fra il minimo e il massimo valore. Può accadere che la mediana di una progressione aritmetica coincida con la media aritmetica? Se sì quando? [Sempre]

44. La media di n numeri naturali diversi è n. Qual è il massimo valore possibile che può assumere uno degli n numeri? [$\frac{1}{2}(n^2 + n)$]

45. Una macchina percorre 50 *km* alla media di 100 *km/h* e altri 50 *km* alla media di 80 *km/h*. Possiamo dire che la sua velocità media nell'intero percorso è di 90 *km/h*, cioè la media delle due velocità? Giustificare la risposta. [No, è circa 88,9 *km/h*]

46. Una macchina cammina per 30 minuti alla media di 100 *km/h* e per 20 minuti alla media di 80 *km/h*. Possiamo dire che la sua velocità media nell'intero percorso è di 90 *km/h*, cioè la media delle due velocità? Giustificare la risposta. [No, è circa 92 *km/h*]

47. Una macchina percorre 50 *km* alla media di 100 *km/h* e altri 40 *km* alla media di 100 *km/h*. Possiamo dire che la sua velocità media nell'intero percorso è di 100 *km/h*, cioè la media delle due velocità? Giustificare la risposta. [Si]

48. Tenuto conto degli esercizi seguenti possiamo dire che la velocità media in due percorsi è uguale alla media delle velocità nei due percorsi solo se hanno la stessa velocità?
[No, basta che i due percorsi vengano effettuati nello stesso tempo]

49. In generale se un tratto a è effettuato a una velocità v_1 e un tratto b a una velocità v_2, la velocità media nel tratto $a + b$ quanto vale, in termini di a, b, v_1 e v_2? $\left[\dfrac{v_1 \cdot v_2 \cdot (a+b)}{av_2 + bv_1}\right]$

50. In generale se per un tempo t_1 si cammina a una velocità v_1 e per un tempo t_2 si cammina a una velocità v_2, la velocità media nel tempo totale, quanto vale, in termini di t_1, t_2, v_1 e v_2? $\left[\dfrac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2}\right]$

51. In una certa popolazione il rapporto fra donne e uomini è *f/m*. Sapendo che la media aritmetica delle età delle donne è d, mentre quella degli uomini è u, determinare la media delle età della popolazione.

$\left[\dfrac{d\cdot f+m\cdot u}{f+m}\right]$

52. Indichiamo con $\mu(x, y)$ la media aritmetica fra x e y. In che relazione sono $\mu(x, y, z)$ e $\mu(\mu(x, y), z)$ se $x < y < z$? [Il primo valore è sempre minore del secondo]
53. Consideriamo un insieme i cui primi due elementi sono x e y, ogni elemento successivo al secondo si ottiene come media aritmetica di tutti quelli che lo precedono. Qual è il termine di posto 1000? [Tutti i termini successivi al secondo sono uguali a $(x + y)/2$]
54. Dati due numeri calcoliamo la loro media aritmetica (a) e la loro media geometrica (g), poi calcoliamo la media aritmetica dei loro quadrati (q). In che relazione sono fra loro $a^2 - g^2$ e $q^2 - a^2$. [Sono uguali]

Lavoriamo insieme

Riprendiamo in considerazione il prezzo medio della benzina durante il 2008, rilevato in alcune giornate, che riportiamo di seguito

Data	01/03	02/05	02/05	01/07	03/08	08/09	04/10	09/11	08/12
Prezzo medio	1,373	1,444	1,504	1,544	1,489	1,468	1,438	1,221	1,12

La media si calcola in € 1,40. Vogliamo invece calcolare la mediana. Dobbiamo scrivere i dati in ordine crescente: {1,12; 1,221; 1,373; 1,438; 1,444; 1,468; 1,489; 1,504; 1,544}. Dati che i valori sono in numero dispari, 9, abbiamo il termine centrale, cioè il quinto che è proprio la mediana, ossia € 1,444. Se avessimo avuto solo 8 rilevazioni, mancando per esempio il dato finale, che rappresenta anche il più piccolo dei valori, dovremmo considerare la media aritmetica fra il 4° e il 5° elemento, cioè (1,444 + 1,468)/2 = 1,456.
Consideriamo invece i dati dell'esercizio 13, che di seguito riportiamo

Stipendio	<1000	1000-1200	1201-1400	1401-1600	1601-1800	>1800
Num. Dipendenti	10	24	57	68	27	12

In questo caso per calcolare la mediana dobbiamo sostituire gli intervalli con il loro termine centrale, considerando tutti gli intervalli di uguale ampiezza, 200.

Stipendio	900	1100	1300	1500	1700	1900
Num. Dipendenti	10	24	57	68	27	12

Adesso costruiamo la tabella delle frequenze relative e cumulate, tenuto conto che il numero totale dei dipendenti è 198.

Stipendio	<1000	1000-1200	1201-1400	1401-1600	1601-1800	>1800
Frequenze Relative	0,05	0,12	0,29	0,34	0,14	0,06
Frequenze Cumulate	0,05	0,17	0,46	0,80	0,94	1,00

La mediana appartiene alla classe 1401-1600, che è la prima la cui frequenza cumulata supera 0,50. Il suo valore preciso si ottiene con la formula stabilita dal Teorema 2: $M_e = x_{m-1} + \dfrac{0,5 - f_{m-1}}{f_m - f_{m-1}}\cdot(x_m - x_{m-1})$, che diventa: $M_e = 1401 + \dfrac{0,5-0,46}{0,80-0,46}\cdot 200 \approx 1424,53$. Ciò significa che almeno il 50% dei dipendenti ha uno stipendio non inferiore a € 1424,53. Potremmo calcolare anche il primo e terzo quartile:

$$q_1 = 1201 + \frac{0,25-0,17}{0,46-0,17}\cdot 200 \approx 1256,17; q_3 = 1401 + \frac{0,75-0,46}{0,80-0,46}\cdot 200 \approx 1571,59$$

Quindi il 25% ha uno stipendio non superiore a € 1256,17 e il 75% non inferiore a € 1571,59.

Livello 1

55. Si calcoli la mediana M_e della seguente distribuzione statistica S = {1, 5, 8, 4, 6, 2, 7, 9, 5, 3, 5}. Si consideri poi la distribuzione S′ i cui elementi sono i reciproci di quelli di S e se ne calcoli la relativa mediana M_e'. Verificare che $M_e = 1/M_e'$. Questo fatto accade per tutte le distribuzioni? Si dia una spiegazione. [5; Sì se la distribuzione non contiene zeri]
56. Di seguito i dati relativi all'Indice della Produzione Industriale italiana nel 2010. Possiamo dire che nel 2010 il 25% degli indici mensili è stato superiore a quale valore? [85,85]

Mese	Gen	Feb	Mar	Apr	Mag	Giu	Lug	Ago	Set	Ott	Nov	Dic
Indice	77,2	86,9	97,4	89	93,8	93,3	99,2	52	96,6	94,4	95,5	82,7

57. Di seguito i dati relativi all'Indice del Fatturato delle Industrie alimentari, delle bevande e del tabacco italiane nel 2010. Possiamo dire che nel 2010 il 75% degli indici mensili è stato inferiore a quale valore? [122,95]

Mese	Gen	Feb	Mar	Apr	Mag	Giu	Lug	Ago	Set	Ott	Nov	Dic
Indice	92,5	100,3	123,7	107,7	112,2	120,4	116,4	105,6	122,7	114,7	125,3	130,3

58. Di seguito i dati relativi al numeri di incidenti stradali in Italia nel 2009. Possiamo dire che nel 2009 il 50% del numero di incidenti mensili è stato inferiore a quale valore? [5090,5]

Mese	Gen	Feb	Mar	Apr	Mag	Giu	Lug	Ago	Set	Ott	Nov	Dic
Incidenti	4338	4128	5228	4953	5753	5317	5357	3382	4856	5521	5468	4657

59. Di seguito i dati relativi agli arrivi di clienti negli esercizi alberghieri nei mesi estivi in Italia nel 2009. Possiamo dire che nell'estate 2009 il 50% del numero di arrivi mensili è stato superiore a quale valore? [4357324]

Mese	Giu	Lug	Ago	Set
Presenze	4017099	4697548	5859594	3743958

Livello 2

60. Tenendo conto dei dati seguenti riferiti al numero di immatricolati al corso di laurea di Scienze Politiche dell'Università di Milano nell'A.A.2005/06, vogliamo sapere qual è il voto minimo che ha conseguito il 25% degli immatricolati il voto massimo che ha conseguito il 75%. [66; 83]

Voto	60-69	70-79	80-89	90-100
Numero	706	521	257	247

61. Tenendo conto dei dati seguenti riferiti al numero di immatricolati al corso di laurea di Medicina Veterinaria dell'Università di Milano nell'A.A.2005/06, vogliamo sapere qual è l'età massima che hanno rispettivamente il 25%, il 50% e il 75% degli immatricolati. [18,7; 19,5; 20,9]

Età	18-19	20-22	23-28	>28
Numero	233	82	24	7

62. Tenendo conto dei dati seguenti riferiti al numero di immatricolati all'Università di Milano nell'A.A.2005/06, vogliamo sapere qual è l'età massima che hanno rispettivamente il 10%, il 30%, il 60% e l'80% degli immatricolati. [19,1; 19,5; 20,2; 22,2]

Età	18	19	20	21	22	23-28	>28
Numero	221	6.407	1.872	731	402	1051	967

Utilizzando il concetto di media geometrica risolvere i problemi seguenti

Livello 2

63. Supponiamo che un giovane in media aumenti annualmente la propria statura del 7%. Se quando è nato era lungo 50*cm*, quanto sarà alto a 20 anni? [≈ 1,93 *m*]
64. Un giovane, che alla nascita era alto 50 *cm*, all'età di 20 anni è alto 180 *cm*; di quanto è aumentata mediamente la sua statura annuale? [3,3 *cm*]
65. Un risparmiatore ha investito una certa somma in regime di capitalizzazione composta, per 7 anni, con i seguenti tassi di interesse annuali, legati al tasso d'inflazione medio: 3,15%, 3,5%, 3,72%, 4,12%, 4,25%, 4,0%, 3,85%. Quale sarebbe stato il valore del tasso fisso d'interesse con capitalizzazione composta nei sette anni? [≈ 3,78%]
66. Per pesare un oggetto si usa una bilancia a due braccia. Per ridurre al minimo gli errori si effettuano diverse pesate, scambiando il peso incognito e quelli noti fra le due braccia. I risultati ottenuti sono presentati nella seguente tabella.

Peso in grammi	13,72	13,73	13,74	13,75	13,76	13,77
Frequenza	3	4	2	5	1	2

Utilizzando il concetto di media geometrica determinare il peso dell'oggetto. Attenzione a ben considerare le frequenze nella formula. [≈ 13,74]
67. In un laboratorio viene effettuato il seguente esperimento. Si innesta una coltura batterica e si osserva il suo comportamento. Dopo un'ora il numero dei suoi elementi è raddoppiato. Allora viene aggiunto un particolare reagente che triplica il numero degli elementi sempre in un'ora. Due ore dopo viene ag-

giunto un altro reagente che quadruplica il numero degli elementi. Infine dopo tre ore si smette l'osservazione della coltura. Si vuol sapere di quanto la coltura batterica avrebbe aumentato il numero dei suoi elementi ogni ora, se lo avesse fatto in modo costante. [≈ 3,24]

68. Un giardiniere, con tre acquisti successivi, raddoppia ogni volta il numero di piante che già possiede. Ne acquista poi altre e, per 4 volte, triplica il numero delle sue piante, e ancora per 2 volte moltiplica per nove il suo vivaio. Infine con gli ultimi tre acquisti moltiplica ogni volte per 6 le piante che ha. Di quanto avrebbe dovuto aumentare, ogni volta nello stesso modo, ogni acquisto per avere alla fine lo stesso numero di piante? [≈ 3,87]

69. Dimostrare che la media geometrica G di due numeri a e b, è soluzione dell'equazione $\frac{G-a}{b-G}=\frac{a}{G}$.

Livello 3

70. Un risparmiatore ha investito una certa somma in regime di capitalizzazione composta, per 10 anni, con i seguenti tassi di interesse annuali per i primi 7 anni: 3,05%, 3,1%, 3,02%, 4,2%, 4,5%, 4,0%, 3,5%. Gli ultimi 3 anni riceve invece un tasso fisso stabilito in partenza. Se vuole ottenere un tasso medio annuo del 3,75% quanto deve essere il tasso fisso? [≈ 4,18%]

71. Con riferimento al precedente quesito, tenuto conto che il tasso fisso non può essere superiore al 5%, qual è il massimo tasso medio annuale ottenibile? [≈ 3,95%]

72. Data l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, esprimere la media aritmetica e la media geometrica delle sue soluzioni, supposte reali e positive, in funzione dei coefficienti. $\left[\mu=-\frac{b}{2a};G=\sqrt{\frac{c}{a}}\right]$

73. Due numeri reali positivi sono tali che la loro media aritmetica eguaglia la media geometrica. Determinare il rapporto fra il maggiore e il minore dei due numeri. $[7 + 4 \cdot \sqrt{3}]$

Utilizzando il concetto di media armonica risolvere i problemi seguenti

Livello 2

74. 5 operai sbrigano uno stesso lavoro rispettivamente in 3, 3,5, 4, 4,5, 5 ore. Un operaio che lavora in media quanto i cinque in quanto tempo effettuerà il lavoro? [≈ 3,87 ore]

75. Tre muratori, A, B e C, riescono a innalzare un muro rispettivamente in 2 ore, 2 ore e 24 minuti, 2 ore e 48 minuti. Un muratore che lavorasse quanto i tre mediamente, in quanto tempo innalzerà un muro? Lavorando per una giornata lavorativa di 8 ore, quanti muri innalzerà? [≈ 2^h21^m; ≈ 3,4]

76. 4 mietitrebbia riescono ad arare un ettaro di terreno coltivato a grano, rispettivamente in 3^h25^m, 3^h40^m, 4^h10^m, 4^h30^m. Per quanto tempo dovrà lavorare una mietitrebbia che lavora mediamente quanto le quattro per arare un campo di 15 ettari? [≈ 3^h54^m; ≈ 58^h23^m]

77. Dimostrare che la media armonica H di due numeri a e b, è soluzione dell'equazione $\frac{H-a}{b-H}=\frac{a}{b}$.

78. Verificare che $H \le G \le \mu$.

Livello 3

79. 5 operai sbrigano uno stesso lavoro rispettivamente in 2, 3, 4, 5 e x ore. Se un operaio che lavora in media quanto i cinque effettua il lavoro in 4 ore, quanto vale x? [Impossibile]

80. Con riferimento al precedente quesito, se l quinto operaio riesce a sbrigare il lavoro in non meno di 1 ora e non più di 10 ore, fra quali valori è compreso il tempo medio di costruzione? [2^h12^m e 3^h36^m]

Enigmi matematici

Vogliamo considerare dei fatti che a prima vista sembrano frutto di magia.
Consideriamo il seguente problema. Il signor Verdi vuole stipulare una polizza assicurativa onnicomprensiva. È indeciso su quale compagnia scegliere, avendone individuate due che gli sembrano particolarmente serie. Per evitare ogni dubbio chiede alle due compagnie i dati statistici relativi al numero di sinistri denunciati con il numero di sinistri effettivamente liquidati. Nelle due tabelle presentiamo i dati.

COMPAGNIA A						
	Furti in casa	Incidenti auto	Furti auto	Infortuni	Malattie	Totale
Denunciati	175	918	150	1040	150	2433
Liquidati	146	726	85	217	12	1186
Percentuale	83,4%	79,1%	56,7%	20,9%	8,0%	48,7%
COMPAGNIA B						
	Furti in casa	Incidenti auto	Furti auto	Infortuni	Malattie	Totale
Denunciati	45	250	115	48	83	541
Liquidati	35	182	62	8	4	291
Percentuale	77,8%	72,8%	53,9%	16,7%	4,8%	53,8%

Considerando i dati individuali non vi è dubbio che la scelta dovrebbe andare alla compagnia A, dato che le percentuali di liquidazioni per singolo sinistro sono sempre maggiori. Accade però un fatto strano, la percentuale di sinistri liquidati in generale risulta invece superiore per la seconda compagnia.
Questo fatto viene denominato con il nome di paradosso di Simpson, dal nome dello statistico che lo enunciò nel 1951. Ci si aspetterebbe infatti che se i singoli eventi hanno peso maggiore anche il totale pesi di più. Ciò sarebbe stato vero se il numero di incidenti denunciati fosse stato uguale per entrambe le compagnie, essendo il numero complessivo di eventi denunciati alla compagnia B inferiore a quelli della A, possono accadere invece questi fatti paradossali.

Variabilità

Gli ultimi esempi ci spingono a studiare il comportamento della distribuzione da altri punti di vista, a considerare per esempio l'ampiezza della distribuzione, cioè la differenza fra il valore massimo e quello minimo.

Definizione 21

Data una distribuzione statistica a valori numerici, diciamo suo **rango** la differenza fra i valori massimo e minimo che essa presenta.

A cosa può servire conoscere il valore del rango di una distribuzione?
Un valore relativamente piccolo (rispetto ai valori in gioco), ci suggerisce che la distribuzione è "abbastanza" uniforme, ossia i suoi valori differiscono poco fra loro; un valore elevato non dà nessuna informazione specifica.

Esempio 30

Consideriamo la seguente distribuzione che si riferisce alla misurazione dello spessore, espressa in mm, di un campione di 8 circuiti elettronici.

0,23	0,25	0,24	0,26	0,23	0,22	0,25	0,27

Il rango appare particolarmente piccolo, appena (0,27 – 0,22) $mm = 0.05 \ mm$.

Determiniamo la media del campione $\overline{m} = \dfrac{0,22 + 0,23 \cdot 2 + 0,24 + 0,25 \cdot 2 + 0,26 + 0,27}{8} = 0,24375 \quad mm$.

Vediamo che il rapporto del rango con la media è $\dfrac{0,05}{0,24375} \approx 20\%$. Come si nota un valore molto alto.

Consideriamo invece la seguente distribuzione relativa a 10 rilevamenti del prezzo, espresso in euro, di un'azione in una giornata.

122,3	122,8	123,1	122,9	123,2	123,5	123,3	123,0	122,4	122,6

Il rango vale 123.5 – 122.3 = 1.2 €, che è molto più alto del precedente, ma il suo valore relativo è molto più basso; infatti la media è $\mu = \frac{122,3+122,8+123,1+122,9+123,2+123,5+123,3+123,0+122,4+122,6}{10}$ = 122,91 €, e il rapporto appena $\frac{1.2}{122,91} \approx 0,97\%$.

Torniamo a chiederci quale sia il migliore indice centrale.
È evidente che in una distribuzione uniforme, nella quale tutti i valori sono uguali, uno qualunque dei tre indici può considerarsi come rappresentante; non è così in una distribuzione in cui vi è concentrazione massima, cioè in cui tutti i valori, tranne uno, sono nulli . Una buona idea è allora quella di introdurre un nuovo concetto che misuri in qualche modo quanto ciascun valore differisce da quello che abbiamo indicato come rappresentante della distribuzione.

Definizione 22

Data una distribuzione statistica formata da n elementi che indichiamo genericamente con x_i e la cui media è μ, diciamo suo **scarto semplice medio** la quantità S = $\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-\mu|}{n}$ dove il simbolo delle barre verticali indica il valore assoluto.

Cerchiamo di capire perché abbiamo considerato i valori assoluti degli scarti.

Esempio 31

Cominciamo a calcolare lo scarto semplice medio della distribuzione: (1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6),la cui media vale $\mu = \frac{3\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 3+4+5+6}{10} = 2,8$. Si ha, considerando i valori assoluti,

$$s = \frac{|3\cdot(1-2,8)|+|2\cdot(2-2,8)|+|2\cdot(3-2,8)|+|4-2,8|+|5-2,8|+|6-2,8|}{10} = \frac{5,4+1,6+0,4+1,2+2,2+3,2}{10} = 1,4$$

e senza i valori assoluti $\frac{-5,4-1,6+0,4+1,2+2,2+3,2}{10} = 0$.

Quel che abbiamo ottenuto nell'esempio precedente non è un caso, ma un fatto generale. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 4

Per ogni distribuzione statistica $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ di media μ si ha: $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0$.

Dimostrazione per esercizio.

Esempio 32

Nella tabella seguente sono riportati, suddivisi per classi di età il numero dei lavoratori italiani regolarmente iscritti a Istituti previdenziali nel 1993, come risulta dai dati ISTAT. I valori sono espressi in migliaia di unità.

Fascia di età	15 – 24	25 – 34	35 – 54	55 – 64	65 e più
Lavoratori	2330	5741	10.051	2024	339

Calcoliamo l'età media dei lavoratori. Avendo a che fare con classi, ricordiamo che dobbiamo prendere in considerazione un rappresentante per ciascuna classe, che è la mediana. Per l'ultima classe consideriamo un valore presumibile, per cui modifichiamo la tabella nel modo seguente.

Età mediana	19,5	29,5	45,5	59,5	67,5
Lavoratori	2330	5741	10.051	2024	339

Calcoliamo la media ponderata: $\mu = \frac{19,5\cdot 2330+29,5\cdot 5741+45,5\cdot 10051+59,5\cdot 2024+67,5\cdot 339}{2330+5741+10051+2024+339} \approx 39,81$

(anni). Quindi nel 1993 un lavoratore italiano aveva mediamente circa 39 anni e 296 giorni (dato che 0,81 anni equivale a 0,81 · 365 giorni ≈ 296 giorni). Vediamo quanto ogni singolo valore si discosta da questa media

$$s=\frac{|19.5-39.81|\cdot 2330+|29.5-39.81|\cdot 5741+|45.5-39.81|\cdot 10051+|59.5-39.81|\cdot 2024}{2330+5741+10051+2024+339}+$$

$$+\frac{|67.5-39.81|\cdot 339}{2330+5741+10051+2024+339}=\frac{212941.67}{20485}\approx 10.395.$$

Quindi lo scarto semplice medio è di ben 10 unità, valore molto alto, perché confrontato con la media è $\frac{10.395}{39.81}\approx 26\%$.

Definiamo adesso una quantità che misura meglio la dispersione della distribuzione.

Definizione 23

Data una distribuzione statistica formata da n elementi, ognuno dei quali è indicato genericamente con x_i e la cui media è μ, diciamo suo **scarto quadratico medio** la quantità $\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}}$.

Definizione 24

Data una distribuzione statistica chiamiamo sua **varianza**, il quadrato dello scarto quadratico medio.

Esempio 33

Calcoliamo lo scarto quadratico medio della distribuzione dell'esempio 23.

$$\sigma=\sqrt{\frac{3\cdot(1-2,8)^2+2\cdot(2-2,8)^2+2\cdot(3-2,8)^2+(4-2,8)^2+(5-2,8)^2+(6-2,8)^2}{10}}=$$

$$=\sqrt{\frac{9,72+1,28+0,08+1,44+4,84+10,24}{10}}=\sqrt{\frac{27,6}{10}}\approx 1,66.$$

Adesso calcoliamo quello della distribuzione {4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8} che ha media 6

$$\sigma=\sqrt{\frac{2\cdot[(4-6)^2+(5-6)^2+(6-6)^2+(7-6)^2+(8-6)^2]}{10}}=\sqrt{\frac{20}{10}}=\sqrt{2}\approx 1,41.$$

Rimane sempre il problema di stabilire il significato dello scarto quadratico medio. Con riferimento all'esempio precedente, quale delle due distribuzioni si discosta meno dalla media? Apparentemente la seconda perché ha un valore minore. Ma abbiamo imparato a diffidare dai valori assoluti, quel che conta è il valore relativamente alle grandezze in gioco. Consideriamo allora un'altra grandezza.

Definizione 25

Diciamo **coefficiente di variazione** di una distribuzione statistica formata da n elementi, ognuno dei quali è indicato genericamente con x_i, la cui media è μ e il cui scarto quadratico medio è σ, la quantità σ/ μ.

Esempio 34

Calcoliamo il coefficiente di variazione delle due distribuzioni dell'esempio 25.

Abbiamo $\frac{\sigma}{\mu}\approx\frac{1,66}{2,8}=0,593$ e $\frac{\sigma}{\mu}\approx\frac{1,41}{6}=0,235$. Pertanto la seconda distribuzione è più "regolare" della prima, dato che la sua variazione attorno alla media è di circa il 23%, mentre la prima invece appare molto "dispersa", avendo un coefficiente pari a più del 59%.

In generale possiamo dire che se la distribuzione è uniforme, allora sia lo scarto semplice sia lo scarto quadratico medio sono nulli, se invece siamo nell'estremo opposto, ossia le n modalità di una distribuzione statistica sono tutte nulle tranne una che assume valore uguale a k, si ha

$$\mu = \frac{k}{n} \qquad \text{e} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\left(0-\frac{k}{n}\right)^2 \cdot (n-1) + (k-\frac{k}{n})^2 \cdot 1}{n}} = \frac{k}{n}\sqrt{n-1}.$$

Quindi più vicino a zero è il valore di σ e più uniforme è la distribuzione, migliore è la media come suo rappresentante.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare lo scarto quadratico medio della distribuzione {2, 3, 5, 4, 5, 7, 4, 5, 6, 2, 8, 6}. Dato che $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n}}$ conviene costruire la seguente tabella:

N	X_i	$(X_i - \overline{m})$	$(X_i - \overline{m})^2$
1	2	–2.75	7.5625
2	3	–1.75	3.0625
3	5	0.25	0.0625
4	4	–0.75	0.5625
5	5	0.25	0.0625
6	7	2.25	5.0625
7	4	–0.75	0.5625
8	5	0.25	0.0625
9	6	1.25	1.5625
10	2	–2.75	7.5625
11	8	3.25	10.5625
12	6	1.25	1.5625
Σ	**57**	**0**	**38.25**

in cui nell'ultima riga abbiamo immesso le somme delle colonne soprastanti. Così la media aritmetica vale $\mu = \frac{57}{12} = 4,75$. Infine lo scarto quadratico medio è $\sigma = \sqrt{\frac{38,25}{12}} \approx 1,78$ Mentre il coefficiente di variazione è circa 0,37.

Determinare lo scarto semplice medio, lo scarto quadratico medio e il coefficiente di variazione relativo delle seguenti distribuzioni statistiche. I risultati sono forniti con solo 3 cifre decimali.

1. {10; 11 ;10; 12; 14; 11; 12; 11; 13; 10; 14} {2,5; 3,25; 2,72; 3,14; 3; 2,83; 2,78; 3,15}
2. {112; 113; 112; 113; 111; 112; 113; 111} {–2; 1; –2; –1; 2; 1; 2; –1; –2; 0}
3. {7; 7 ½; 7–; 5; 6+; 6–; 7; 7–; 5; 5+} {12; 18; 20; 13; 18; 22; 24; 19; 11; 23; 30; 28; 11; 15; 28}
4. {3; 4; 3 ½; 5; 4 ½; 5–; 2; 3+; 4; 4 ½; 5–; 6; 6+} {70; 73; 78; 65; 91; 82; 70; 93; 100; 81; 82; 74; 77}
5. }168; 170; 172; 170; 171; 173; 165; 167; 167; 180; 164; 171; 173}
6. In tabella sono presentati i dati ISTAT relativi al numero di occupati italiani nel 1999, suddivisi per fasce di età. Determinare scarto semplice medio, scarto quadratico medio e coefficiente di variazione

Fascia di età	15 – 24	25 – 34	35 – 54	55 – 64	65 – 70
Occupati	1782	5878	10818	1878	334

7. In tabella sono presentati i dati ISTAT relativi al numero di disoccupati italiani nel 1999, suddivisi per fasce di età. Determinare scarto semplice medio, scarto quadratico medio e coefficiente di variazione

Fascia di età	15 – 24	25 – 34	35 – 54	55 – 64	65 – 70
Percentuale di disoccupati	32862	14515	6036	4815	2557

8. In tabella sono presentati i dati ISTAT relativi al Costo del lavoro per unità di prodotto, espressi in relazione ai prezzi del 1995, considerati pari a 100. Determinare scarto semplice medio, scarto quadratico medio e coefficiente di variazione

Anni	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Costo	50,9	58,4	62,6	67,5	71,3	74,1	76,4	80	87	94,7	98,4	100,9	100,3	100	105,2	106,1	103,4	105,4

9. In tabella sono presentati i dati ISTAT relativi all'indice delle retribuzioni lorde per dipendente, espressi in relazione ai prezzi del 1995, considerati pari a 100. Determinare scarto semplice medio, scarto quadratico medio e coefficiente di variazione

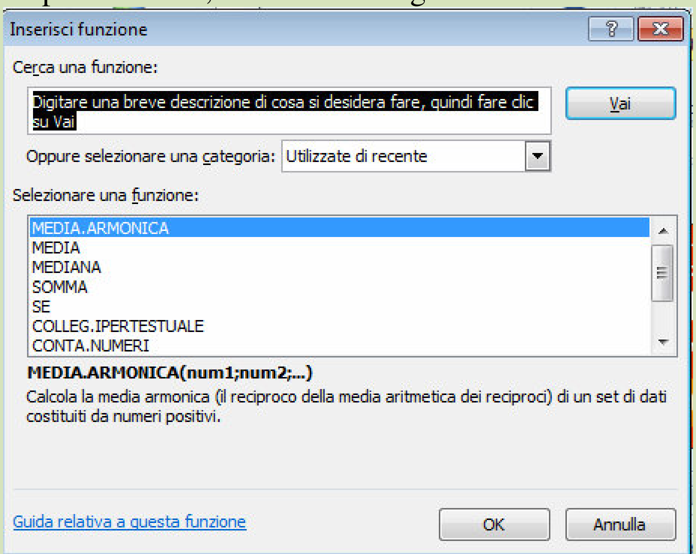
Anni	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Indice	70.3	75.6	85.4	90.6	93.8	97.3	100.0	104.7	108.5	111.4	113.3

10. Calcolare lo scarto quadratico medio delle distribuzioni degli esercizi precedenti, utilizzando la seguente formula: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}\right)^2}$

11. Scrivere un programma per calcolare lo scarto quadratico medio di una distribuzione statistica.

L'angolo di Excel

Excel dispone di diverse funzioni statistiche predefinite. Per utilizzarle possiamo scrivere direttamente il comando, oppure premendo il pulsante f_x, che attiva la seguente finestra.



Scegliendo **Statistiche** nel menu **categoria**, verranno visualizzate tutte le funzioni statistiche predefinite. Notiamo che sono veramente molte. Prendiamo in considerazione la sintassi solo di quelle che abbiamo presentato in questa unità didattica.

FREQUENZA(matrice_dati;matrice_classi)

Calcola la frequenza delle modalità di una distribuzione statistica, in certi intervalli di valori prefissati. **Matrice_dati** è l'intervallo in cui sono immesse le modalità della distribuzione. **Matrice_classi** è l'intervallo in cui sono immessi i limiti superiori delle classi. Per ottenere il risultato dobbiamo evidenziare tante colonne quante saranno le classi e poi immettiamo la formula. Dopo aver fato ciò premiamo contemporaneamente i tasti **Ctrl + Shift + Invio**, questo provoca la comparsa di due parentesi graffe attorno alla formula.

MEDIANA(num1;num2;...)

Restituisce la mediana di un insieme che ha fino a un massimo di 30 numeri.

MEDIA(num1; num2; ...)

Restituisce la media aritmetica di un insieme che ha fino a un massimo di 30 numeri.

MODA.SNGL(num1;num2;...)

Restituisce la moda di un insieme che ha fino a un massimo di 30 numeri.

Fra le innumerevoli funzioni statistiche Excel presenta anche quelle relative agli scarti. In particolare.
DEV.ST.P(num1;num2;...)
Calcola la deviazione standard o scarto quadratico medio, dei valori indicati, massimo 30.
VAR.P(num1;num2;...)
Calcola la varianza dei numeri indicati, massimo 30.
Non è invece presente un comando per il calcolo dello scarto semplice medio, che può però facilmente definirsi.
Attività.
Svolgere con Excel tutti gli esercizi relativi al calcolo di medie e di scarti.

L'angolo di Derive

In Derive sono predefinite alcune funzioni statistiche. Vediamo quelle relative alle funzioni da noi presentate. Per determinare la media di n numeri z1, z2, ..., zn si usa il comando **AVERAGE(z1, z2, ..., zn)**
La varianza di z1, z2, ..., zn, si calcola con **VAR(z1, z2, ..., zn)**
Per la deviazione standard o scarto quadratico medio di z1, z2, ..., zn, si usa **STDEV(z1, z2, ..., zn)**
Vi è da dire che la formula usata per lo scarto quadratico medio è la stessa usata da alcune calcolatrici scientifiche. Cioè $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - M)^2}{N-1}}$. In statistica questa formula viene utilizzata spesso quando si ha che fare con campioni e non con l'intera popolazione.

L'angolo di Geogebra

Anche Geogebra ha parecchie funzioni predefinite, ma vi è la possibilità di averle calcolate automaticamente insieme con il grafico basta cliccare sul pulsante **mostra statistiche** Σx, ecco cosa si ottiene, con i dati mostrati nel precedente box.

Statistiche	
n	14
Media	3
σ	1.2536
s	1.3009
Σx	42
Σx²	148
Min	1
Q1	2
Mediana	3
Q3	4
Max	5

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Consideriamo un insieme i cui primi due elementi sono x e y, ogni elemento successivo al secondo si ottiene come media aritmetica dei due che lo precedono. Qual è l'espressione del termine di posto n con $n > 2$? $\frac{\left[2^{n-2} + (-1)^{n-1}\right] \cdot x + \left[2^{n-1} - (-1)^{n-1}\right] \cdot y}{3 \cdot 2^{n-2}}$

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Liceo scientifico suppletiva PNI 1992/93) Per pianificare i trasporti in un centro cittadino si effettuano delle rilevazioni, in corrispondenza di un punto nevralgico, in due diverse fasce orarie. vengono rilevai il numero dei veicoli e il relativo numero di occupanti. I dati sono quelli della seguente tabella:

Ore di punta		Altro orario	
n° occupanti	n° veicoli	n° occupanti	n° veicoli
1	250	1	77
2	135	2	75
3	42	3	28
4	47	4	0
		5	34

Si richiede di: rappresentare graficamente le distribuzioni statistiche; dare una descrizione, mediante indici statistici (media, moda, varianza) della situazione nelle due fasce orarie; utilizzare i dati della tabella per valutare la seguente affermazione: "Nelle ore di punta c'è un aumento sia del numero di auto sia del numero di occupanti per ogni auto".

$$\left[\mu_1 = \frac{139}{79}, \sigma_1^2 = \frac{5959}{6241}, \mu_2 = \frac{481}{214}, \sigma_2 = \frac{85145}{45796}\right.$$; affermazione falsa]

2. (Liceo scientifico PNI 1994/95) Nella tabella seguente sono riportati i dati di un'indagine campionaria, relativamente ad alcune regioni e al 1990, sulla distribuzione delle abitazioni secondo la superficie abitata (area espressa in metri quadrati):

Superficie Regione	50 – 95 m^2	96 –110 m^2	111 – 130 m^2	131 – 200 m^2
Liguria	130	11	6	5
Campania	362	1805	105	122
Sicilia	1068	430	203	149

Il candidato: a) stimi la superficie media abitata nelle tre regioni e la deviazione standard delle stime, assumendo come valore rappresentativo di ogni classe il valore medio; [medie: 79,7; 102,3; 92,3; scarti: 1938; 18,8; 27,8] b) rappresenti mediante diagrammi opportuni le distribuzioni marginali, rispettivamente per regioni e per superficie;

3. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1994/95) Nella tabella seguente sono riportate le distribuzioni delle durate in anni (*n* = numero degli anni) delle pene per i condannati nel 1990 ad almeno un anno di carcerazione (escluso l'ergastolo), suddivise per sesso, secondo una indagine campionaria:

Pene	$1 \le n < 2$	$2 \le n < 5$	$5 \le n < 10$	$10 \le n < 15$	$15 \le n \le 30$
Maschi	200	329	168	91	154
Femmine	13	17	11	5	6

Il candidato: a) stimi la durata media delle pene per maschi e femmine e le rispettive deviazioni standard, assumendo come valore rappresentativo di ogni classe il valore medio; [Medie: 7,76; 6,9; deviazioni: 7,24; 6,5] b) rappresenti mediante diagrammi opportuni le distribuzioni marginali per sesso e per durata;

4. (Istituto magistrale PNI suppletiva 1994/95) Nella tabella seguente sono riportate le distribuzioni (in percentuale) dei maschi e delle femmine in diverse classi di età, residenti in Italia nel 1992:

Classi di età (anni)	0 –4	5 –14	15 – 19	20 – 39	40 – 59	60 – 74	75 –100
Maschi	3,6	16,3	8,7	28,2	25,4	11,6	3,5
Femmine	5,6	14,7	7,9	26,7	25,5	13,7	5,9

Il candidato: a) rappresenti graficamente i dati mediante istogrammi, relativamente ai maschi e alle femmine; b) prendendo come valore rappresentativo di ogni classe il valore medio, determini la statura media e la deviazione standard delle due distribuzioni; [età media maschi = 34,4; età media femmine = 37,2; deviazioni 21,8 e 23,2] c) sulla base delle due distribuzioni determini quale dei due sessi ha vita media maggiore, dandone giustificazione. [le femmine]

5. (Liceo scientifico 2001/2002) Si consideri la seguente proposizione: "La media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica". Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta. [Falsa quando i numeri sono uguali, vera negli altri casi]
6. (Liceo scientifico PNI 2001/2002) Se a e b sono numeri positivi assegnati qual è la loro media aritmetica? Quale la media geometrica? Quale delle due è più grande? E perché? Come si generalizzano tali medie se i numeri assegnati sono n? [La media aritmetica fra due numeri diversi è sempre maggiore della media geometrica; se i numeri sono uguali le medie coincidono]
7. (Liceo scientifico PNI 2004/2005) Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta. [No]

Quesiti assegnati in gare nazionali o internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
AMC = American Mathematical Contest
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
OMI = Olimpiadi della Matematica

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato agli AHSME 1995.
5 numeri naturali hanno media 12 e rango 18, moda e mediana sono entrambe 8. Quali sono tutti i valori che può assumere il secondo più grande numero dei cinque?
Essendo gli elementi in numero dispari la mediana è il terzo numero, in grandezza. Poiché la moda è anch'essa 8 vuol dire che almeno due elementi sono uguali a 8. Quindi gli elementi possono essere $\{a, b, 8, 8, c\}$, con $1 \le a \le b \le 8$ oppure $\{a, 8, 8, b, c\}$ con $1 \le a \le 8 \le b$. Poiché il rango è 18 possiamo dire che $c = a + 18$. Cioè $\{a, b, 8, 8, a + 18\}$ oppure $\{a, 8, 8, b, a + 18\}$. E dato che la media è 12 vuol dire che i cinque numeri sommati danno 60. Quindi abbiamo: $2a + b + 34 = 60 \Rightarrow 2a + b = 26$. Ora le coppie di numeri interi (a, b) che verificano la precedente equazione appartenenti alla prima cinquina non ne esistono perché sia a che b non possono superare 8 e $2 \cdot 8 + 8 = 24$. Nel secondo caso invece ci sono ben 6 soluzioni: (8, 10), (7, 12), (6, 14), (5, 16), (4, 18), (3, 20), che danno le seguenti cinquine:
$\{8, 8, 8, 10, 26\}$, $\{7, 8, 8, 12, 25\}$, $\{6, 8, 8, 14, 24\}$, $\{5, 8, 8, 16, 23\}$, $\{4, 8, 8, 18, 22\}$, $\{3, 8, 8, 20, 21\}$

1. (AHSME 1955) Dati 4 numeri interi effettuiamo il seguente procedimento, scegliamo tre dei quattro numeri, effettuiamo la loro media aritmetica e aggiungiamo il risultato al quarto numero. Ripetendo il procedimento descritto in tutti i modi possibili otteniamo 29, 23, 21 e 17. determinare i quattro numeri. [{3, 9, 12, 21}]
2. (AHSME 1958) Determinare la media aritmetica di $\frac{x+a}{x}$ e $\frac{x-a}{x}$, per $x \neq 0$. [1]
3. (AHSME 1959) Da un insieme di 50 numeri, la cui media aritmetica è 38, eliminiamo i numeri 45 e 55. Quanto vale la media aritmetica dei 48 numeri rimanenti? [37,5]
4. (AHSME 1962) Determinare la media aritmetica dell'insieme formato da $(n - 1)$ elementi uguali a 1 e un elemento pari a $1 - 1/n$. [$1 - 1/n^2$]
5. (AHSME 1964) Dati due numeri positivi a e b, con $a < b$, consideriamo la loro media aritmetica e la loro media geometrica e ne effettuiamo la differenza. Di quale delle seguenti quantità tale differenza è sempre minore? A) $\frac{(a+b)^2}{ab}$ B) $\frac{(a+b)^2}{8b}$ C) $\frac{(b-a)^2}{ab}$ D) $\frac{(b-a)^2}{8a}$ E) $\frac{(b-a)^2}{8b}$ [D]
6. (AHSME 1965) Dati 5 numeri, calcoliamo le seguenti medie aritmetiche: m, di tutti i numeri, k, dei primi due numeri; l, degli ultimi tre numeri; p di k ed l. Quale fra le seguenti scritte è vera indipendentemente dalla scelta dei cinque numeri? [E]
A) $m = p$ B) $m \ge p$ C $m > p$ D) $m < p$ E) Nessuna delle precedenti
7. (AHSME 1973) Consideriamo l'operazione binaria * definita dalla legge $x * y = \frac{x+y}{2}$. Quali fra le seguenti proprietà sono verificate da questa operazione? A) proprietà associativa; B) proprietà commutativa; C) distributività della media rispetto alla somma (cioè $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$);

D) distributività della somma rispetto alla media (cioè $a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$); E) esistenza di un elemento neutro. [B), C)]

8. (AHSME 1982) Su una lavagna scriviamo n numeri interi consecutivi a partire da 1. Poi cancelliamo uno dei numeri scritti. In tal modo la media dei numeri rimasti è 602/17. Che numero è stato cancellato? Suggerimento: considerare quale può essere la media maggiore e quale la media minore a seconda del numero cancellato, quindi determinare un intervallo di valori all'interno del quale sta la media calcolata. [7]
9. (AHSME 1983) In una certa popolazione il rapporto fra donne e uomini è 11:10. Sapendo che la media aritmetica delle età delle donne è 34, mentre quella degli uomini è 33, determinare la media delle età della popolazione. [≈ 33.05]
10. (AHSME 1987) Nella tabella seguente sono riportati i valori esatti, in percentuale, della distribuzione di frequenze di una serie di misure. È stato dimenticato di scrivere il numero totale delle misure effettuate, qual è il suo minimo valore possibile? [8]

Valore misurato	Frequenza percentuale
0	12,5
1	0
2	50
3	25
4	12,5

11. (AHSME 1988) X, Y e Z sono tre insiemi disgiunti di persone. Nella tabella seguente consideriamo alcune medie relative a tali insiemi

Insieme	X	Y	Z	$X \cup Y$	$X \cup Z$	$Y \cup Z$
Media	37	23	41	29	39.5	33

Determinare la media dell'insieme $X \cup Y \cup Z$. [34]
12. (AHSME 1991) 100 studenti hanno partecipato all'AHSME l'anno scorso ottenendo un punteggio medio di 100. I non senior erano il 50% in più dei senior. Determinare la media dei senior sapendo che è stata il 50% più alta di quella dei non senior. [125]
13. (OMI 1992) In una classe vi sono tre ragazzi per ogni due ragazze. Se l'età media dei ragazzi è 15 anni e 5 mesi e quella delle ragazze è 14 anni e 7 mesi, qual è l'età media della classe? [15 anni e 1 mese]
14. (AHSME 1994) La media di un campione di 5 osservazioni è 10, la mediana è 12. qual è il minimo valore che può assumere il range di tale campione? [5]
15. (AHSME 1995) Una distribuzione di 5 numeri naturali ha media 12 e rango 18. La mode e la mediana sono entrambe 8. Quanti sono i diversi valori che può assumere il secondo più grande elemento della distribuzione? [6]
16. (AHSME 1997) Consideriamo la successione 1,–2, 3,–4, 5,–6, . . . , il cui n-esimo termine è $(-1)^{n+1} \cdot n$. Qual è la media dei primi 200 termini della successione? [–0,5]
17. (AHSME 1997) Una distribuzione di numeri interi ha moda 32 e media 22. Il più piccolo dei numeri è 10. La mediana m è un elemento della distribuzione. Se m fosse sostituito da $m + 10$, media e mediana della nuova distribuzione sarebbero 24 e $m + 10$, rispettivamente. Se m fosse sostituito da $m - 8$, la mediana della nuova distribuzione sarebbe $m - 4$. Quanto vale m? [20]
18. (HSMC 1999) Durante i primi 4 giorni da che ha iniziato un nuovo lavoro, Arthur si è svegliato alle 5:30, 5:30, 7:10 e 7:30. In media a che ora avrebbe dovuto alzarsi ogni giorno? [6:25]
19. (HSMC 2000) Un insegnante assegna due diverse prove di uno stesso esame, A e B) Gli esaminandi sono 85 e possono scegliere una sola delle due prove da svolgere. La media, in centesimi, di chi ha svolto la prova A è 68; la media di chi ha svolto la B è 73. Se la media ottenuta da tutti gli esaminandi è 70, quanti studenti hanno svolto la prova A? [51]
20. (AMC 2000) La distribuzione $\{n, n + 3, n + 4, n + 5, n + 6, n + 8, n + 10, n + 12, n + 15\}$ ha mediana 10. Qual è la media? [11]
21. (AMC 2000) Quando la media, la mediana e la moda della distribuzione $\{10, 2, 5, 2, 4, 2, x\}$ sono ordinate in modo crescente, formano una progressione aritmetica non-costante. Qual è la somma di tutti i possibili valori reali di x? [20]
22. (AMC 2000) Mrs. Walter ha svolto un esame di matematica in una classe di 5 studenti. Ha scritto i voti, in centesimi, in ordine casuale su un foglio elettronico, che ha calcolato automaticamente la media ogni volta che ha immesso un voto. Mrs. Walter ha notato che dopo ogni immissione la media era

sempre intera. I voti, in ordine crescente, sono {71, 76, 80, 82, 91}. Quale voto è stato immesso per ultimo? [80]

23. (AMC 2001) La media di 3 numeri è 10 in più del minimo dei numeri e 15 in meno del massimo. La mediana dei 3 numeri è 5. Quanto fa la somma? [30]
24. (AMC 2001) Il polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica la proprietà che la media dei suoi zeri, il prodotto dei suoi zeri e la somma dei suoi coefficienti sono tutti uguali fra loro. Se l'intersezione con l'asse y del grafico di $y = P(x)$ è 2, quanto vale b? [–11]

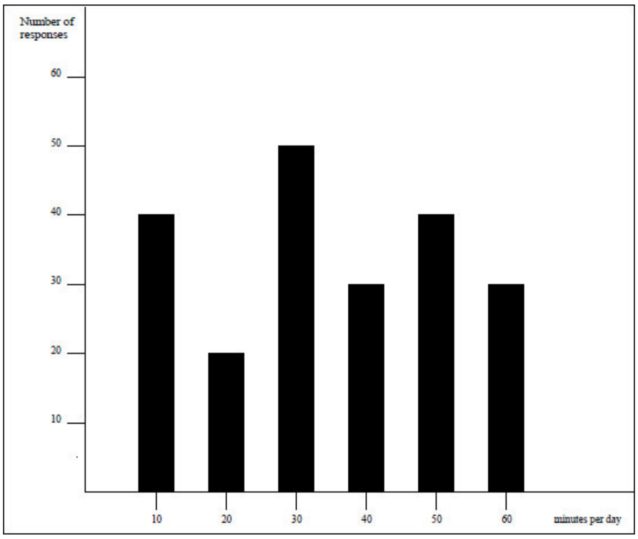
Question in English

Working together

This is a question assigned at HSMC, level BEST in 2001

The batting average for a baseball player is determined by dividing his total number of hits for the season by his total number of official at bats for the season. A baseball player had an average of 0,250 prior to his game yesterday. The player had 0 hits in 4 official at bats in his game yesterday and his average dropped to 0.2475. How many hits does this player have for the season?
Tell that the average is 0,250 in n batting, means that $h/n = 0{,}25$, where h is the sum of all the hits. After other 4 hits we have: $h/(n + 4) = 0{,}2475$. Thus, dividing term by term: $(n + 4)/n = 0{,}25/0{,}2475 \Rightarrow 0{,}2475n + 0{,}99 = 0{,}25n \Rightarrow 0{,}0025n = 0{,}99 \Rightarrow n = 396$. At last: $h/396 = 0{,}25 \Rightarrow h = 396 \cdot 0{,}25 = 99$.

25. (AHSME 1995) Kim earned scores of 87, 83 and 88 on her first three mathematics examinations. If Kim receives a score of 90 on the fourth exam, then her average will [B]
(A) remain the same (B) increase by 1 (C) increase by 2 (D) increase by 3 (E) increase by 4
26. (AHSME 1997) In the sixth, seventh, eighth, and ninth basketball games of the season, a player scored 23, 14, 11, and 20 points, respectively. Her points-per-game average was higher after nine games than it was after the first five games. If her average after ten games was greater than 18, what is the least number of points she could have scored in the tenth game? [29]
27. (AHSME 1998) A speaker talked for sixty minutes to a full auditorium. Twenty per cent of the audience heard the entire talk and ten per cent slept through the entire talk. Half of the remainder heard one third of the talk and the other half heard two thirds of the talk. What was the average number of minutes of the talk heard by members of the audience? [33]
28. (HSMC 1999) Find the mean of all even numbers that can be formed using exactly three of the digits 2, 3, 5 and 7. [552]
29. (HSMC 2000) A class of 100 students were scheduled to take an exam. The instructor created three versions of the exam and distributed them to the students. The class average on the exam was 75.62. Fewer than 30 students took version 1 and fewer than 30 students took version 2. If the average on version 1 was 80, the average on version 2 was 82 and the average on version 3 was 70, then how many students took version 1 of the exam? [25]
30. (HSMC 2000) The average of two numbers is 15. Find the smaller number if the smaller is 2/3 the larger. [12]
31. (HSMC 2000) Let x and y be two distinct positive real numbers whose arithmetic mean is 13 and whose geometric mean is 12. Find x and y. [$x = 8$, $y = 18$]
32. (HSMC 2001) After making a trip of 48 miles, a man found that if he had increased his average speed by 8 mph, he could have made the trip in 1 hour less time. Find his original rate in miles per hour. [16]
33. (HSMC 2001) The arithmetic mean of eight numbers is 75. If the mean of three of these numbers is 60, find the mean of the remaining five numbers. [84]
34. (HSMC 2001) The results of a recent survey of subscribers to the local daily newspaper were summarized in the table below showing the number of people who responded and the number of minutes per day they devote to reading the newspaper. What fractional part of the people surveyed spend 20 to 40 minutes per day reading the paper? [10/21]



Working together

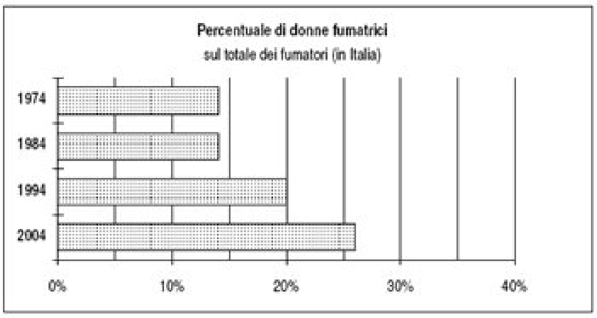
This question was assigned at AHSME in 1996. Six numbers from a list of nine integers are 7, 8, 3, 5, 9, and 5. The largest possible value of the median of all nine numbers in this list is?
The largest possible median will occur when the three numbers not given are larger than those given. Let *a*, *b*, and *c* denote the three missing numbers, where $9 \leq a \leq b \leq c$. Ranked from smallest to largest, the list is 3, 5, 5, 7, 8, 9, a, b, c, so the median value is 8.

35. (HSMC 2002) Before taking his last test in a class, the arithmetic mean of Brian's test scores is 91. He has determined that if he scores 98 on his last test, the arithmetic mean of all his test scores will be exactly 92. How many tests, including the last test, does Brian take for this class? [7]
36. (HSMC 2003) Jack had the following quiz scores: 75, 85, 90, 60, 55. If one more quiz will be given, what is the lowest score Jack can get so as to have an average of 70 or better? [55]
37. (HSMC 2005) Henry took five tests and his average score was 57 points. He scored at least 50 points on each test. There were 100 points possible on each test. What is the highest score that Henry could have earned on any of the five tests? [85]
38. (HSMC 2006) The mean of a set of eight numbers is 3 and the mean of another set, of twelve numbers, is A) If the mean of the combined set of twenty numbers is 10,2, what is the value of A? [15]
39. (HSMC 2007) Before the final exam, Sara had test scores of 91, 89, 83, 78, 76, and 75. Her teacher uses the average of the test scores to assign the final grade. Sara has the option of keeping her current average or replacing the highest and lowest scores test scores with a single score on a final exam. If she chooses the replacement option, what is the lowest score she can receive and still maintain at least the average she currently has? [84]
40. (HSMC 2008) Hasse had an average score of 85 on his first eight quizzes. He had an average score of 81 on his first nine quizzes. What score did he make on his ninth quiz? [49]
41. (HSMC 2008) For each positive integer *n*, the mean of the first n terms of a certain sequence is *n*. What is the 2008th term of the sequence? [4015]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia militare) Il peso medio di un gruppo di tre ragazze è 50 Kg, il peso medio di un gruppo di quattro ragazzi è 70 kg. Qual è il peso medio del gruppo formato dalle sette persone?
A) 60 kg B) Meno di 60 kg C) Più di 60 kg D) 70 kg
2. (Accademia navale) Se la media di 3 numeri è 10, qual è la somma dei 3 numeri?
A) 27 B) 30 C) 24 D) 10 E) 15
3. (Accademia militare) La media aritmetica fra un numero x e il suo reciproco $1/x$ vale
A) ½ B) $(x + 1)/(2x)$ C) $(x^2 + 1)/(2x)$ D) $(x^2 + 1)/x$

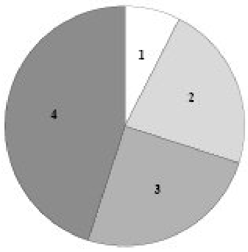
(Economia, Varie Università) I seguenti quesiti si riferiscono al grafico seguente



Percentuale di donne fumatrici sul totale dei fumatori (in Italia)	
1974	14%
1984	14%
1994	20%
2004	26%

	N° Totale di fumatori (migliaia in Italia)	Età dei fumatori (suddivise per fasce)		
		Meno di 25 anni	Tra 25 e 50 anni	Oltre 50 anni
1974	10.500	10%	50%	40%
1984	10.900	15%	50%	35%
1994	12.500	25%	55%	20%
2004	11.200	35%	45%	20%

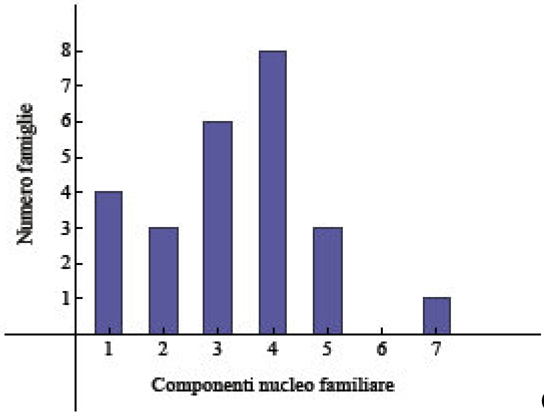
4. Sulla base dei dati riportati nelle tabelle, quale delle seguenti affermazioni NON è corretta?
A) Nel 1994 più della metà dei fumatori avevano tra i 25 e i 50 anni
B) Nel 2004 il numero dei fumatori con meno di 25 anni è diminuito rispetto al 1994
C) Nel 1984 il numero delle donne fumatrici è aumentato rispetto al 1974
D Il numero di fumatori con oltre 50 anni è in costante calo
5. Quante erano le donne fumatrici in Italia nel 1994? A)1250000 B)2500000 C) 3125.000 D) 12500.000
6. In quali degli anni considerati il numero di fumatori con meno di 25 anni NON ha superato i 2 milioni di unità? A) Nel 1974, 1984 e 1994 B) Solo nel 1974 C) Nel 1994 e nel 2004 D) Nel 1974 e nel 1984
7. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza) Ad un corso di laurea sono iscritti studenti di 4 nazioni. La composizione percentuale delle varie nazionalità è rappresentata nel ”grafico a torta” in figura.



Si sa che i numeri degli iscritti provenienti da tre di queste nazioni sono 12, 36, 40 e che uno dei gruppi costituisce esattamente il 25% del totale. Quanti sono gli studenti del gruppo 4?
A) 40 B) 48 C) 72 D) 76
8. (Medicina 1998) La somma algebrica degli scarti rispetto alla media aritmetica dei numeri –4, –3, –2, 5, 6, 7, 8 è: A) 17 B) 35 C) 7 D) 0 E) 2,43.
9. (Medicina 1998) Uno studente universitario ha superato 4 esami, ed ha la media di 23; quale e' il voto minimo che lo studente dovrà prendere all'esame successivo affinché la media diventi almeno 25?
A) 29 B) 30 C) 28 D) 26 E) qualunque sia il voto all'esame successivo, la media non potrà raggiungere il valore 25.
10. (Ingegneria 2000) La media aritmetica dei numeri a e b è 30. Se c = 15, qual è la media aritmetica a, b e c? A) 45 B) 22,5 C) 15 D) 25 E) 75
11. (Ingegneria 2002) L’età media dei partecipanti a una festa è 24 anni. se l’età media degli uomini è 28 anni e quella delle donne è 18 anni, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?
A) 14/9 B) 9/14 C) 2 D) 3/2 E) 4/3
12. (Scienze della formazione primaria, Università di Cagliari 2006-07) Dopo aver sostenuto 3 esami, uno studente ha una media di 28 punti; nei primi due esami ha ottenuto rispettivamente 26 e 28 punti. Quanti punti ha ottenuto nel terzo esame?

A) 28 punti B) 30 punti C) 26 punti D) non è possibile calcolare la media in questo caso E) 18 punti

13. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) In un'intervista è stato chiesto a 25 adulti di indicare il numero di componenti del proprio nucleo familiare. I dati raccolti sono rappresentati nell'istogramma



in figura. Qual è la percentuale di famiglie composte da almeno quattro persone? A) 64% B) 52% C) 48% D) 32%

14. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) Tre amici hanno contribuito alle spese di un viaggio in questo modo: Chiara ha speso 350 euro, Sonia 300 euro e Luciano 550 euro. Affinché il costo del viaggio sia distribuito equamente tra i tre, quanti soldi Chiara e Sonia devono dare a Luciano?
A) Chiara 50 euro, Sonia 100 euro B) Chiara 200 euro, Sonia 250 euro
C) Chiara 100 euro, Sonia 125 euro D) Chiara 25 euro, Sonia 75 euro

15. (Architettura 2009) Uno studente di Architettura ha superato fino a oggi 6 esami, conseguendo la votazione di 21 in due di essi, di 26 in altri tre, e infine il punteggio di 24 in un unico esame. Calcolare la votazione media che lo studente ha conseguito nei 6 esami superati.
A) 22,5 B) 23,5 C) 24 D) 24,5 E) 25

16. (Architettura 2009) Il prezzo del petrolio è oggi di 50 dollari al barile e il rapporto fra il valore del dollaro e il valore dell'euro è di 0,8 (un dollaro vale 0,8 euro). Se fra un anno il prezzo del petrolio raggiungesse i 75 dollari al barile e il rapporto fra dollaro ed euro fosse pari a 0,6 ne risulterebbe che il prezzo in euro di un barile di petrolio: A) aumenterebbe di 2 euro B) aumenterebbe di 5 euro C) aumenterebbe di 10 euro D) diminuirebbe di 5 euro E) rimarrebbe invariato

(Guida Bocconi) Con riferimento ai dati seguenti, rispondi alle seguenti domande

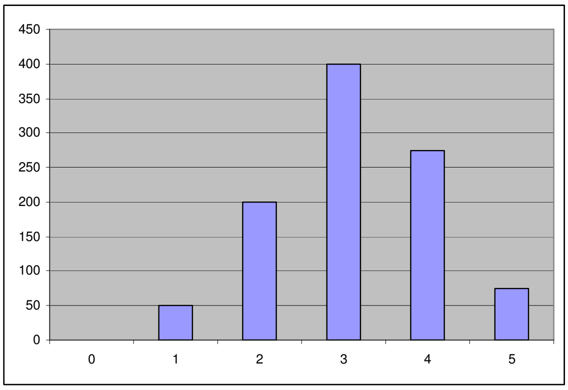
Numero e tipologie di libri venduti nel mese di Gennaio 2011 dal negozio online GoBooks s.r.l.

Tipologia di libro	Libri cartacei		Libri elettronici	
	Pezzi venduti	%	Pezzi venduti	%
Romanzo	45	25,7	5	3,6
Giallo	28	16,0	33	23,6
Horror	10	5,7	21	15,0
Storico	13	7,4	44	31,4
Infanzia	32	18,3	17	12,1
Manualistica	24	13,7	10	7,1
Saggistica	23	13,1	10	7,1

17. Nel mese di Gennaio 2011, presso il negozio online GoBooks s.r.l., la differenza nella vendita tra libri cartacei e libri elettronici corrisponde a: A) 35 libri cartacei in più rispetto a quelli elettronici B) 44 libri cartacei in più rispetto a quelli elettronici C) circa 10 libri elettronici in più rispetto a quelli cartacei D) 0 in quanto è stato venduto esattamente lo stesso numero di libri cartacei ed elettronici E) non è possibile rispondere in base ai dati presentati

18. Si sa che nell'anno 2010 i clienti del negozio online GoBooks s.r.l. con un'età maggiore di 50 anni sono stati 300. Quanti clienti con età minore di 21 anni, ha dunque avuto il negozio online GoBooks s.r.l, nel 2010? A) 350 B) 70 C) 105 D) 90 E) 140

19. Quale delle seguenti affermazioni è corretta? A) Nel 2014 il ricavo per il negozio online GoBook s.r.l. sarà di certo maggiore che nel 2013 B) Il negozio ha toccato il minimo storico di guadagno nel 2008 C) Il massimo ricavato si è avuto nel 2006 D) Nel 2009 si sono venduti soprattutto libri di genere Horror E) Nel 2009 il ricavo è stato pari a 300 €

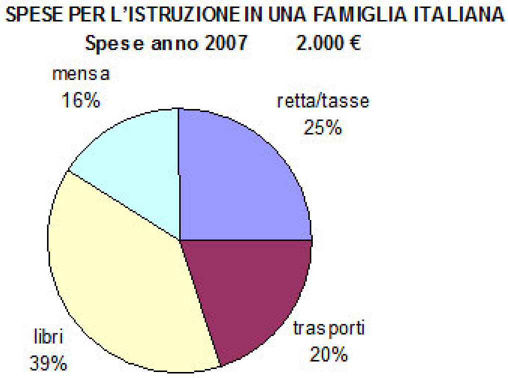
20. (Guida Bocconi) Il diagramma seguente 

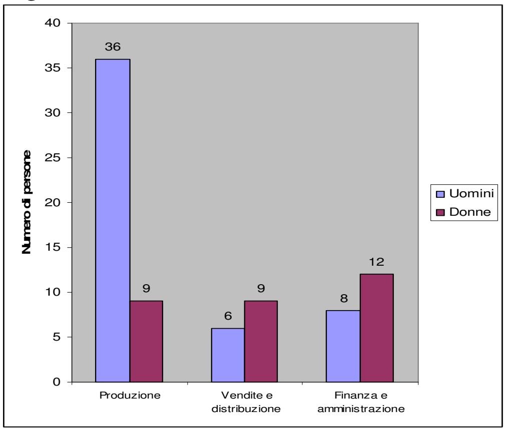
mostra la frequenza del numero di componenti di un certo numero di famiglie. Se si sceglie una famiglia a caso tra queste, qual è la probabilità che sia composta da almeno 3 componenti?
A) Circa 65% B) Circa 75% C) Circa 85% D) Circa 95% E) I dati sono insufficienti

(Test Bocconi) Con riferimento ai dati seguenti, rispondi alle seguenti domande

ISCRIZIONI ANNO 2007–2008

Iscrizioni	Scuole private		Scuole pubbliche
	Laiche	Religiose	
Maschi	6700	5400	18500
Femmine	4300	7600	17500
Totale	11000	13000	36000



21. Nel 2007, quanto una famiglia italiana ha speso per la "mensa"?
A) 220 Euro B) 300 Euro C) 320 Euro D) 400 Euro
22. Rispetto al totale delle iscrizioni dell'anno 2007–2008, qual è la percentuale di femmine iscritte nelle scuole laiche private? A) 7,17% B) 6,25% C) 10% D) 15% E) 8,58%
23. Nel 2008, per quale delle seguenti voci una famiglia italiana ha speso di meno? A) Retta/tasse B) Mensa C) Libri D) Trasporti E) Non è possibile rispondere in base ai dati presentati
24. (Luiss 2011/12) In figura un istogramma mostra il numero di uomini e di donne che lavorano nei tre reparti della Tullio S.p.A 

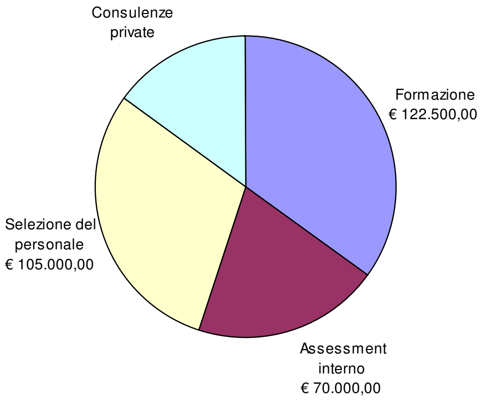
Qual è la percentuale di donne che lavorano alla Tullio S.p.A.?
A) 50% B) 30% C) 26,5% D) 37,5% E) Non è possibile rispondere in base a questi dati

(Luiss 2011/12) La tabella che segue riporta i valori relativi al prestito che 5 aziende hanno chiesto e su cui devono pagare diversi interessi.

Azienda	A	B	C	D	E
Prestito (in euro)	500000,00	600000,00	300000,00	400000,00	350000,00
Interesse annuo	7%	5%	10%	8%	7%

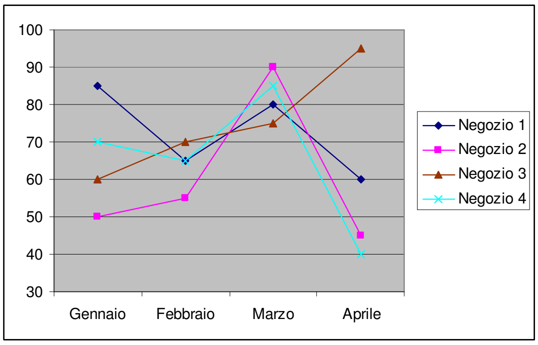
25. Quale Azienda spende maggiormente di interesse annuo?
26. Quanto spende di interesse annuo l'Azienda D?
A) € 24.000,00 B) € 32.000,00 C) € 24.500,00 D) € 26.000,00 E) € 23.000,00
27. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
A) L'Azienda A e l'Azienda D spendono la stessa cifra di interessi annui
B) L'Azienda B e l'Azienda C spendono la stessa cifra di interessi annui
C) L'Azienda A e l'Azienda E spendono la stessa cifra di interessi annui
D) L'Azienda C e l'Azienda D spendono la stessa cifra di interessi annui
E) Non è possibile rispondere in base a questi dati
28. Se l'Azienda F spendesse d'interesse annuo €10.500,00 più dell'Azienda E, quanto spende in tutto?
A) € 35.500,00 B) € 35.000,00 C) € 34.500,00 D) € 26.000,00 E) € 33.000,00

(LUISS 2011/12) Facendo riferimento al grafico e a quanto riportato, rispondete alle domande seguenti.
Il seguente grafico rappresenta in che modo, nel 2006, il reparto "Risorse umane" della Tullio S.p.A. ha investito un budget di € 350.000,00.



29. Quale percentuale di denaro è stata spesa per la Formazione?
A) 23% B) 30% C) 28% D) 40% E) 35%
30. Qual è la percentuale complessiva di denaro che è stata investita in Formazione e Assessment interno?
A) 55% B) 45% C) 60% D) 50% E) 40%
31. Quanti soldi sono stati spesi per le consulenze private nel 2006?
A) € 49.000,00 B) € 53.000,00 C) € 55.000,00 D) € 56.500,00 E) € 52.500,00

(LUISS 2011/12) Facendo riferimento al grafico e a quanto riportato, rispondete alle domande seguenti.
Il grafico seguente rappresentata il numero di PC venduti da quattro diversi negozi nei primi quattro mesi del 2010.



32. In quale mese tutti i negozi hanno venduto il maggior numero di PC del quadrimestre?
A) Gennaio B) Febbraio C) Marzo D) Aprile E) L'evento non si è verificato
33. Quanti PC ha venduto in più il Negozio 1 rispetto al Negozio 4 nel mese di Aprile?
A) 30 B) 25 C) 15 D) 20 E) 10
34. Quanti PC ha venduto in media nei primi quattro mesi del 2010 il Negozio 3?
A) 65 B) 70 C) 75 D) 80 E) 73

(LUISS 2011/12) La tabella che segue mostra i costi di produzione per singola bottiglia, il prezzo all'ingrosso per singola bottiglia e la quantità di bottiglie vendute da una piccola Azienda agricola nel 2009.

Prodotti	Costo di produzione per singola bottiglia	Numero di bottiglie vendute	Prezzo all'ingrosso per singola bottiglia
VINO	€ 6,00	10.000	€ 15,00
OLIO	€ 3,50	9.800	€ 7,00
SPUMANTE	€ 8,00	3.000	€ 25,00
GRAPPA	€ 7,50	7.800	€ 18,00

35. Per quale prodotto c'è stato il maggior profitto nel 2009?
A) Vino B) Olio C) Spumante D) Grappa E) Non è possibile rispondere in base a questi dati
36. Per quale prodotto c'è stato il minor profitto nel 2009?
A) Vino B) Olio C) Spumante D) Grappa E) Non è possibile rispondere in base a questi dati
37. Quale prodotto dà, per bottiglia venduta, il maggior guadagno nel 2009?
A) Vino B) Olio C) Spumante D) Grappa E) Non è possibile rispondere in base a questi dati
38. Quale prodotto dà, per il Centro d'Italia, il maggior guadagno nel 2009?
A) Vino B) Olio C) Spumante D) Grappa E) Non è possibile rispondere in base a questi dati

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
C	B	C	B	B	D	C	D	E	D
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
D	B	C	A	C	B	A	C	C	E
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
C	A	E	D	A	B	B	B	E	A
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**		
E	E	D	C	A	B	C	E		

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_3_3.htm

12 Incertezza e realtà fisica

12.2 Statistica inferenziale

Prerequisiti

- Statistica descrittiva
- Calcolo delle probabilità
- Rappresentazioni grafiche
- Calcolo integrale

Obiettivi

- Generalizzare i concetti della statistica descrittiva nel continuo
- Sapere scegliere il corretto modello statistico a seconda del problema
- Sapere determinare eventuali correlazioni fra dati statistici
- Sapere determinare eventuali associazioni fra dati statistici

Contenuti

- Variabili casuali
- Principali variabili casuali
- Stima e decisioni statistiche
- Correlazione lineare e metodo dei minimi quadrati

Parole Chiave

Correlazione – Covarianza – Distribuzione binomiale – Distribuzione normale – Distribuzione poissoniana – Gaussiana – Interpolante – Intervallo di confidenza – Minimi quadrati – Test di significatività – Variabili casuali o aleatorie

Variabili casuali

La Statistica è il trionfo del metodo quantitative, che a sua volta è la vittoria sulla sterilità e la morte
Hillaire Belloc (1870–1953)

Il problema

Considerando eventi reali, non sempre possiamo effettuare rilevazioni in modo ordinato e quindi siamo in qualche modo costretti a cercare un modello matematico, che è perciò una funzione reale di variabile reale. Più in generale gli eventi reali sono di tipo casuale, pertanto dovrebbero essere affrontati con metodi probabilistici.

Cominciamo a generalizzare i concetti già visti per le distribuzioni statistiche discrete e finite a quelle discrete e infinite o a quelle continue, tenendo conto che deve entrare in gioco la probabilità e quindi dobbiamo definire delle funzioni i cui valori siano appunto le probabilità che accada un dato evento.

Definizione 1

Dato uno spazio E di eventi elementari, chiamiamo **variabile casuale o aleatoria definita su** E, una funzione v: $E \to P \subseteq [0; 1]$, in modo che si abbia

- $\sum_{h=1}^{n} v(e_h) = 1$, se $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$
- $\int_a^b v(x)\,dx = 1$, se $E = [a; b]$.

Nella definizione precedente abbiamo considerato i casi in cui E è discreto da quello in cui è continuo. In effetti però dovremmo anche considerare i casi in cui E è discreto e infinito e in cui è continuo su un intervallo di estremi infiniti. Per evitare di sovraccaricare le definizioni, anche per il seguito, intendiamo che in questi casi la somma diventa una serie numerica e l'integrale diventa generalizzato.
Quindi abbiamo due tipi di variabili casuali, quelle discrete, con spazio di eventi numerabile e quelle con spazio continuo. Entrambe sono definite in modo che il codominio sia un sottoinsieme di [0; 1] e la somma di tutti i valori, finiti o infiniti dia la *certezza*, ossia valga 1. In pratica una variabile casuale fornisce la probabilità che un certo evento accada.

Esempio 1

- Lo spazio degli eventi elementari nel lancio di un dado regolare è $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Una variabile casuale è perciò $v : E \to \{1/6\}$, dato che già sappiamo che la probabilità laplaciana che esca una qualsiasi delle 6 facce è 1/6.
- Se abbiamo invece un dado che ha delle imperfezioni, rimanendo inalterato E, la variabile casuale che possiamo definire è $v : E \to P \subseteq [0, 1]$, con P non ben determinato dato che non sappiamo stimare le probabilità che hanno di accadere i diversi eventi elementari. In ogni caso però sarà $\sum_{h=1}^{6} v(h) = 1$.
- La funzione $v(x) = 3/20 \cdot (x^2 + x + 1)$ è una variabile casuale sull'intervallo [0; 2]. Intanto verifichiamo che è sempre positiva in [0; 2], in effetti su tutto $\mathbb{R}$, poiché $\Delta = 1 - 4 < 0$. Inoltre si ha:

$$\frac{3}{20} \cdot \int_0^2 \left(x^2 + x + 1\right) dx = \frac{3}{20} \cdot \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 = \frac{3}{20} \cdot \left(\frac{8}{3} + \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}^{1}} + 2\right) = \frac{3}{20} \cdot \frac{8+6+6}{3} = \frac{3}{20} \cdot \frac{20}{3} = 1$$

Non è invece una variabile casuale sull'intervallo (0; 1) poiché

$$\frac{3}{20} \cdot \int_0^1 \left(x^2 + x + 1\right) dx = \frac{3}{20} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{20} \cdot \frac{2+3+6}{6} = \frac{3}{20} \cdot \frac{11}{6} \neq 1$$

Generalizziamo adesso alcuni indici centrali.

Definizione 2

Data una variabile casuale v: $E \to P \subseteq [0; 1]$, diciamo sua **media aritmetica** la quantità:

- $\mu = \sum_{h=1}^{n} h \cdot v(e_h)$, se $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$
- $\mu = \int_a^b x \cdot v(x)\,dx$, se $E = [a; b]$

Notiamo che l'integrale è proprio l'estensione nel continuo della media aritmetica ponderata nel caso discreto. Avendo a che fare con funzioni continue, la somma è sostituita dall'integrale e il totale dall'ampiezza dell'intervallo, è il dominio dell'integrale.

Esempio 2

La media della variabile casuale degli esempi precedenti è

$$\frac{3}{20} \cdot \int_0^2 x \cdot (x^2 + x + 1)\,dx = \frac{3}{20} \cdot \int_0^2 (x^3 + x^2 + x)\,dx = \frac{3}{20} \cdot \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{3}{20} \cdot \left(\frac{\cancel{16}^4}{\cancel{4}^1} + \frac{8}{3} + \frac{\cancel{4}^2}{\cancel{2}^1}\right) = \frac{3}{20} \cdot \frac{12+8+6}{3} = \frac{3}{20} \cdot \frac{26}{3} = \frac{13}{10}$$

Facilmente possiamo generalizzare i cosiddetti quantili.

Definizione 3

Data una variabile casuale v: $E \to P \subseteq [0; 1]$, diciamo suo **quantile** il numero reale q per cui, fissato $0 < p < 1$, si ha

- $\sum_{h=1}^{q} v(e_h) = p$ se $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$
- $\int_a^q v(x)\,dx = p$, se $E = [a; b]$.

Ovviamente se $p = ½$ avremo la mediana, se $p = ¼$ il primo quartile e così via.

Esempio 3

Sempre con riferimento alla variabile vista negli esempi precedenti calcoliamo i suoi quartili.

$$\frac{3}{20} \cdot \int_0^q (x^2 + x + 1)\,dx = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{20} \cdot \int_0^2 (x^2 + x + 1)\,dx = \frac{3}{20} \cdot \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_0^q = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{20} \cdot \left(\frac{q^3}{3} + \frac{q^2}{2} + q\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow 2q^3 + 3q^2 + 6q - 10 = 0$$

L'equazione si risolve con metodi numerici, per esempio facendosi aiutare da un CAS come Derive, ottenendo come unica soluzione reale $q \approx 0.94$. In modo analogo si ricavano la mediana: $\frac{3}{20} \cdot \int_0^q (x^2 + x + 1)\,dx = \frac{1}{2} \Rightarrow q \approx 1{,}41$ e il terzo quartile $\frac{3}{20} \cdot \int_0^q (x^2 + x + 1)\,dx = \frac{3}{4} \Rightarrow q \approx 1{,}74$

Passiamo adesso agli indici di dispersione.

Definizione 4

Data una variabile casuale v: $E \to P \subseteq [0; 1]$ di media aritmetica μ, diciamo suo **scarto quadratico medio** la quantità

- $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (e_i - \mu)^2 \cdot v(e_i)}$, se $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$
- $\sigma = \sqrt{\int_a^b (x-\mu)^2 \cdot v(x)\, dx}$, se $E = [a; b]$

Chiamiamo **varianza** la quantità σ^2.

Esempio 4

Calcoliamo lo scarto quadratico medio della variabile precedente, che abbiamo visto avere $\mu = 13/10$. Si ha:

$$\sigma = \sqrt{\frac{3}{20} \cdot \int_0^2 \left(x - \frac{13}{10}\right)^2 \cdot \left(x^2 + x + 1\right) dx} = \sqrt{\frac{3}{2000} \int_0^2 \left(100x^4 - 160x^3 + 9x^2 - 91x + 169\right) dx} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2000} \cdot \left[20x^5 - 40x^4 + 3x^3 - \frac{91}{2}x^2 + 169x\right]_0^2} = \sqrt{\frac{27}{10}} \approx 1,64$$

Ovviamente abbiamo: $\sigma^2 \approx 1,64^2 \approx 2,69$. Dato che non cambia il concetto di coefficiente di variazione esso vale circa $1,64/1,3 \approx 1,26$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Consideriamo il lancio di due dadi regolari. Ricordando che i possibili punteggi ottenibili vanno da 2 (quando esce 1 su entrambe le facce) A 12 (quando esce 6 su tutte e due le facce); che in generale i punteggi ottenibili non sono equiprobabili, per esempio 3 si può ottenere in due modi: (1,2) o (2, 1), mentre 4 in tre modi: (1, 3) (2, 2) o (3, 1); i punteggi la cui somma è 14 hanno la stessa probabilità di accadere: per esempio 2 e 12, 3 e 11 e così via. Possiamo quindi definire la variabile casuale associata $v : \{2, 3, \ldots, 12\} \to \{1/36, 2/36, \ldots, 7/36\}$, con la seguente legge: $v(x) = v(14 - x) = (x - 1)/36$, $1 \le x \le 6$.
Se il dado non fosse regolare invece a priori non siamo in grado di determinare la singola probabilità per ciascuno dei punteggi ottenibili, quindi $v : \{2, 3, \ldots, 12\} \to [0; 1]$, ma in generale $v(x) = ?$.

Definire le variabili casuali associate ai seguenti eventi elementari.

Livello 1

1. Lancio di una moneta regolare. [$v : \{T, C\} \to \{½\}$, $v(x) = ½$]
2. Lancio di una moneta non regolare. [$v : \{T, C\} \to [0; 1]$, $v(x) = ?$]
3. Sesso del primogenito di una data persona. [$v : \{M, F\} \to [0; 1]$, $v(x) = ?$]
4. Risultato da totocalcio di una data partita di calcio. [$v : \{1, X, 2\} \to [0; 1]$, $v(x) = ?$]
5. Estrazione di una carta da un mazzo di 4 carte diverse non segnate. [$v : \{A, B, C, D\} \to \{¼\}$]
6. Estrazione di un numero dai primi 5 numeri interi. [$v : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1/5\}$]
7. Estrazione di un numero naturale di cui interessa stabilire se è pari o dispari. [$v : \mathbb{N} \to \{½\}$]
8. Estrazione di un numero naturale di cui interessa stabilire il suo resto nella sua divisione per 13. [$v : \mathbb{N} \to \{1/13\}$]
9. Estrazione di una pallina da un'urna che ne contiene 2 rosse e 2 blu, indistinguibili al tatto. [$v : \{R, B\} \to \{¼\}$]

Livello 2

10. Estrazione di due carte da 4 carte non segnate, che contengono i diversi assi. [v : {(A_1, A_2), (A_1, A_3), …, (A_3, A_4)} → {1/6}, $v(x) = 1/6$]
11. Estrazione senza rigenerazione di due palline da un'urna che ne contiene 2 rosse e 2 blu, indistinguibili al tatto. [v : {(R, R), (R, B), (B, B)} → {1/6, 2/3}, v((R, R)) = v((B, B)) = 1/6, v((R, B)) = 2/3]
12. Estrazione con rigenerazione di due palline da un'urna che ne contiene 2 rosse e 2 blu, indistinguibili al tatto. [v : {(R, R), (R, B), (B, B)} → {¼, ½}, v((R, R)) = v((B, B)) = ¼, v((R, B)) = ½]
13. Estrazione di un numero reale di cui interessa stabilire se è o no positivo. [$v : \mathbb{R} \to \{½\}$]

Lavoriamo insieme

Consideriamo la funzione $v(x) = e^x$, vogliamo stabilire se può essere una variabile casuale in [0; 1]. La funzione è sempre positiva, ma $\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e - 1 \neq 1$. Pertanto la risposta è negativa. Chiediamoci allora se esiste un intervallo]0; a] in cui possa essere considerata una variabile casuale. Deve aversi: $\int_0^1 e^x\,dx = 1 \Rightarrow \left[e^x\right]_0^a = e^a - 1 = 1 \Rightarrow e^a = 2 \Rightarrow a = ln(2)$. Infine la funzione $v(x) = e^x$, è una variabile casuale nell'intervallo [0; ln(2)].

Stabilire quali delle seguenti funzioni possono essere considerate variabili casuali nei domini indicati, giustificando le risposte

Livello 1

14. $v(x) = x^2$, $x \in [0; 1]$ [No] $v(x) = x^2$, $x \in [0; \sqrt[3]{3}]$ [Sì] $v(x) = e^{-x}$, $x \in [-ln(2); 0]$ [Sì]
15. $v(x) = sin(x)$, $x \in [0; \pi/2]$ [Sì] $v(x) = sin(x)$, $x \in [-\pi/2; 0]$ [No] $v(x) = cos(x)$, $x \in [3\pi/2; 2\pi]$ [Sì]
16. $v(x) = ½x$, $x \in [0; 2]$ [Sì] $v(x) = -½x$, $x \in [-2; 0]$ [No] $v(x) = 1/x$, $x \in [1; e]$ [Sì]

Livello 2

17. $v(x) = ln(x)$, $x \in [0; 1]$ [No] $v(x) = ln(x)$, $x \in [1; e]$ [Sì] $v(x) = 1/(x^2 + 1)$, $x \in [0; 1]$ [No]
18. $v(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in [0; ½]$ [No] $v(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$, $x \in [0; 2]$ [Sì] $v(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$, $x \in [0; 1]$ [No]

Determinare per quali valori reali assegnati ai parametri le seguenti funzioni possono essere considerate variabili casuali nei domini indicati

Livello 2

19. $v(x) = 3x^2 + 2x - 1$, $x \in [0; h]$ [∅] $v(x) = 3x^2 + 2x - 1$, $x \in [½; h]$ [1] $v(x) = 12x^2 - 16x + 5$, $x \in [0; h]$ [½]
20. $v(x) = 1/x$, $x \in [0; h]$ [∅] $v(x) = 1/x$, $x \in [½; h]$ [e/2] $v(x) = 1/x^2$, $x \in [¼; h]$ [1]
21. $v(x) = sin(2x)$, $x \in [0; h]$ [π/2] $v(x) = e^{2x}$, $x \in [0; h]$ [ln(3)/2] $v(x) = e^{-3x}$, $x \in [h; 0]$ [–ln(4)/3]

Livello 3

22. $v(x) = x^2 - h$, $x \in [0; 1]$ [–2/3] $v(x) = 1/(hx)$, $x \in [1; 2]$ [ln(2)] $v(x) = 1/(hx^2)$, $x \in [-2; -1]$ [½]
23. $v(x) = hx \cdot e^{-x^2}$, $x \in [0; +\infty)$ [2] $v(x) = ln(x)/x$, $x \in [1; h]$ $\left[e^{\sqrt{2}}\right]$ $v(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [0; h]$ [tan(1)]

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare la media aritmetica della variabile casuale $v(x) = e^x$, $x \in [0; ln(2)]$. Abbiamo definito $\mu = \int_a^b x \cdot v(x)\,dx$, quindi in questo caso si ha: $\mu = \int_0^{ln(2)} x \cdot e^x\,dx$. Integriamo per parti:

$$\mu = \left[x \cdot e^x\right]_0^{ln(2)} - \int_0^{ln(2)} e^x\,dx = \left[x \cdot e^x - e^x\right]_0^{ln(2)} = \left[e^x \cdot (x-1)\right]_0^{ln(2)} = e^{ln(2)} \cdot [ln(2) - 1] - e^0 \cdot [0 - 1] =$$

$$= 2 \cdot [ln(2) - 1] + 1 = ln(4) - 1 \approx 0{,}39.$$

Calcolare la media aritmetica delle seguenti distribuzioni statistiche

Livello 1

24. $v(x) = x^2$, $x \in [0; \sqrt[3]{3}]$ $\left[3\cdot\sqrt[3]{3}/4\right]$ $v(x) = e^{-x}$, $x \in [-ln(2); 0]$ $[1 - ln(4)]$ $v(x) = sin(x)$, $x \in [0; \pi/2]$ $1]$

25. $v(x) = cos(x)$, $x \in [3\pi/2; 2\pi]$ $[3\pi/2 + 1]$ $v(x) = ½x$, $x \in [0; 2]$ $[4/3]$ $v(x) = 12x^2 - 16x + 5$, $x \in [0; ½]$ $[7/48]$

26. $v(x) = ln(x)$, $x \in [1; e]$ $[¼ \cdot (e^2 + 1)]$ $v(x) = 3x^2 + 2x - 1$, $x \in [½; 1]$ $[175/192]$ $v(x) = 1/x$, $x \in [1; e]$ $[e - 1]$

27. $v(x) = 1/x$, $x \in [½; e/2]$ $[e/2 - ½]$ $v(x) = 1/x^2$, $x \in [¼; 1]$ $[ln(4)]$ $v(x) = sin(2x)$, $x \in [0; \pi/2]$ $[\pi/4]$

Livello 2

28. $v(x) = 1/(ln(2)x)$, $x \in [1; 2]$ $[1/ln(2)]$ $v(x) = 2x\cdot e^{-x^2}$, $x \in [0; +\infty)$ $\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare la mediana della variabile casuale $v(x) = e^x$, $x \in [0; ln(2)]$. Deve essere $\int_0^{M_e} e^x\,dx = 0{,}5$, cioè $\left[e^x\right]_0^{M_e} = 0{,}5 \Rightarrow e^{M_e} - 1 = 0{,}5 \Rightarrow e^{M_e} = 1{,}5 \Rightarrow M_e = ln(1{,}5) \approx 0{,}41$.

Calcolare i quantili richiesti, delle seguenti variabili casuali

Livello 1

29. $v(x) = x^2$, $x \in [0; \sqrt[3]{3}]$, $q = 0{,}5$ $\left[\frac{\sqrt[3]{12}}{2}\right]$ $v(x) = e^{-x}$, $x \in [-ln(2); 0]$, $q = 0{,}25$ $[ln(4/7)]$

30. $v(x) = sin(x)$, $x \in [0; \pi/2]$, $q = 0{,}75$ $[cos^{-1}(¼)]$ $v(x) = ½x$, $x \in [0; 2]$, $q = 0{,}75$ $\left[\sqrt{2}\right]$

31. $v(x) = 1/x$, $x \in [1; e]$, $q = 0{,}5$ $\left[\sqrt{e}\right]$ $v(x) = 1/x^2$, $x \in [¼; 1]$, $q = 0{,}1$ $[10/39]$

32. $v(x) = e^{2x}$, $x \in [0; ln(3)/2]$, $q = 0{,}2$ $\left[ln\left(\sqrt{7/5}\right)\right]$ $v(x) = e^{-3x}$, $x \in [-ln(4)/3; 0]$, $q = 0{,}5$ $\left[ln\left(\sqrt[3]{2/5}\right)\right]$

Livello 2

33. $v(x) = 2x\cdot e^{-x^2}$, $x \in [0; +\infty)$, $q = 0{,}5$ $\left[\sqrt{ln(2)}\right]$ $v(x) = ln(x)/x$, $x \in \left[1; e^{\sqrt{2}}\right]$, $q = 0{,}5$ $[e]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare lo scarto quadratico medio della variabile casuale $v(x) = e^x$, $x \in [0; ln(2)]$. Abbiamo definito: $\sigma = \sqrt{\int_a^b (x-\mu)^2 \cdot v(x)\,dx}$, e tenuto conto che abbiamo calcolato $\mu = ln(4) - 1$, quindi dobbiamo calcolare $\sigma = \sqrt{\int_0^{ln(2)} (x - ln(4) + 1)^2 \cdot e^x\,dx}$. All'inizio conviene lasciare il nome simbolico della media:

$$\sigma = \sqrt{\int_0^{ln(2)} (x-\mu)^2 \cdot e^x\,dx} = \sqrt{\left[(x-\mu)^2 \cdot e^x\right]_0^{ln(2)} - 2\cdot\int_0^{ln(2)} (x-\mu)\cdot e^x\,dx} =$$

$$= \sqrt{\left[(x-\mu)^2 \cdot e^x - 2\cdot(x-\mu)\cdot e^x\right]_0^{ln(2)} + 2\cdot\int_0^{ln(2)} e^x\,dx} = \sqrt{\left[\left(x^2 - 2\mu x + \mu^2 - 2x + 2\mu\right)\cdot e^x + 2e^x\right]_0^{ln(2)}} =$$

$$= \sqrt{\left[\left(x^2 - 2\mu x + \mu^2 - 2x + 2\mu + 2\right)\cdot e^x\right]_0^{ln(2)}} = 1 - 2\cdot ln^2(2) \approx 0{,}039$$

Abbiamo saltato i calcoli finali, nel complesso banali, anche se laboriosi.

Calcolare scarto quadratico medio delle seguenti distribuzioni statistiche, le medie sono state calcolate in precedenti esercizi

***Livello* 1**

34. $v(x) = x^2$, $x \in [0; \sqrt[3]{3}]$ [≈ 0,28] $v(x) = e^{-x}$, $x \in [-ln(2); 0]$ [≈ 0,20] $v(x) = sin(x)$, $x \in [0; \pi/2]$ [≈ 0,38]
35. $v(x) = ½x$, $x \in [0; 2]$ [≈ 0,47] $v(x) = 1/x$, $x \in [1; e]$ [≈ 0,49] $v(x) = ln(x)$, $x \in [1; e]$ [≈ 0,42]
36. $v(x) = 3x^2 + 2x - 1$, $x \in [½; 1]$ [≈ 0,18] $v(x) = 1/x^2$, $x \in [¼; 1]$ [≈ 1,63] $v(x) = 1/x$, $x \in [½; e/2]]$ [≈ 0,25]

***Livello* 2**

37. $v(x) = 1/(ln(2)x)$, $x \in [1; 2]$ [≈ 0,29] $v(x) = 2x \cdot e^{-x^2}$, $x \in [0; +\infty)$ [≈ 0,46]

Principali variabili casuali

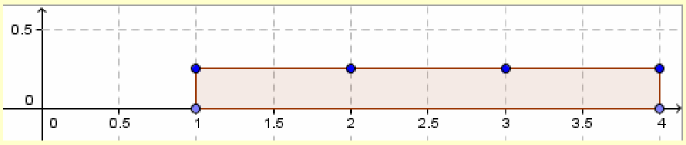
Consideriamo adesso alcune variabili casuali, discrete e continue, che, per diversi motivi, hanno importanti applicazioni.
Il caso teoricamente più auspicabile è quello in cui la variabile è formata da valori uguali, in cui quindi tutto viene distribuito in modo uniforme.

Definizione 5

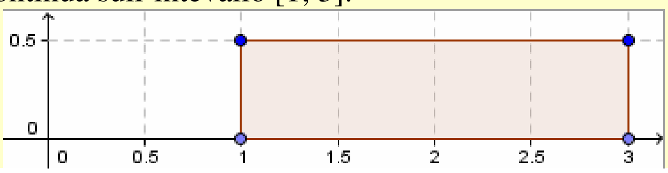
La variabile casuale discreta v: $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \to \{1/n\}$ si chiama **uniforme discreta**.
La variabile casuale continua v: $[a; b] \to \{1/(b - a)\}$ si chiama **uniforme continua**.

Esempio 5

L'istogramma di una uniforme discreta o continua è ovviamente un rettangolo. Nella seguente figura mostriamo una distribuzione uniforme discreta di 4 valori.



Ecco invece una uniforme continua sull'intevallo [1; 3].



Facilmente possiamo calcolarne media, scarto quadratico medio e varianza.

Teorema 1

Per una variabile casuale uniforme discreta si ha: $\mu = \frac{n+1}{2}, \sigma^2 = \frac{n^2-1}{12}$.

Dimostrazione per esercizio

Noi proviamo invece l'analogo risultato per il caso continuo.

Teorema 2

Per una variabile casuale uniforme continua si ha: $\mu = \frac{a+b}{2}, \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Dimostrazione
Tenendo conto della definizione 3, si ha:

$$\mu=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{1}{\cancel{b-a}}\cdot\frac{\cancel{(b-a)}\cdot(a+b)}{2}=\frac{a+b}{2}$$

Mentre per la definizione 5:

$$\sigma^2=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{b-a}dx=\left[\frac{1}{3}\cdot\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\right]_a^b\cdot\frac{1}{b-a}=\left[\frac{1}{3}\cdot\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\cdot\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3\right]\cdot\frac{1}{b-a}=$$

$$=\left\{\frac{1}{3}\cdot\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^3-\left(\frac{a-b}{2}\right)^3\right]\right\}\cdot\frac{1}{b-a}=\left\{\frac{1}{24}\cdot\left[(b-a)^3+(b-a)^3\right]\right\}\cdot\frac{1}{b-a}=\frac{\cancel{2}\cdot(b-a)^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{24}}\cdot\frac{1}{\cancel{b-a}}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Un'altra importante variabile casuale è quella che viene fuori dalle cosiddette prove ripetute indipendenti di Bernoulli, che abbiamo già considerato nella definizione 16 dell'unità 8.4 del secondo volume.

Definizione 6

Dato un evento E che ha probabilità p di accadere e che sottoponiamo a n prove ripetute indipendenti. La variabile casuale discreta v: $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\} \to P \subseteq [0; 1]$, in cui e_k indica il fatto che E si verifichi esattamente k, e definita da $v(e_k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}, 0\le k\le n$, si chiama **binomiale**.

Esempio 6

Un classico esempio di prove ripetute indipendenti di Bernoulli è il lancio di una moneta regolare n volte. Per esempio supponiamo di lanciare 4 volte. Gli eventi possibili sono 5: $\{e_0, e_1, \ldots, e_4\}$, in cui e_t indica il fatto che si presentino esattamente t teste (o indifferentemente t croci). Ovviamente $p = ½$, quindi la relazione della definizione 7 si semplifica in $v(e_t)=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Così per esempio avremo: $v(e_0)=\binom{4}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}, v(e_1)=\binom{4}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}, v(e_2)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$, per le note proprietà di simmetria dei coefficienti binomiali, $\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{n-k}$, abbiamo $v(e_0) = v(e_4)$ e $v(e_1) = v(e_3)$. Quindi possiamo dire che il codominio della variabile è {1/16, ¼, 3/8}. Osserviamo che ovviamente si ha: 2 · 1/16 + 2 · ¼ + 3/8 = 1.

Anche in questo caso possiamo calcolare in generale media e varianza.

Teorema 3

Per una variabile casuale binomiale si ha: $\mu = np$, $\sigma^2 = np\cdot(1-p)$.

Dimostrazione
Dobbiamo calcolare $\mu=\sum_{k=0}^{n}k\cdot\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$, poiché il primo addendo è nullo. Adesso osserviamo che si ha:

$$k\cdot\binom{n}{k}=k\cdot\frac{n!\cdot(n-k)!}{k!}=\frac{n!\cdot(n-k)!}{(k-1)!}=n\cdot\frac{(n-1)!\cdot(n-k)!}{(k-1)!}=n\cdot\binom{n-1}{k-1}$$

Così possiamo scrivere:

$$\mu=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}n\cdot\binom{n-1}{k-1}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}=n\cdot p\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\cdot p^{k-1}\cdot(1-p)^{n-k}$$

Ricordiamo lo sviluppo del binomio di Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$ e teniamo conto che possiamo scrivere: $n - k = (n - 1) - (k - 1)$, per riscrivere: $\mu = np \cdot (p + 1 - p)^{n-1} = np$, che è proprio la prima tesi.
Omettiamo la dimostrazione che $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (k-np)^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = np \cdot (1-p)$.

Verifichiamo il risultato precedente in un caso particolare.

Esempio 7

Consideriamo l'esempio 7. Dobbiamo calcolare

$$\sum_{k=0}^{4} k \cdot \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left[0 \cdot \binom{4}{0} + 1 \cdot \binom{4}{1} + 2 \cdot \binom{4}{2} + 3 \cdot \binom{4}{3} + 4 \cdot \binom{4}{4}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (0+4+2\cdot 6+3\cdot 4+4) = \frac{32}{16} = 2$$

E in effetti $np = 4 \cdot ½ = 2$. Quindi mediamente lanciando per 4 volte una moneta regolare, ci aspettiamo di ottenere 2 teste. Per la varianza invece dobbiamo calcolare:

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{4} (k-2)^2 \cdot \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \cdot \left[4 \cdot \binom{4}{0} + 1 \cdot \binom{4}{1} + 0 \cdot \binom{4}{2} + 1 \cdot \binom{4}{3} + 4 \cdot \binom{4}{4}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (4+4+0+4+4) = \frac{16}{16} = 1$$

e $np(1 - p) = 4 \cdot ½ \cdot ½ = 1$.

Vi sono diversi eventi naturali e no, che seguono andamenti di tipo esponenziale, come abbiamo visto per esempio per i modelli di crescita delle popolazioni. È opportuno perciò definire una variabile casuale che tratti questo tipo di eventi.

Definizione 7

Dato uno spazio discreto E di eventi che si verificano successivamente ed indipendentemente in un certo intervallo di tempo, nel quale mediamente se ne verificano λ, la variabile casuale discreta $v: E \to P \subseteq [0; 1]$, che calcola con che probabilità si verificano esattamente k eventi, definita da $v(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, si chiama **poissoniana**.

Esempio 8

Se in un dato ufficio arrivano mediamente 10 chiamate ogni ora, per sapere con che probabilità si riceveranno, in una certa ora, 7 telefonate, possiamo usare proprio la poissoniana, ottenendo $e^{-10} \cdot \frac{10^7}{7!}$, usando un CAS otteniamo circa 0,09. Quindi la probabilità è di circa il 9%.

Anche in questo caso si ha un risultato per la media e la varianza.

Teorema 4

Per una variabile casuale poissoniana si ha: $\mu = \sigma^2 = \lambda$.
Dimostrazione omessa

Vale una importante relazione fra poissoniana e binomiale.

Teorema 5

Si ha $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$.
Dimostrazione

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{\lambda^k}{n^k}\cdot\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\right]^{-k}=$$

Si ha: $=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$. Tenuto conto che si ha:

$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}=1, \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=e^{-\lambda}, \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k=1$, si ottiene la tesi,

Il risultato precedente vuol significare che la poissoniana è una approssimazione della binomiale per $\lambda = pn$.

Esempio 9

- Per un difetto di fabbrica il 3% dei modelli A di una marca automobilistica è risultato avere un problema all'accensione. Con che probabilità, un concessionario che ha ordinato 15 autovetture non ne riceve nessuna difettosa? Utilizzando la binomiale abbiamo: $\binom{15}{0}\cdot 0,03^0\cdot 0,97^{15}\approx 0,633$. Utilizzando l'approssimazione poissoniana invece dobbiamo porre $\lambda/15 = 0,03 \Rightarrow \lambda = 0,45$ e quindi: $e^{-0,45}\cdot 0,45^0/0! = e^{-0,45} \approx 0,637$ Come si vede la differenza avviene solo a partire dal terzo decimale.
- Se la percentuale fosse stata maggiore del 10%, per esempio 13%, i valori ottenuti sarebbero stati abbastanza diversi. Infatti $\binom{15}{0}\cdot 0,13^0\cdot 0,87^{15}\approx 0,123$, mentre $e^{-1,95} \approx 0,142$. La differenza aumenta all'aumentare di p.

Possiamo dire che la poissoniana è una buona approssimazione della binomiale per $p \le 0,1$.

I protagonisti

Siméon–Denis Poisson nacque a Pithiviers il 21 giugno 1781. Ha ottenuto fondamentali risultati soprattutto in fisica, famoso è il suo *Traité de mécanique*, in 2 volumi, rispettivamente del 1811 e del 1833. Ma si ricordano anche suoi risultati in elettricità e magnetismo. Per quanto riguarda i suoi lavori di statistica, la distribuzione che porta il suo nome fu introdotta in un articolo del 1838: "*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*". Morì a Parigi il 25 aprile 1840.

Adesso consideriamo la più importante e usata variabile casuale continua.

Definizione 8

La variabile casuale continua v: $(-\infty; +\infty) \to [0; 1]$, definita da $v(x)=\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, si chiama **normale (o gaussiana) standardizzata.**

L'importanza della precedente variabile è dovuta al fatto che molte variabili aleatorie convergono verso questa per alti valori dei parametri. Si ha il seguente risultato

Teorema 6

Per una variabile casuale normale standardizzata si ha: $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$.

Dimostrazione

Abbiamo: $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b x \cdot \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \left[e^{-x^2/2} \right]_a^b = 0$.

Mentre: $\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$. Purtroppo questo integrale non è elementare, si ha però $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$, pertanto abbiamo la tesi.

La dimostrazione precedente fa capire la scelta dei parametri. Possiamo generalizzare la gaussiana:

Definizione 9

La variabile casuale continua v: $(-\infty; +\infty) \to \subseteq \mathbb{R}^+$, definita da $v(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$, si chiama **normale o gaussiana.**

Vale il seguente risultato.

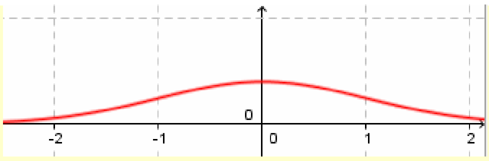
Teorema 7

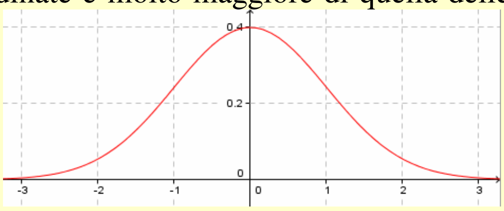
Una variabile casuale normale ha media μ e varianza σ^2.
Dimostrazione omessa

Notazione 1

Una normale di media μ e varianza σ^2 si indica con $N(\mu; \sigma^2)$. Quindi $N(0; 1)$ è la normale standardizzata.

Esempio 10

Rappresentiamo con Geogebra graficamente la normale. 

Ci sarà certamente capitato di vedere la cosiddetta *curva a campana*, che viene utilizzata per esempio nella teoria degli errori sperimentali. La nostra curva appare molto più *piatta*, ciò dipende dal fatto che, proprio per mettere in risalto la forma a *campana*, si utilizza un sistema di riferimento dimetrico, in cui l'unità di misura delle ordinate è molto maggiore di quella delle ascisse. Vediamo di ridisegnare la curva usando un rapporto di 1/5. 

Il calcolo dell'integrale presente nella normale è possibile solo con metodi numerici, fino a non pochi anni fa venivano perciò usate apposite tavole che riportavano il calcolo per alcuni valori, adesso con la diffusione dei CAS ciò non è più necessario, come vedremo negli esempi. Visto il significato geometrico dell'integrale, calcolare $\int_a^b \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$, equivale a calcolare quanto misura l'area del trapezoide della normale lungo l'intervallo $[a; b]$. Visto anche il suo legame con la probabilità esso equivale a stabilire con che probabilità la normale assume valori compresi tra a e b.

Esempio 11

Supponiamo di volere stabilire con che probabilità un valore della normale è compreso tra 0 e 2, dobbiamo quindi calcolare $\int_0^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx \approx 0,4772$. Possiamo quindi dire che vi è una probabilità di circa il 47% che la variabile normale assuma valori compresi tra 0 e 2.

Come ci comportiamo invece con le normali non standardizzate?

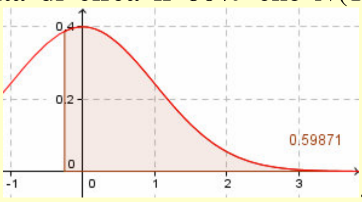
Teorema 8

Una $N(\mu, \sigma^2)$, si trasforma in una $N(0, 1)$ con la trasformazione $\frac{x-\mu}{\sigma} = X$.

Dimostrazione per esercizio

Esempio 12

Supponiamo di volere stabilire con che probabilità un valore di $N(10; 12)$ è maggiore di 7, prima applichiamo la trasformazione del Teorema 8: $X = \frac{7-10}{12} = -\frac{1}{4}$, dobbiamo quindi calcolare $\int_{-0,25}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx \approx 0,5987$.

Vi è una probabilità di circa il 60% che $N(10,12)$ assuma valori maggiori di 7. Geogebra conferma il risultato di Derive: 

.

Potevamo calcolare anche direttamente $\int_7^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-10)^2}{2\cdot 12}}}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{2\pi}}dx \approx 0,5987$

In effetti possiamo stimare il valore delle aree sottese dalla normale standardizzata una volta per tutte.

Esempio 13

Calcoliamo con Derive il valore di $N(0; 1)$ in intervalli $[-n; n]$, con $1 \le n \le 3$.

$$ns(a, b) := \int_a^b \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{(2\cdot\pi)}}dx$$

```
VECTOR(ns(-n, n), n, 1, 3)

          [0.6826894921, 0.9544997361, 0.9973002039]
```

Quindi possiamo dire che vi è circa il 68,2% di probabilità che un valore di $N(0; 1)$ appartenga a $[-1; 1]$; di circa il 95,4% che appartenga a $[-2; 2]$; di circa il 99,7% che appartenga a $[-3; 3]$.

In effetti nel caso particolare di $N(0; 1)$, $[-n; n] = [\mu - n\sigma; \mu + n\sigma]$ e tenuto conto appunto del fatto che questa variabile non è altro che una standardizzazione, in modo che l'area valga 1, il risultato si può generalizzare a una variabile normale qualsiasi.

Teorema 9

Per una $N(\mu, \sigma^2)$, indicando con P la probabilità che un dato valore appartenga a un dato intervallo, si ha

$P(\{\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\}) \approx 68,3\%$; $P(\{\mu - 1,96\sigma < X < \mu + 1,96\,\sigma\}) \approx 95,0\%$;

$P(\{\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\}) \approx 95,5\%$; $P(\{\mu - 2,58\sigma < X < \mu + 2,58\sigma\}) \approx 99,0\%$;

$P(\{\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma\}) \approx 99,7\%$

Dimostrazione per esercizio usando un CAS.

L'aver scelto 1,96 e 2,58 è dovuto solo al fatto che per tali valori le probabilità si avvicinano a valori interi, 95% e 99% rispettivamente.

I protagonisti

Gauss presentò per la prima volta a stampa la curva che oggi porta il suo nome in un lavoro del 1823: *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* (1823), in cui trattò della teoria degli errori sperimentali e in cui presentò anche il cosiddetto metodo dei minimi quadrati.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Supponiamo di avere segnato incollato sul pavimento una sottile striscia di ferro lunga 1 *m* e supponiamo di lanciare su di essa una piccola calamita larga quanto la striscia. Possiamo affermare con buona certezza che, comunque lanciamo la calamita essa si attaccherà alla striscia. Questo significa che la probabilità che la calamità vada a finire su una posizione qualsiasi della striscia non dipende dalla posizione, quindi possiamo descrivere l'esperimento mediante una variabile uniforme. Pertanto per il Teorema 2, ci aspettiamo che lanciando un elevato numero di volte la calamita, il valore medio della distribuzione delle posizioni raggiunte sarà ½.

Livello 1

1. Il lancio di un dado regolare può pensarsi descritto da una variabile uniforme. Calcolarne media e varianza. [3,5; 35/12]
2. L'estrazione di una carta da un mazzo da 40 può pensarsi descritto da una variabile uniforme. Calcolarne media e varianza. [20,5; 1599/12]
3. La scelta di un punto dell'intervallo [–1; 3] può pensarsi descritto da una variabile uniforme. Calcolarne media e varianza. [2; 4/3]
4. All'Opera lo spettacolo inizia esattamente alle 21:00, dopo tale orario nessuno viene ammesso. Tommaso non riesce ad arrivare prima delle 20:45 nelle vicinanze del teatro, dopodiché, a seconda del traffico impiega da 10 a 20 minuti, seguendo una variabile uniforme. Con che probabilità riesce a vedere l'inizio dell'Opera? [50%]
5. La metropolitana della linea A della città di Mathville, dalle 6:00 alle 18:00 effettua corse ogni 5 minuti. Ipotizzando che l'orario in cui una persona arriva alla stazione sia rappresentata da una variabile casuale uniforme, con che probabilità la persona aspetterà meno di 2 minuti il treno? [40%]
6. Una linea di autobus effettua corse ogni 4 minuti, con che probabilità una persona aspetterà meno di 3 minuti? [75%]

Livello 2

7. Con riferimento al problema della calamita del box lavoriamo insieme, con che probabilità essa andrà a finire nei primi o negli ultimi 20 *cm*? [40%]
8. Con riferimento al problema precedente, con che probabilità essa andrà a finire nei primi 30 *cm* o nell'intervallo [0,2 – 0,5]? [50%]
9. Una linea di autobus effettua corse ogni 4 minuti, con che probabilità una persona aspetterà meno di 1 o più di 3 minuti? [50%]
10. Con riferimento al problema precedente, con che probabilità essa aspetterà più di 1 ma meno di 2 minuti? [25%]
11. Le corse di una linea di metropolitane sono ripartite come in tabella.

Fascia oraria	Frequenza
6:00 – 8:00; 12:00 – 14:00; 18:00 – 19:00	3^m
8:00 – 12:00	4^m
14:00 – 18:00	5^m
19:00 – 24:00;	10^m

Determinare la probabilità che un viaggiatore aspetti meno di 2 minuti se arriva casualmente a) dalle 6 alle 8; b) dalle 8 alle 12; c) dalle 19 alle 24. [≈ 67%; 50%; 20%]

Livello **3**

12. Con riferimento al problema delle corse della metropolitana, Determinare la probabilità che un viaggiatore aspetti meno di 2 minuti se arriva casualmente a) dalle 7 alle 9; b) dalle 7 alle 10; c) dalle 13 alle 20; d) dalle 6 alle 24. [≈ 58%; ≈ 56%; ≈ 45%; ≈ 44%]

Lavoriamo insieme

Lanciamo una moneta per 100 volte e otteniamo 43 teste e 57 croci, ipotizziamo quindi che la moneta sia falsata e quindi si abbia p(T) = 0,43 e p(C) = 0,57. Se allora lanciamo per 4 volte la moneta, con che probabilità otteniamo esattamente 3 teste? E almeno 3 teste?

Abbiamo a che fare con una variabile binomiale, quindi la prima probabilità è $\binom{4}{3} \cdot 0,47^3 \cdot 0,53 \approx 0,22$.

Per la seconda domanda dobbiamo calcolare $\binom{4}{3} \cdot 0,47^3 \cdot 0,53 + \binom{4}{4} \cdot 0,47^4 \approx 0,27$.

Livello **1**

13. Determinare media e varianza dell'evento lancio di una moneta regolare per 10 volte. [5; 2,5]
14. Determinare la probabilità che lanciando 7 volte una moneta regolare si ottengano esattamente 3 teste. [≈ 27,3%]
15. Si sa che mediamente il 2% dei pezzi prodotti da un macchinario non è idoneo alla vendita. Con che probabilità in una confezione da 150 pezzi ne troviamo 3 inidonei? [≈ 17%]
16. Nel 2012 in Italia per ogni 1000 bambini nati vivi, entro il primo anno di vita ne sono morti 3,36. Con che probabilità in un ospedale in cui sono nati complessivamente 1324 bambini, tutti siano sopravvissuti al primo anno? [≈ 0,84%]
17. Nel 2012 in Italia il tasso di alfabetizzazione era del 98,4%. Con che probabilità in una popolazione di 150 abitanti, vi sono esattamente 5 analfabeti? [≈ 5,98%]
18. Nel 2012 in Italia il 9,8% della popolazione era classificato obeso. Con che probabilità in una classe di 27, vi sono esattamente 2 obesi? [≈ 25,6%]
19. Nel 2008 in Italia vi erano 4,242 medici per 1000 abitanti. Con che probabilità in quell'anno, scelta una comitiva di 18 persone non si trovavano medici? [≈ 92,6%]
20. Lanciamo una freccia su un bersaglio e stimiamo di avere il 25% di probabilità di centrare il bersaglio. Con che probabilità tirando 4 frecce non colpiamo mai il centro? [≈ 31,6%]
21. Con che probabilità lanciando 5 volte un dado non falsato, si ottenga sempre sei? E sempre lo stesso punteggio? [≈ 0,01%; ≈ 0,08%]
22. Con che probabilità estraendo 4 volte una carta a caso, con rigenerazione, da un mazzo da 40, si ottenga sempre il re di denari? E sempre un re? E sempre una figura? [≈ 0%; ≈ 0,01%; ≈ 0,81%]

Livello **2**

23. Determinare la probabilità che lanciando 7 volte una moneta regolare si ottengano più teste che croci. [50%]
24. Si sa che mediamente l'1,5% dei pezzi prodotti da un macchinario non è idoneo alla vendita. Con che probabilità in una confezione da 100 pezzi ne troviamo da 1 a 3 inidonei? [≈ 14%]
25. Nel 2012 in Italia il rapporto maschi/femmine alla nascita è stato del 1,06. Con che probabilità una famiglia che ha avuto 2 gemelli, li abbia avuti entrambi maschi? [≈ 26%]
26. Il controllo di qualità di una certa industria prevede che alla fine della giornata si controllino a caso 100 pezzi prodotti, se più di 3 presentano imperfezioni si ferma la produzione e si procede a una revisione. Con che probabilità la produzione non si ferma, nonostante che la macchina produca il 5% di pezzi difettosi in totale? [≈ 25,8%]

27. L'over booking consiste nel vendere più biglietti della disponibilità, tenendo conto che le statistiche precedenti hanno evidenziato che una certa percentuale di chi compra il biglietto, per diversi motivi non lo sfrutta. Se in un certo cinema la detta percentuale è del 12% e una sera per 100 posti disponibili si vendono 103 biglietti, con che probabilità tutti gli spettatori troveranno il posto? [≈ 99,9%]
28. Con riferimento al quesito della freccia. Con che probabilità tirando 4 frecce almeno 2 fanno centro? [≈ 26,2%]
29. Con che probabilità lanciando 5 volte un dado non falsato, si ottenga sei almeno 3 volte? E al più 3 volte? [≈ 3,6%; ≈ 99,7%]
30. Con che probabilità estraendo 3 volte una carta a caso, con rigenerazione, da un mazzo da 40, si ottengano al massimo 2 assi? Al minimo due carte dello stesso seme? [≈ 99,9%; ≈ 11,2%]

Livello 3

31. CAS Se la probabilità che lanciando 4 volte una moneta si ottengano esattamente 3 teste è di circa 37%, qual è la probabilità che in un singolo lancio si ottenga testa? [$\approx 0,63 \vee \approx 0,85$]
32. Con riferimento al quesito sull'over booking, rimasti inalterati gli altri dati, quanti biglietti dovranno vendersi, affinché la probabilità che tutti gli spettatori trovino il posto sia inferiore al 90%? [108]

Lavoriamo insieme

In una scuola mediamente vi sono 15 studenti assenti al giorno. Qual è la probabilità che un certo giorno gli assenti siano 18? Questo è un caso tipicamente trattato dalla variabile poissoniana, che in questo caso ha λ = 15. Dobbiamo pertanto calcolare $v(18) = e^{-15} \cdot \dfrac{15^{18}}{18!} \approx 7,1\%$

Livello 1

33. In un certo tratto di una strada statale si è stimato che settimanalmente avvengono 2 incidenti. Con che probabilità in una certa settimana non ci sono stati incidenti? [≈ 13,5%]
34. In un parcheggio di un ipermercato si registra un ingresso medio di 12 macchine al minuto. Con che probabilità, il minuto successivo all'ingresso della nostra macchina sono entrate 15 auto? [≈ 7,2%]
35. Un libro di 500 pagine contiene un totale di 128 errori di stampa, cioè una media di 128/500 errori per pagina, con che probabilità una pagina scelta a caso è libera da errori? [≈ 77,4%]
36. Un call center di reclami, riceve una media di 34 chiamate l'ora, con che probabilità in una certa ora ne riceve 40? [≈ 3,8%]
37. In un compito di matematica assegnato in una classe di 24 studenti, vi sono state 8 insufficienze. Con che probabilità scelti 10 compiti a caso, uno solo di essi è insufficiente? [≈ 9,9%]

Livello 2

38. Per stabilire se una roulette non è truccata abbiamo controllato le 148 partite di una serata, registrando 3 volte lo zero. Con che probabilità avremmo ottenuto questo risultato in caso di regolarità? Effettuare il calcolo prima con la binomiale e poi con la poissoniana. [≈ 19,5%; ≈ 19,6%]
39. Durante la nona settimana del 2012, coloro che hanno avuto l'influenza sono stati in numero di 4,19 per mille assistiti. Con che probabilità, in quella settimana, in una città di 25000 abitanti vi sono stati esattamente 100 influenzati? [≈ 2,9%]
40. Con riferimento al quesito del parcheggio con che probabilità entrano meno di 10 auto al minuto? Da 9 a 14 auto? [≈ 34,7%; ≈ 61,7%]
41. Con riferimento al quesito degli errori di stampa, con che probabilità non ve ne sono in 4 pagine scelte a caso? [≈ 35,9%]
42. Con riferimento al quesito del call center, con che probabilità ne riceve meno di 30? Fra 30 e 40? Meno di 25 o più di 40 ma meno di 50? [≈ 22,4%; ≈ 64,3%; ≈ 17,4%]
43. Con riferimento al quesito del compito di matematica, con che probabilità le insufficienze sono meno di 3? Più di 5? Da 2 a 4? [≈1,4%; ≈ 40,1%; ≈ 9,7%]

Livello 3

44. Con riferimento al quesito del call center, con che probabilità ne riceve da 22 a 28 o da 25 a 32? [≈ 39,7%]
45. Con riferimento al quesito del compito di matematica, con che probabilità le insufficienze sono meno di 5 o più di 3? [≈ 59,2%]

Lavoriamo insieme

Nelle Università americane la votazione si basa sulla distribuzione normale. Intanto i voti non sono numerici ma indicati dalle lettere A, B, C, D, per i voti sufficienti e E oppure F per le insufficienze. Quindi si graduano solo le sufficienze, mentre le insufficienze sono racchiuse da un'unica classe. Concentriamo l'attenzione solo sulle sufficienze. Stabilita la soglia della sufficienza, i voti che superano tale valore, numerico, vengono suddivisi in modo tale che il 15% ottenga A, il 35% B, il 35% C e il 15% D. Vediamo di capire perché si usa tale schema. In pratica si calcolano media e scarto quadratico medio della distribuzione, supposta normale, quindi chi ha un voto maggiore di $\mu + \sigma$ prende A; prende B chi ha un voto appartenente a $(\mu; \mu + \sigma)$; C per voti in $(\mu - \sigma; \mu)$; D per voti minori di $\mu - \sigma$. In effetti calcoliamo con Derive:

$$\left[\int_1^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{(2\cdot\pi)}}\,dx,\ \int_0^{1} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{(2\cdot\pi)}}\,dx,\ \int_{-1}^{0} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{(2\cdot\pi)}}\,dx,\ \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{(2\cdot\pi)}}\,dx\right]$$

[0.1586552539, 0.3413447460, 0.3413447460, 0.1586552539]

Livello 1

46. Un test viene associato a una $N(65; 15)$, con soglia di insufficienza 40, quali punteggi otterranno una A? Quali una D? [(90; 100); (40; 50)]
47. Un test viene associato a una $N(21; 5)$, quali punteggi otterranno una B? Quali una C? [(21; 26); (16; 20)]
48. 75 studenti superano un test, i cui risultati sono associati a una $N(23, 4)$. Quanti di essi ottengono A? [12]
49. N studenti superano un test, i cui risultati sono associati a una normale. Se 13 di essi ottengono B, quanti sono gli studenti? [38]
50. Una fabbrica produce lampadine la cui durata media in ore segue una $N(5000; 250)$. Quanto dovrebbe durare il 68,3% di esse? [Da 4750 a 5250 ore]
51. Una fabbrica produce gelati il cui peso in grammi segue una $N(80; 5)$. La produzione giornaliera è di 1500 unità, quanti di essi all'incirca avranno un peso compreso tra 75 e 85 *gr*? [1024-1025]
52. Una fabbrica produce merendine il cui peso in grammi segue una $N(50; 2)$. Se circa 11938 di quelle prodotte oggi ha un peso compreso tra 46 *gr* e 54 *gr*, quante merendine sono state prodotte oggi all'incirca? [12500]
53. I voti finali all'esame di stato di una classe seguono una $N(\mu; \sigma)$. Se il 99,7% dei voti è compreso tra 65 e 78, quanto valgono media e scarto quadratico medio? [71,5; ≈2,17]

Negli esercizi seguenti deve usarsi un CAS

Livello 2

54. Da uno studio sulla malattia di Alzheimer, si ipotizza che il peso del cervello di un malato si distribuisca normalmente con $N(1076,80; 105,76)$, valori espressi in grammi. Con che probabilità un malato scelto a caso ha un cervello che pesa meno di 1000 grammi? E tra 850 e 950 grammi? E più di 900 grammi? [≈ 23,4%; ≈ 9,9%; ≈ 95,3%]
55. Il risultato di un esame universitario è valutato con una $N(23,4; 5,25)$. Con che probabilità uno studente ha avuto almeno 25? Un voto tra 20 e 24? Al massimo 27? Tenuto conto che il voto minimo è 0 e il massimo 30, nei calcoli sostituire questi due valori come estremi. [≈ 27,6%; ≈ 28,7%; ≈ 75,3%]
56. Per valutare la durata di un pneumatico si ipotizza un andamento del tipo $N(50000; 8500)$, misurato in Km. Con che probabilità un pneumatico dovrà essere sostituito prima di 35000 *Km*? Fra 48000 e 60000 *Km*? Dopo 65000 *Km*? [≈ 3,9%; ≈ 47,3%; ≈ 3,9%]

57. Una lampadina al sodio viene fornita dal produttore con una legge $N(11000; 1000)$ misurato in ore. Se un acquirente sostituisce la lampada dopo 9000 ore di funzionamento, possiamo dire che era difettosa? Giustificare la risposta. [Sì, perché la probabilità che duri da 0 a 9000 ore è di appena il 2,3%]
58. I filoni di pane prodotti da un panificio industriale, seguono una distribuzione normale. Si è visto che il 4,15% dei filoni pesa meno di 970 *gr* e il 3,71% più di 1023 *g*. Determinare media e scarto quadratico medio della distribuzione. [≈ 996,1 *g*; ≈ 15,1 *g*]
59. Una fabbrica produce latte in confezione da 1 *l* che segue una $N(1; 0{,}04)$. La produzione giornaliera è di 3000 unità, quanti di essi conterranno meno di 0,98 *l*? [Circa 926]
60. Un ipermercato confeziona pesche in cestini il cui peso in grammi segue una $N(975; 35)$. Se oggi sono state confezionate 148 ceste, quante all'incirca avranno un peso compreso tra 950 e 1000 *gr*? [78]
61. Una fabbrica produce sferette di metallo il cui diametro in *mm*, segue una $N(37; 3)$. Se circa 4612 di quelle prodotte oggi ha un diametro compreso tra 35 *mm* e 41 *mm*, quante sferette sono state prodotte oggi all'incirca? [7027]
62. I voti in un compito di matematica seguono una $N(6; \sigma)$. Se il 60% dei voti è compreso tra 5 e 7, quanto vale lo scarto quadratico medio? [≈ 1,19]

Lavoriamo insieme

Le batterie prodotte da una fabbrica appositamente per un dato dispositivo elettronico, seguono una distribuzione normale. Si è visto che il 3,12% di esse dura meno di 1500 ore e il 2,14% più di 2000 ore. Vogliamo determinare media e scarto quadratico medio. Usando Derive calcoliamo dei valori approssimati della normale standardizzata per cui le aree sottese valgono 0,0312 e 0,0214. Sfruttiamo le proprietà di simmetria della normale.

$$\left[\mathrm{SOLVE}\left(\int_{-\infty}^{a}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{(2\cdot\pi)}}\,dx = 0.0312,\ a\right),\ \mathrm{SOLVE}\left(\int_{-\infty}^{a}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{(2\cdot\pi)}}\,dx = 1 - 0.0214,\ a\right)\right]$$

$$[a = -1.863442751,\ a = 2.025656473]$$

Standardizzando la generica $N(\mu; \sigma)$ abbiamo da risolvere il sistema: $\begin{cases}\dfrac{1500-\mu}{\sigma} = -1{,}86\\ \dfrac{2000-\mu}{\sigma} = 2{,}03\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mu \approx 1739{,}1\\ \sigma \approx 128{,}5\end{cases}$.

Livello 3

63. L'area sottostante la curva normale standardizzata in $(0{,}25; x)$ è 0.293. Determinare x. [$1{,}23 < x < 1{,}24$]
64. I filoni di pane prodotti da un panificio industriale, seguono una distribuzione normale. Si è visto che il 4,15% dei filoni pesa meno di 970 *gr* e il 3,71% più di 1023 *g*. Determinare media e scarto quadratico medio della distribuzione. [≈ 996,1 *g*; ≈ 15,1 *g*]
65. Le altezze degli studenti delle quinte classi di una grossa scuola superiore, seguono una distribuzione normale. Tenuto conto che il 3,05% è alto meno di 165 *cm* e il 4,38% più di 190 *cm*, determinare media e scarto quadratico medio della distribuzione. Quanta percentuale degli studenti ha un'altezza compresa tra 170 *cm* e 180 *cm*? [≈ 172,8 *cm*; ≈ 4,2 *cm*; ≈ 70%]

L'angolo di Excel

Excel ha predefinite alcune variabili casuali, in particolare quelle da noi qui trattate.
DISTRIB.BINOM.N(N;P;Pr;C) Calcola il valore della binomiale con n successi in p prove con probabilità Pr. C è un valore logico, se è uguale a **vero** o a 1, allora calcola la probabilità di ottenere almeno *n* successi; se è **falso** o 0 la probabilità di ottenere esattamente *n* successi.

	A	B	C
1	Lancio di una moneta 7 volte	valore	sintassi
2	Esaattamente 4 teste	0,273438	DISTRIB.BINOM.N(4;7;0,5;0)
3	Almeno 4 teste	0,773438	DISTRIB.BINOM.N(4;7;0,5;1)

DISTRIB.POISSON(X;Media;C) Calcola il valore della poissoniana; C ha il significato precedente.

	A	B	C
1	Poissoniana con media 8	valore	sintassi
2	Prob. di avere 10 successi	0,099262	DISTRIB.POISSON(10;8;0)
3	Prob. di avere almeno 10 successi	0,815886	DISTRIB.POISSON(10;8;1)

DISTRIB.NORM.N(X;M;D;C) Calcola il valore della normale di media M e deviazione D, in un valore X. C è un valore logico, se è uguale a **vero** o a 1, allora calcola la normale in X; se è **falso** o 0 calcola il valore dell'area sottesa da meno infinito a X.

	A	B	C
1	Normale	valore	sintassi
2	Valore per x= 12	0,046482	DISTRIB.NORM.N(12;15;8;0)
3	Area da meno infinito a 12	0,35383	DISTRIB.NORM.N(12;15;8;1)

DISTRIB.NORM.ST.N(Z;C) Calcola il valore della normale standardizzata; C ha il significato precedente.

	A	B	C
1	Normale standardizzata	valore	sintassi
2	Valore per x= 0,6	0,333225	DISTRIB.NORM.ST.N(0,6;0)
3	Area da meno infinito a 0,6	0,725747	DISTRIB.NORM.ST.N(0,6;1)

Stima e decisioni statistiche

Il problema

Per diversi motivi le indagini statistiche effettuate nei fenomeni reali non riguardano l'intera popolazione. Per esempio i cosiddetti exit poll che vengono svolte per le elezioni, sono interrogazioni di una parte molto piccola degli effettivi elettori. Ovviamente per ragioni soprattutto economiche, dato che non vi sarebbero sufficienti rilevatori, non si possono interrogare tutti gli elettori. Allo stesso modo per verificare che i fiammiferi prodotti da una fabbrica non siano difettosi non possiamo accenderli tutti. Quindi in pratica andiamo a effettuare quello che si chiama un campionamento. La questione è: che affidabilità hanno i risultati statistici del campione rispetto all'intera popolazione?

Il problema posto è sicuramente di difficilissima risoluzione, soprattutto nella prima ipotesi, in cui i risultati sono spesso affetti da errori derivanti dal fatto che parte degli elettori interrogati si rifiuta di rispondere o fornisce risposte false. E in effetti si è visto più volte che vi sono state grosse differenze fra gli exit poll e i risultati effettivi delle elezioni, anche con maggioranze ribaltate. Ma anche in casi meno legati a comportamenti derivanti dall'uomo e che perciò possono essere falsati, la questione risulta ugualmente complicata. Per esempio se solo 2 dei 100 fiammiferi che abbiamo provato è risultato difettoso, chi ci assicura che tale percentuale è di tutti i fiammiferi prodotti, anche solo in quella giornata? È possibile che in realtà quelli fossero gli unici 2 fiammiferi difettosi, o, viceversa, che i 98 fiammiferi funzionanti fossero gli unici o qualsiasi altro risultato. Ma ormai abbiamo imparato che la Statistica non è una scienza in cui si può parlare di certezze, ma solo di probabilità che accadano certi fatti.

Definizione 10

Dato un universo statistico *U*, un suo sottoinsieme *C*, si chiama **campione statistico**.
Data una grandezza statistica θ di un universo statistico *U*, una funzione che associa ad ogni possibile campione di *U* un valore di θ si chiama **stimatore puntuale di** θ.

Esempio 14

Supponiamo di volere determinare l'altezza media dei 1542 alunni di una scuola. Avendo così tanti alunni, per risparmiare tempo e denaro consideriamone un campione di 100 alunni prelevato in modo aleatorio, per esempio con un sorteggio. Supponiamo che la media di questo campione sia 170,17 *cm*. Questo valore è uno stimatore puntuale della media dell'altezza di tutti gli alunni.

Il problema è quello di stabilire il grado di fiducia da assegnare a ciascuno stimatore.

Definizione 11

Uno stimatore di un parametro θ si dice **corretto** o **unbiased** se la sua media è uguale a θ. Diversamente si chiama **stimatore distorto o biased**.

Esempio 15

Se nell'esempio precedente il campione fosse stato scelto sorteggiando solo i maschi, lo stimatore sarebbe stato distorto poiché ovviamente il campione non sarebbe stato rappresentativo della popolazione formata anche da femmine.

Vale il seguente risultato.

Teorema 10

La media e la mediana di campioni estratti da una $N(\mu, \sigma^2)$, sono stimatori corretti di μ.
Dimostrazione omessa

In effetti ci si rende conto abbastanza facilmente che se il problema della stima di un valore è molto complicato possiamo renderla più semplice se ci limitiamo a determinare non tanto un certo valore, quanto piuttosto un intervallo all'interno del quale si trova il parametro.

Esempio 16

Sempre con riferimento all'esempio 14, piuttosto che chiederci se la media delle altezze degli studenti della scuola sia proprio 170,17 *cm*, è più semplice chiedersi con quale probabilità la media appartiene per esempio all'intervallo [169; 172].

Definizione 12

Data una grandezza statistica θ di un universo statistico U, un intervallo all'interno del quale possa trovarsi θ si chiama **intervallo di confidenza per θ**.

Esempio 17

Ancora riferendoci all'esempio degli studenti l'intervallo [169; 172] è un intervallo di confidenza per la media.

Per i campioni il Teorema 9 viene così rideterminato.

Teorema 11

Un campione di $n > 30$ elementi, può essere considerato una $N(\mu_c, \sigma^2)$, in cui μ_c è la media campionaria. Allora vi sono i seguenti intervalli di confidenza
$[\mu - \sigma/\sqrt{n}\,;\, \mu + \sigma/\sqrt{n}\,]$ al 68,3%; $[\mu - 1{,}96\sigma/\sqrt{n}\,;\mu + 1{,}96\sigma/\sqrt{n}\,]$ al 95,0%; $[\mu - 2\sigma/\sqrt{n}\,;\, \mu + 2\sigma/\sqrt{n}\,]$ al 95,5%; $[\mu - 2{,}58\sigma/\sqrt{n}\,;\, \mu + 2{,}58\sigma/\sqrt{n}\,]$ al 99,0%; $[\mu - 3\sigma/\sqrt{n}\,;\, \mu + 3\sigma/\sqrt{n}\,]$ al 99,7%.
Dimostrazione omessa

Esempio 18

Se trattiamo la distribuzione delle altezze degli studenti come una $N(170{,}17,\ 2{,}13^2)$, possiamo dire che la probabilità che l'altezza media di tutti gli alunni della scuola sia compresa tra $[170{,}17 - 1{,}96 \cdot 2{,}13/10;\ 170{,}17 + 1{,}96 \cdot 2{,}13/10] \approx [169{,}72;\ 170{,}62]$ è del 95%. Mentre è del 99% la probabilità che sia compresa in $[170{,}17 - 2{,}58 \cdot 2{,}13/10;\ 170{,}17 + 2{,}58 \cdot 2{,}13/10] \approx [169{,}58;\ 170{,}76]$. Ovviamente maggiore è la probabilità richiesta e più ampio sarà l'intervallo di confidenza.

Un'ultima questione riguarda la cosiddetta decisione statistica, ossia, dopo avere effettuato un'indagine statistica potremmo convincerci che accada un certo fatto, quindi enunciamo una certa ipotesi. Fatto ciò dobbiamo stabilire se la detta ipotesi possa essere o no accettata.

Esempio 19

Supponiamo di avere lanciato una moneta per 100 volte, ottenendo 63 volte testa, invece dei 50 teorici. Essendo la differenza molto grande ci convinciamo che la moneta abbia delle deformazioni che facilitino l'uscita della testa, quindi poniamo l'ipotesi che la probabilità che esca testa sia $p \neq 0{,}5$.

Stabilita una certa ipotesi possono accadere due tipi di errori.

Definizione 13

Data un'ipotesi statistica, se la rifiutiamo quando invece dovrebbe essere accettata commettiamo un **errore del I tipo**; se invece la accettiamo quando dovremmo rifiutarla commettiamo un **errore del II tipo**.
La probabilità massima che si accetta di commettere un errore del I tipo si dice **livello di significatività del test statistico**.

Esempio 20

Se nell'esempio precedente la moneta è effettivamente regolare e noi invece non la consideriamo tale stiamo commettendo un errore del I tipo. Se accettiamo di sbagliare con una probabilità del 5%, il livello di significatività del test è appunto del 5%.

Prima di vedere come possiamo effettuare un test relativamente all'esempio della moneta, ricordiamo che vale la seguente approssimazione di una binomiale con una normale.

Teorema 12

Per n che tende all'infinito una binomiale tende a una $N(np;\ np(1-p))$.
Dimostrazione omessa

In pratica l'approssimazione va bene per $np > 5$.

Esempio 21

Riprendiamo l'esempio precedente, in cui $n = 100$ e $p = 0{,}5$, quindi $np = 50 > 5$. Perciò possiamo approssimare la distribuzione con una $N(50;\ 25)$. Ciò vuol dire che la probabilità è pari al 95% per tutti i valori dell'intervallo $[50 - 1{,}96 \cdot 5;\ 50 + 1{,}96 \cdot 5] = [40{,}2;\ 59{,}8]$. Cioè con una probabilità del 95% il numero di teste dovrebbe essere compreso tra 40 e 60, poiché il valore ottenuto è stato di 63, dobbiamo rifiutare l'ipotesi che la moneta sia regolare.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Per stimare il peso medio di un gruppo di bambini ne abbiamo scelti 64 a caso e abbiamo determinato che la media del campione è 40,23 *Kg* con scarto quadratico medio di 2,15 kg. Poiché abbiamo più di 30 elementi possiamo approssimare con una $N(40{,}23;\ 2{,}15^2)$ e quindi, usando il Teorema 11, possiamo dire che con una probabilità del 68,3%, il peso medio appartiene a [40,23 – 2,15/8; 40,23 + 2,15/8] ≈ [39,96; 40,50], con una probabilità del 95,0%; invece appartiene a [40,23 – 2,15 · 1,96/8; 40,23 + 2,15 · 1,96/8] = [39,70; 40,76].
Se volessimo avere invece una probabilità dell'80%, con un intervallo simmetrico centrato sulla media campionaria, dobbiamo risolvere la seguente equazione: $v(x)=\int_{40.23-a}^{40.23+a}\frac{e^{-\frac{(x-40,23)^2}{2\cdot(2,15/8)^2}}}{2,15/8\cdot\sqrt{2\pi}}dx=0,8$. Con Derive troviamo $a \approx 0{,}34$. Quindi vi è l'80% di probabilità che il peso medio di tutti i bambini sia compreso tra 39,89 *Kg* e 40,57 *Kg*.

Livello 1

1. La media di un campione di 49 elementi è 13,51, se un intervallo di confidenza al 95,5% della media della popolazione è [13,17; 13,85], determinare lo scarto quadratico medio campionario. [1,19]
2. Nell problema precedente, la conoscenza della numerosità del campione è necessaria? [Sì]
3. La media di un campione di 100 individui è 132,84, se un intervallo di confidenza al 99% della media della popolazione è [130,80; 133,88], determinare lo scarto quadratico medio campionario. [∅]
4. Lo scarto quadratico medio di un campione di 115 elementi è 2,19, se un intervallo di confidenza al 95% della media della popolazione è [51,73; 52,53], determinare la media campionaria. [≈ 52,13]
5. Nel problema precedente, la conoscenza della numerosità del campione è necessaria? [No, la media è sempre il centro dell'intervallo]
6. Le età medie di una popolazione di 2378 individui sono stimate mediante un campione di 100 elementi, ottenendo μ = 37,12 anni e σ = 4,12, anni determinare un intervallo di confidenza al 95% dell'età media della popolazione. [[36,31; 37,93]]
7. Cosa cambia se il campione fosse stato di 50 individui? E di 200? [[35,98; 38,26]; [36,55; 37,69]]
8. La durata media di una lampada alogena di una certa marca è 2000 ore. Testiamo un campione di 100 elementi, ottenendo μ = 2017,37 ore e σ = 85,24 ore, determinare un intervallo di confidenza al 99% della durata media. [[1995,38; 2039,36]]
9. Cosa cambia se il campione fosse stato di 75 lampade? E di 150? [[1991,98; 2042,76]; [1999,41; 2035,33]]
10. Il reddito medio mensile delle famiglie degli studenti di una scuola di 1589 studenti è stimata mediante un campione di 70 elementi, ottenendo μ = 1845,73 euro e σ = 174,36 euro. Determinare un intervallo di confidenza al 95,5% del reddito medio delle famiglie. [[1804.05; 1887.41]]
11. Il peso medio di un pacco di pasta dichiarata da 1 *Kg* è stimata mediante un campione di 200 pacchi, ottenendo μ = 987 *g* e σ = 11,15 *g*. Determinare un intervallo di confidenza al 97,7% del peso medio. [[984,63; 989,36]]

Livello 2

12. Se vogliamo che un campione con scarto quadratico medio di 1,23 ammetta un intervallo di confidenza al 95,5%, con errore non superiore a 0,2, quanto deve essere grande il campione? [Circa 151]
13. Con riferimento al problema 6, stimare un intervallo di confidenza al 75%. [[36,65; 37,59]]
14. Con riferimento al problema 8, stimare un intervallo di confidenza al 90%. [[2003,35; 2031,39]]
15. Con riferimento al problema 10, stimare un intervallo di confidenza al 97%. [[1800,50; 1890,95]]
16. Con riferimento al problema 11, stimare un intervallo di confidenza al 84%. [[985,89; 988,11]]

Lavoriamo insieme

In un test vero o falso con 20 domande si decide che chi risponde ad almeno 15 risposte corrette non ha tirato a indovinare, viceversa ha tirato a indovinare. Vogliamo stabilire la proprietà di fare un errore del I tipo,

cioè di rifiutare l'ipotesi quando questa è vera; nel caso specifico con che probabilità consideriamo che uno studente non ha tirato a indovinare quando invece lo ha fatto. La probabilità di indovinare almeno 15 domande su 20 scegliendo una sequenza casuale di vero o falso, quindi con probabilità 0,5 di fornire una delle due risposte, è $\sum_{k=15}^{20}\binom{20}{k}\cdot 0,5^{20} \approx 2,07\%$. Questa è la probabilità di errore del I tipo.
Se invece lo studente non tira a indovinare la probabilità di scegliere una risposta diventa 15/20 = 0,75. In questo caso la probabilità di indovinare almeno 15 risposte è $\sum_{k=15}^{20}\binom{20}{k}\cdot 0,7^{k}\cdot 0,3^{20-k} \approx 41,64\%$. Questa è la probabilità di un errore del II tipo, ossia che pensiamo che uno studente ha tirato a indovinare quando invece non lo ha fatto.

Livello 2

17. In un test con 10 domande vero o falso si decide che chi risponde ad almeno 8 risposte corrette non ha tirato a indovinare, viceversa ha tirato a indovinare. Calcolare la probabilità di commettere un errore del I tipo. E uno del II tipo? [≈ 5,47%; ≈ 67,78%]
18. Con riferimento al precedente problema perché un errore del I tipo sia almeno del 10%, quante risposte corrette su 10 possiamo accettare? E perché quello del II tipo sia minore del 50%? [7; ∅]
19. In un test con 10 domande e 3 risposte possibili, una sola delle quali corretta si decide che chi risponde ad almeno 6 risposte corrette non ha tirato a indovinare, viceversa ha tirato a indovinare. Calcolare la probabilità di commettere un errore del I tipo. E uno del II tipo? [≈ 7,66%; ≈ 63,31%]
20. Per stabilire se una moneta è regolare la lanciamo per 80 volte, se otteniamo fra 35 e 45 teste, stabiliamo che è regolare. Calcolare la probabilità di commettere un errore del I tipo. [≈ 78,15%]
21. In un sacchetto inseriamo 3 palline verdi, 4 rosse e 5 verdi, tutte indistinguibili al tatto. Estraiamo una pallina per 50 volte, se otteniamo verde da 22 a 28 volte diciamo che non sono stati fatti trucchi, calcolare la probabilità di commettere un errore del I tipo. [≈ 0,26%]

Livello 3

22. Lanciamo una moneta 15 volte ottenendo sempre testa. Possiamo dire al livello di significatività dell'1% che è truccata? Motivare la risposta. [Sì]
23. Con riferimento al problema precedente, quante volte massimo dovremmo ottenere testa perché non possiamo dire che è truccata neanche al livello di significatività del 5%? [11]
24. Lanciamo un dado per 10 volte otteniamo 5 volte il 6. Possiamo dire al livello di significatività dell'1% che il dado è truccato? E al livello dello 0,1%? Motivare la risposta. [Sì; No]

Lavoriamo insieme

Un cosiddetto mago fa mescolare 50 carte bicolori a uno spettatore scelto a caso, quindi dopo qualche minuto di riflessione scrive su un foglio di carta la sequenza dei colori delle carte scoperte in successione dallo spettatore. Egli afferma di essere in grado di indovinarne almeno 40. Poiché la probabilità di indovinare il colore di una carta bicolore non truccata è 0,5 testiamo l'ipotesi p = 0,5, cioè che il mago in realtà abbia scritto una sequenza a caso e non abbia alcun potere magico. Poiché abbiamo a che fare con prove ripetute indipendenti, possiamo dire che la media è np = 50 · 0,5 = 25 e lo scarto quadratico medio è $np \cdot (1 - p) = \sqrt{12,5} \approx 3,54$. Quindi possiamo trattare il tutto come una N(25; 12,5). Dobbiamo calcolare la probabilità che vengano indovinate almeno 40 carte, ossia $\int_{40}^{50}\frac{e^{-(x-25)^2/(2\cdot 3,54)^2}}{3,54\cdot\sqrt{2\pi}}dx \approx 1,1\cdot 10^{-5}$, che è una probabilità così bassa da indurci a rifiutare l'ipotesi p = 0,5, ossia che il mago tiri a indovinare, ma possiamo ritenere, con altissima probabilità, che il mago sia tale o che sia particolarmente fortunato.

Livello 2

25. Con riferimento al problema del box lavoriamo insieme, quante carte dovrebbe indovinare al massimo per stabilire al livello di significatività del 5% che tira a indovinare? [31]

26. Un'industria afferma che le memorie da esse prodotte hanno un tempo di vita di 15600 ore di uso. Un campione di 250 memorie ha fornito μ = 15500 e σ = 100. Testare l'ipotesi μ = 15500 a un livello di significatività del 5% e del 1%. [Le rifiutiamo entrambe]
27. Con riferimento al problema precedente qual è il più valore intero di μ perché si possa accettare il test a un livello di significatività del 5% e il più grande intero per cui si accetti quello al 1%? [155876; 156163]
28. Lanciando una moneta 100 volte si sono ottenute 70 teste. Testare a che livello di significatività si può accettare l'ipotesi che sia p = 0,7. [Circa 57,6%]
29. Un fabbricante di detersivi afferma che i suoi pacchi contengono mediamente 10 *kg* di detersivo. Un campione di 70 pacchi ha fornito μ = 10,15 *Kg* e σ = 0,37 *Kg*. Testare l'ipotesi μ = 10,15 *Kg* a un livello di significatività del 5% e del 1%. [Accettabile in entrambi i casi]
30. Lanciamo un dado che ha le facce opposte dello stesso colore, per un totale di 3 diversi colori. Lanciandolo 120 volte abbiamo ottenuto bianco 60 volte. Testare a che livello di significatività si può accettare l'ipotesi che la probabilità di ottenere bianco sia p = 0,5. [Circa 52,3%]

Livello 3

31. Un certo medicinale è testato su 500 malati e si rivela efficace su 428 di essi. Testare l'ipotesi che il medicinale sia efficace per l'80% dei malati con livello di significatività dell'1%. Sugg. Valutare come una binomiale con p = 0,8 e quindi come una normale. [No]
32. Con riferimento al problema precedente, quale ipotesi può accettarsi, $p > 0,8$ o $p > 0,8$? [$p > 0,8$]

Correlazione lineare e metodo dei minimi quadrati

Il problema

La matematica e la fisica sono materie affini, quindi capita che chi è bravo in una delle due lo è anche nell'altra. Vogliamo stabilire se e come è possibile stabilire questo tipo di relazione.

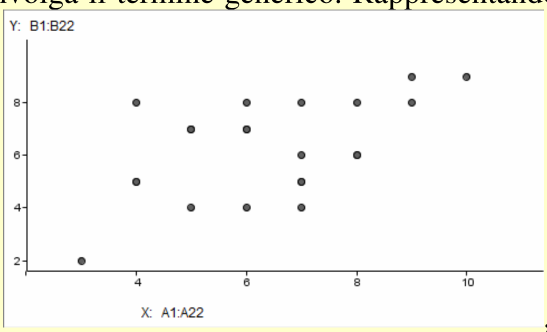
Il problema sollevato cerca di stabilire se fra due variabili statistiche può esservi una relazione di qualsiasi tipo, cioè una funzione del tipo $y = f(x)$, in cui x e y sono le variabili statistiche considerate.

Esempio 22

Nella tabella indichiamo i voti finali nelle materie di matematica e fisica degli studenti di una classe.

Matematica	5	6	7	7	8	4	5	9	8	7	6	6	6	8	7	4	5	4	3	7	9	10
Fisica	4	7	5	8	6	5	7	8	6	5	8	4	7	8	4	5	7	8	2	6	9	9

La prima cosa che osserviamo è che non vi è una immediata relazione per tutti gli studenti. Per esempio notiamo uno studente che ha 4 in matematica e 8 in fisica. Noi comunque vogliamo considerare, come al solito, la eventuale relazione che coinvolga il termine generico. Rappresentando il tutto in un grafico a dispersione otteniamo quanto segue



, notando che, i punti, tutto sommato, si avvicinano a stare su una retta.

Le relazioni ovviamente possono essere di vario tipo, quello più semplice è quello lineare, cioè una legge di tipo $y = ax + b$. Prima di stabilire come possiamo determinare i parametri a e b vediamo di capire se vi è la possibilità di una relazione lineare. La prima cosa da fare è quella di definire un indice statistico che possa applicarsi a entrambe le variabili. Abbiamo definito la varianza, una sua ovvia generalizzazione che coinvolga due variabili è la seguente.

Definizione 14

Date due distribuzioni statistiche finite ed ugualmente numerose: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, di medie aritmetiche rispettive μ_x e μ_y, diciamo loro **covarianza** la quantità $\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)\cdot(y_i - \mu_y)}{n}$.

La covarianza è una ovvia generalizzazione della varianza, a cui si riduce nell'ipotesi in cui le distribuzioni siano uguali.

Esempio 23

Calcoliamo la covarianza delle distribuzioni dell'esempio precedente. Indichiamo con x_i i voti di matematica e con y_i quelli di fisica. Lasciamo i calcoli per esercizio per determinare $\mu_x \approx$ 6,4 e $\mu_y \approx$ 6,3. Con l'aiuto di Excel costruiamo la tabella delle differenze e quindi dei prodotti.

Matematica	5	6	7	7	8	4	5	9	8	7	6	6	6	8	7	4	5	4	3	7	9	10	mx
X-mx	-1,4	-0,4	0,6	0,6	1,6	-2,4	-1,4	2,6	1,6	0,6	-0,4	-0,4	-0,4	1,6	0,6	-2,4	-1,4	-2,4	-3,4	0,59	2,59	3,59	6,409091
Fisica	4	7	5	8	6	5	7	8	6	5	8	4	7	8	4	5	7	8	2	6	9	9	my
y-my	-2,3	0,73	-1	1,7	-0	-1,3	0,73	1,7	-0	-1	1,7	-2,3	0,73	1,7	-2	-1,3	0,7	1,7	-4,3	-0,3	2,73	2,73	6,272727
																							Σ
(x-mx)(y-my)	3,2	-0,3	-1	1	-0	3,07	-1	4,5	-0	-1	-0,7	0,9	-0,3	2,7	-1	3,07	-1	-4,2	14,6	-0,2	7,07	9,79	38,54545

Facimente si ha: $\sigma_{xy} \approx 38,54/22 \approx 1,75$.

Definiamo adesso una grandezza che è in grado di stabilire una eventuale relazione lineare.

Definizione 15

Date due distribuzioni statistiche finite ed ugualmente numerose: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, di scarti quadratici medi rispettivi σ_x e σ_y, *e* di covarianza σ_{xy}, diciamo **coefficiente di correlazione lineare di Pearson** la quantità $\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$.

I protagonisti

Karl Pearson nacque a Londra il 27 marzo 1857, si laureò in Matematica all'Università di Cambridge nel 1879. In seguito studiò fisica all'Università di Heidelberg. E poi presso l'Università di Berlino segui le lezioni del famoso fisiologo Emil du Bois-Reymond sul darwinismo. Ma studiò anche Diritto romano, storia medieval e letteratura tedesca. Solo nel 1890 indirizzò i suoi interessi alla statistica, della quale scienza è considerate uno dei fondatori. Dal 1893 al 1912 scrisse 18 articoli dal titoilo comune *Mathematical Contributions to the Theory of Evolution*, che riguardano l'analisi della regressione, il coefficiente di correlazione che porta il suo nome e molti altri importanti risultati. Morì a Londra il 27 aprile 1936.

Si ha la validità del seguente risultato

Teorema 13

Si ha $-1 \le \rho \le 1$

Dimostrazione omessa

In pratica se ρ è prossimo a 1 vi è buona dipendenza lineare diretta, cioè vi è una relazione di proporzionalità diretta, o quasi. Se è prossimo a –1 vi è buona dipendenza lineare inversa, cioè vi è una relazione di proporzionalità inversa. Infine se è prossimo a 0 le due variabili sono indipendenti.

Esempio 24

Calcoliamo il coefficiente di Pearson delle distribuzioni precedenti. Lasciamo per esercizio il calcolo degli scarti quadratici medi: $\sigma_x \approx 1{,}80$ e $\sigma_y \approx 1{,}81$. Quindi si ha: $\rho \approx \frac{1{,}75}{1{,}80 \cdot 1{,}81} \approx 0{,}54$. Perciò vi è una discreta relazione di linearità positiva fra le due variabili.

L'ultima questione che affronteremo riguarderà la possibilità di associare una funzione teorica a dei dati reali. Spesso rappresentando i dati con un grafico a dispersione osserviamo che essi appartengono a una certa curva, retta, parabola, esponenziale, … Ovviamente è rarissimo che i dati appartengano tutti a una curva *semplice* come una retta o una parabola. Però vale il seguente risultato.

Teorema 14

Dati n punti $(x_i; y_i)$, $1 \le i \le n$, esiste ed è unico un polinomio $P(x)$ di grado $n - 1$, che contiene tutti gli n punti. E si ha:

$P(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \prod_{j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$, che si chiama **polinomio interpolatore di Lagrange**.

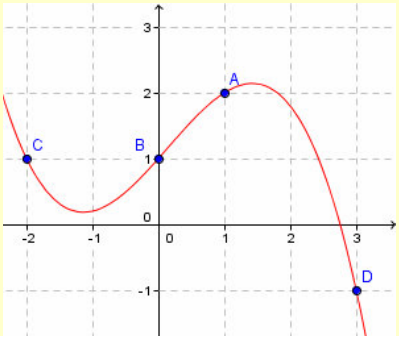
Dimostrazione omessa

Esempio 25

Vogliamo trovare il polinomio di Lagrange relativo ai punti (1; 2), (0; 1), (–2; 1), (3; –1). Il polinomio è di terzo grado e si trova semplificando

$$P(x) = \sum_{i=1}^{3} y_i \cdot \prod_{j \neq i}^{3} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = 2 \cdot \frac{(x-0)\cdot(x+2)\cdot(x-3)}{(1-0)\cdot(1+2)\cdot(1-3)} + 1 \cdot \frac{(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)}{(0-1)\cdot(0+2)\cdot(0-3)} +$$
$$+1 \cdot \frac{(x-1)\cdot(x-0)\cdot(x-3)}{(-2-1)\cdot(-2-0)\cdot(-2-3)} - 1 \cdot \frac{(x-1)\cdot(x-0)\cdot(x+2)}{(3-1)\cdot(3-0)\cdot(3+2)}$$

Ossia, semplificando: $P(x) = -1/30 \cdot (7x^3 - 3x^2 - 34x - 30)$. E in effetti rappresentando i punti e il polinomio con Geogebra vediamo che essi giacciono sulla curva.



Il precedente risultato sembra risolvere definitivamente la questione, ma ciò non è vero, per diversi motivi. Il primo dei quali è che in genere le curve interpolanti dati statistici non sono polinomiali e poi che, all'aumentare dei dati, che in genere sono abbastanza numerosi, il problema diventerebbe irrisolvibile dal punto di vista del calcolo, anche automatico. Determinare un polinomio di 30° o 60° grado non è semplice. Noi ci limitiamo a considerare solo alcuni casi più semplici di curve interpolanti. La prima è ovviamente la retta. Determinare una retta per 2 punti è immediato, ma se i punti sono più di due, decine in generale, la questione diventa più complicata, quindi dobbiamo intanto definire cosa intendiamo per retta interpolante un insieme di dati statistici.

Definizione 16

Data una distribuzione statistica finita: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, diciamo sua **retta di regressione secondo i minimi quadrati** la retta di equazione $y = ax + b$, che verifica la proprietà per cui risulta minima $\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2$, in cui y_i rappresentano i dati teorici.

La precedente definizione permette di determinare, fra tutte le infinite rette, quale è la *migliore* per i dati che abbiamo. Infatti determinare il minimo delle distanze al quadrato (in modo che così tutti i valori risultino positivi e non vi sono eventuali *compensazioni*), equivale a dire che la retta è quella che meglio si adatta ai dati rilevati. Per risolvere il problema dobbiamo utilizzare nozioni di funzioni a due variabili, dato che vogliamo trovare due parametri, a e b, quindi ci limitiamo a enunciare il risultato senza dimostrarlo.

Teorema 15

Dati n punti $(x_i; y_i)$, $1 \le i \le n$, la loro retta dei minimi quadrati, $y = ax + b$, è tale che si abbia

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

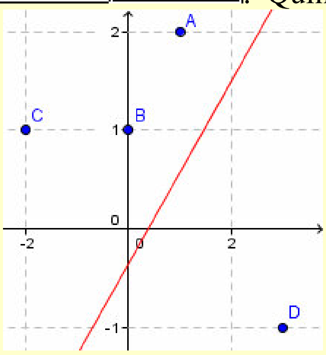
Dimostrazione omessa

Esempio 26

Vogliamo trovare la retta dei minimi quadrati relativa ai dati dell'esempio precedente. Usiamo Excel per i calcoli, ottenendo

					Σ	a	b
x	1	0	-2	3	2	0,923077	-0,34615
y	2	1	1	-1	3		
x^2	1	0	4	9	14		
xy	2	0	-2	-3	-3		

. Quindi la retta cercata è $y = 0{,}923x - 0{,}346$. Rappresentiamo il tutto con Geogebra:



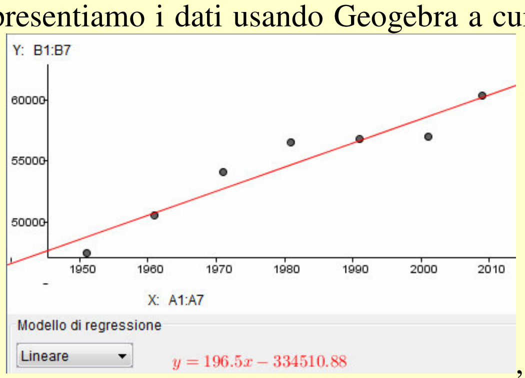
Ovviamente il problema dell'interpolazione non si risolve sempre con rette.

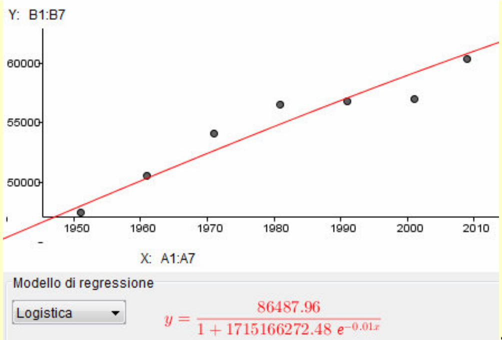
Esempio 27

Consideriamo i dati ufficiali della Popolazione Italiana negli ultimi censimenti.

Anno	1951	1961	1971	1981	1991	2001	2009
Popolazione	47516	50624	54137	56557	56778	56996	60340

Rappresentiamo i dati usando Geogebra a cui facciamo calcolare automaticamente la retta dei minimi quadrati



, adesso invece usiamo un interpolante più adatto per lo studio delle popolazioni, la cosiddetta logistica 

. Non è difficile vedere che questa seconda sembra un interpolante migliore. Per verificare meglio calcoliamo la stima di alcuni dati futuri, per esempio la popolazione prevista, secondo il modello, per gli anni 2015, 2020 e 2030.

Anno	2015	2020	2030
Modello lineare	≈ 61444	≈ 62427	≈ 64932
Modello Logistico	≈ 61987	≈ 62942	≈ 64781

Verifiche

Lavoriamo insieme

Nella tabella seguente abbiamo riportato i dati ISTAT delle temperature medie e dei giorni di pioggia nella città di Firenze dal 1998 a 2009.

ANNI	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Temperatura media	15,3	17	16,4	16	15,7	16,6	15,9	15,4	16,1	16,2	15,9	16,2
Giorni di pioggia	70	70	87	92	81	65	83	72	65	59	96	46

Vogliamo calcolare la covarianza dei dati. Usiamo un foglio elettronico per semplificare i calcoli, o comunque una calcolatrice. Troviamo che le due medie sono $\mu_x \approx 16{,}06$ e $\mu_y \approx 73{,}83$.

ANNI	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Temperatura media	15,3	17	16,4	16	15,7	16,6	15,9	15,4	16,1	16,2	15,9	16,2
Giorni di pioggia	70	70	87	92	81	65	83	72	65	59	96	46
x-Mx	-0,8	0,94	0,34	-0,1	-0,4	0,54	-0,2	-0,7	0,04	0,14	-0,2	0,14
y-My	-3,8	-3,8	13,2	18,2	7,17	-8,8	9,17	-1,8	-8,8	-15	22,2	-28
(x-Mx)(y-My)	2,91	-3,6	4,5	-1,1	-2,6	-4,8	-1,5	1,21	-0,4	-2,1	-3,5	-3,9

Abbiamo $\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{12}(x_i - \mu_x)\cdot(y_i - \mu_y)}{12} \approx \frac{-14{,}78}{12} \approx -1{,}232$.

Tutti gli esercizi seguenti si riferiscono alle seguenti tabelle ISTAT

Immatricolati e tassi di abbandono in % nelle università italiane

Anno Accademico	1998/1999	1999/2000	2000/2001	2001/2002	2002/2003	2003/2004
Immatricolati	278939	278384	284142	319264	330802	338036
Tasso di abbandono	21,3	21,4	19,3	20,3	19,2	20,8

Produzione lorda e consumo di energia elettrica in Italia in milioni di KWh

Anno	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Produzione	284401,3	293865	303321	303672	314090	313888,3	319129,6	292641,7	302062	302569,9
Consumo	290960	299789	304490	309817	317533	318953	319037	299915	309884,5	313792

Espatriati e rimpatriati in Piemonte

Anno	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959
Espatriati	6077	7260	5475	3606	3532	4299	5514	5129	3609	3251
Rimpatriati	11602	14688	13985	9827	7778	6541	6220	4639	2395	2163

Matrimoni e divorzi in Italia

Anno	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Matrimoni	264026	270013	264097	248969	247740	245992	250360	246613	230613
Divorzi	40051	41835	43856	45097	47036	49534	50669	54351	54456

Numero di Istituti di cura pubblici e numero giornate di degenza in Italia

Anno	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Istituti	785	778	755	746	672	669	654	655	645
Giornate	59503	58123	55973	52033	51123	51795	52151	51554	51177

Spesa pensionistica procapite per numero di pensioni per 1000 abitanti in Italia

Anno	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Pensioni	387,9	387,1	388,7	388,7	390,5	390,9	389,7	384,3	385,1
Spesa	3294,2	3396,5	3550,2	3651,5	3776,3	3903,4	4013,2	4156,3	4257,4

Procedimenti penali sopravvenuti ed esauriti per ufficio giudiziario in Italia

Anno	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Sopravvenuti	123605	131716	132880	130540	135895	138133	127560	138568
Esauriti	123883	122151	119441	124434	127846	118976	128328	130196

Numero di omicidi denunciati e numero di condannati per omicidio in Italia

Anno	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Denunciati	11839	11807	14087	15407	14466	15872	15188	14971	14560	13746
Condannati	593	736	754	756	890	1133	1174	1200	1298	1353

Numero di Diplomati e numero di laureati in Italia

A.S. o A.A.	1999/00	2000/01	2001/02	2002/03	2003/04	2004/05	2005/06	2006/07	2007/08	2008/09
Laureati	152241	159798	173710	186082	218122	253354	281300	261523	237531	229340
Diplomati	444367	454798	443842	454061	452726	446584	449063	449693	446746	445968

Numero di Insegnanti e numero di studenti iscritti (in migliaia) nelle scuole statali in Italia

A.S.	1993/94	1994/95	1995/96	1996/97	1997/98	1998/99	1999/00	2000/01	2001/02	2002/03
Insegnanti	313361	312560	315920	318985	297294	294737	296664	307279	312026	315792
Studenti	2779,353	2723,715	2693,328	2648,515	2597,983	2537,959	2535,755	2565,167	2583,375	2616,678

Livello 1

Determinare la covarianza delle precedenti coppie di dati

33. [≈ –7718,12] [≈ 87466440] [≈ 3725948,7] [≈ –47723276,7] [≈ 14705,4] [≈ –209,63]
34. [≈ 166255] [≈ 179157,1] [≈ -10^7] [≈ 432846,1]

Lavoriamo insieme

Con riferimento ai dati ISTAT delle temperature medie e dei giorni di pioggia vogliamo calcolare il coefficiente di Pearson. Abbiamo già calcolato la covarianza: $\sigma_{xy} \approx -1{,}232$. Adesso calcoliamo gli scarti quadratici medi, sempre facendoci aiutare da un foglio elettronico.

ANNI	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	Σ
Temperatura media	15,3	17	16,4	16	15,7	16,6	15,9	15,4	16,1	16,2	15,9	16,2	
Giorni di pioggia	70	70	87	92	81	65	83	72	65	59	96	46	
x-Mx	-0,8	0,94	0,34	-0,1	-0,4	0,54	-0,2	-0,7	0,04	0,14	-0,2	0,14	
(x-Mx)^2	0,58	0,89	0,12	0	0,13	0,29	0,03	0,43	0	0,02	0,03	0,02	2,53
y-My	-3,8	-3,8	13,2	18,2	7,17	-8,8	9,17	-1,8	-8,8	-15	22,2	-28	
(y-My)^2	14,7	14,7	173	330	51,4	78	84	3,36	78	220	491	775	2313,67

Quindi avremo: $\sigma_x \approx \sqrt{\dfrac{2{,}53}{12}} \approx 0{,}46; \sigma_y \approx \sqrt{\dfrac{2313{,}67}{12}} \approx 13{,}89$. Pertanto il coefficiente di Pearson è $\rho \approx \dfrac{-1{,}232}{0{,}46 \cdot 13{,}89} \approx -0{,}19$, che rappresenta una modesta dipendenza inversa. Cioè ci possiamo aspettare che un aumento della temperatura provochi solo una modesta diminuzione dei giorni di pioggia.

Livello 2

Determinare il coefficiente di correlazione lineare di Pearson delle precedenti coppie di dati, quindi rispondere ai quesiti

35. L'aumento degli immatricolati cosa dovrebbe produrre nei tassi di abbandono?
[≈ –0,35; modesta diminuzione]
36. L'aumento dei consumi cosa dovrebbe produrre in quello della produzione?
[≈ 0,95; aumento quasi uguale]
37. L'aumento dei rimpatriati cosa dovrebbe produrre in quello degli espatriati?
[≈ 0,70; discreto aumento]
38. L'aumento dei divorzi cosa dovrebbe produrre in quello dei matrimoni?
[≈ – 0,85; consistente diminuzione]
39. L'aumento delle giornate di degenza cosa dovrebbe produrre nel numero di Istituti?
[≈ 0,87; consistente aumento]
40. L'aumento della spesa pensionistica cosa dovrebbe produrre sul numero di pensioni erogate?
[≈ – 0,31; modesta diminuzione]
41. L'aumento dei procedimenti esauriti cosa dovrebbe produrre in quelli sopravvenuti?
[≈ 0,009; nessuna relazione]
42. L'aumento dei condannati cosa dovrebbe produrre nel numero di omicidi denunciati?
[≈ 0,52; un medio aumento]
43. L'aumento dei diplomati cosa dovrebbe produrre nel numero di laureati? [≈ – 0,06; nessuna relazione]
44. L'aumento degli iscritti cosa dovrebbe produrre nel numero di insegnanti? [≈ 0,65; discreto aumento]

Lavoriamo insieme

Anche se abbiamo visto che la dipendenza lineare fra le temperature e i giorni di pioggia è modesta, vogliamo lo stesso calcolare la retta dei minimi quadrati: $y = ax + b$, considerando i giorni di pioggia in funzione delle temperature. Costruiamo la tabella e poi usiamo il risultato del teorema 15.

ANNI	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	Σ
Temperatura media (x)	15,3	17	16,4	16	15,7	16,6	15,9	15,4	16,1	16,2	15,9	16,2	192,7
Giorni di pioggia (y)	70	70	87	92	81	65	83	72	65	59	96	46	886
x^2	234	289	269	256	246	276	253	237	259	262	253	262	3097
xy	1071	1190	1427	1472	1272	1079	1320	1109	1047	956	1526	745	14213

Quindi: $a = \dfrac{12 \cdot 14213 - 192{,}7 \cdot 886}{12 \cdot 3097 - 192{,}7^2} \approx -5{,}84; b = \dfrac{886 \cdot 3097 - 192{,}7 \cdot 14213}{12 \cdot 3097 - 192{,}7^2} \approx 167{,}69$ e la retta ha equazione $y = -5{,}84x + 167{,}69$. Confrontiamo i valori teorici con quelli effettivi.

ANNI	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Temperatura media (x)	15,3	17	16,4	16	15,7	16,6	15,9	15,4	16,1	16,2	15,9	16,2
Giorni di pioggia (y)	70	70	87	92	81	65	83	72	65	59	96	46
Giorni di pioggia teorici	78,3	68,3	71,8	74,2	75,9	70,7	74,8	77,7	73,6	73	74,8	73
Differenza	8,27	-1,7	-15	-18	-5,1	5,67	-8,2	5,68	8,59	14	-21	27
Differenza %	12%	-2%	-17%	-19%	-6%	9%	-10%	8%	13%	24%	-22%	59%

Osserviamo che effettivamente la nostra retta non è un buon modello matematico perché le differenze sono notevoli, in percentuale arriviamo anche al 59%.

Livello 2

Determinare la retta di regressione delle tabelle presentate all'inizio, considerando la prima colonna di dati come *y* e la seconda come *x*

45. [$y = -10005{,}5x + 508873$] [$y = 1{,}08x - 31398{,}7$] [$y = 0{,}21x + 3113{,}2$] [$y = -1{,}98x + 346229{,}1$]
46. [$y = 0{,}015x - 131{,}6$] [$y = -0{,}002x + 396{,}1$] [$y = 0{,}01x + 130985{,}9$] [$y = 2{,}68x + 11541$]
47. [$y = -0{,}71x + 535768$] [$y = 71{,}7x + 119938$]

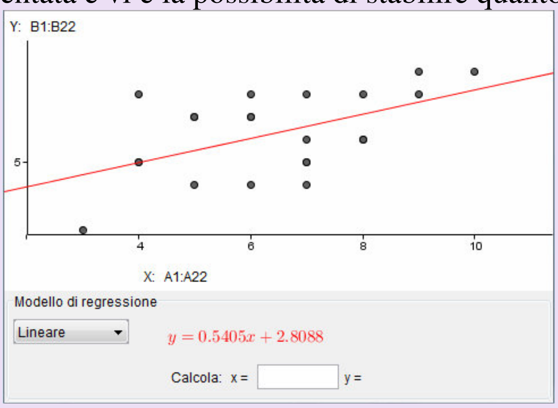
Livello 3

Con riferimento agli esercizi precedenti, stimare i seguenti dati teorici. Commentarli, tenuto anche conto dei coefficienti di correlazione lineare trovati.

48. Tasso di abbandono 18% o 25%; immatricolati? [≈ 328774; ≈ 258735]
49. Consumo 20000 o35000; Produzione? [≈ 185426; ≈ 348045]
50. Rimpatriati 3000 o 10000; espatriati ? [≈ 3738; ≈ 5195]
51. Divorzi 40000 o 60000: matrimoni? [≈ 266803; Valore inaccettabile perché negativo]
52. Giornate di degenza 40000 o 50000; istituti? [≈ 493; ≈ 649]
53. Spesa pensionistica 3000 o 5000; numero di pensioni? [≈ 389,7; ≈ 385,5]
54. Procedimenti esauriti 11000 o 15000; procedimenti sopravvenuti? [≈ 131107; ≈ 131151]
55. Condannati 500 o 1500; omicidi denunciati? [≈ 12883; ≈ 15566]
56. Diplomati 400000 o 500000; laureati? [≈ 250136; ≈ 178728]
57. Iscritti (in migliaia) 2000 o 3000; insegnanti? [≈ 263401; ≈ 335133]

L'angolo di Geogebra

Con Geogebra possiamo rappresentare dati, per esempio quelli dell'Esempio 22 li abbiamo rappresentati scegliendo il comando **Analisi di regressione bivariata**. Possiamo anche scegliere il modello di regressione, per esempio scegliendo il modello lineare, viene calcolata la retta dei minimi quadrati che viene anche rappresentata e vi è la possibilità di stabilire quanto vale il valore teorico.



Con il comando **Covarianza(lista1, lista2)** calcoliamo la covarianza dei dati accoppiati e con **CorrPearson[Lista delle coordinate X, Lista delle coordinate Y]** calcoliamo il coefficiente di Pearson. In figura verifichiamo che i calcoli effettuati negli Esempi 23 e 24 sono corretti.

C
1.75
0.54

L'angolo di Excel

Ovviamente Excel fra le sue centinaia di funzioni ne ha per quelle da noi trattate. In particolare abbiamo **COVARIANZA.P(lista1; lista2)** per il calcolo della covarianza di due insiemi di dati ugualmente numerosi **CORRELAZIONE(lista1; lista2)** per il calcolo del coefficiente di correlazione di Pearson di due insiemi di dati ugualmente numerosi.
INDICE(REGR.LIN(y; x);1) e **INDICE(REGR.LIN(y; x);2)** calcolano i coefficienti della la retta di regressione lineare $y = ax + b$, con il metodo dei minimi quadrati.

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Liceo scientifico PNI 1994/95) Nella tabella seguente sono riportati i dati di un'indagine campionaria, relativamente ad alcune regioni e al 1990, sulla distribuzione delle abitazioni secondo la superficie abitata (area espressa in metri quadrati):

Superficie Regione	50 – 95 m^2	96 –110 m^2	111 – 130 m^2	131 – 200 m^2
Liguria	130	11	6	5
Campania	362	1805	105	122
Sicilia	1068	430	203	149

Il candidato a) verifichi l'ipotesi: H_0: non c'è differenza significativa (5%) tra le medie delle superfici nelle diverse regioni; [rifiutata] b) verifichi l'ipotesi: H_0: non c'è differenza significativa (5%) tra le distribuzioni alle diverse regioni. [rifiutata]

2. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1994/95) Nella tabella seguente sono riportate le distribuzioni delle durate in anni (n = numero degli anni) delle pene per i condannati nel 1990 ad almeno un anno di carcerazione (escluso l'ergastolo), suddivise per sesso, secondo una indagine campionaria:

Pene	$1 \le n < 2$	$2 \le n < 5$	$5 \le n < 10$	$10 \le n < 15$	$15 \le n \le 30$
Maschi	200	329	168	91	154
Femmine	13	17	11	5	6

Il candidato: a) verifichi l'ipotesi: H_0: non c'è differenza significativa (5%) tra le distribuzioni relative alla durata delle pene per maschi e femmine; [Accettata] b) verifichi l'ipotesi: H_0: non c'è differenza significativa (5%) tra le medie della durata delle pene per maschi e femmine. [Accettata]

3. (Istituto tecnico commerciale indirizzo programmatori 1997/98) Nove studenti universitari, scelti a campione, sono stati classificati secondo i voti conseguiti in due esami differenti, tra i quali sussiste una certa relazione logica. I dati sono riportati nella seguente tabella.

Studenti	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Voto di economia (x)	18	23	26	23	22	19	18	20	21
Voto di matematica (y)	22	21	30	18	24	18	23	19	24

Dopo aver esposto i possibili criteri per adattare una retta a rappresentare una nuvola di punti, si eseguano le seguenti elaborazioni statistiche. a) Rappresentare il diagramma di dispersione dei voti delle due materie; b) Determinare l'indice di correlazione lineare di Bravais–Pearson, specificandone il suo significato statistico [≈ 0,49] c) Determinare le due rette di regressione e calcolare l'indice di determinazione; [$y = 0,35x + 13,43$; $y = 0,70x + 7,31$] d) Rappresentare le due rette di regressione sul grafico di cui al punto a) e) Sulla base del modello di regressione ottenuto, stimare il voto di matematica corrispondente al voto di economia $x = 25$ e il voto di economia corrispondente al voto di matematica $y = 27$. [25; 23]

4. (Liceo scientifico PNI 1997/98) Una macchina produce barre di acciaio a sezione circolare la cui lunghezza ottimale dovrebbe essere di 5 m ed il diametro della sezione di 4 cm. Le barre effettivamente prodotte, che si suppongono tra loro indipendenti, hanno una lunghezza aleatoria con distribuzione normale di media $m_1 = 5$ m e scarto standard $s_1 = 4$ cm. Il diametro della sezione è una variabile aleato-

ria, indipendente dalla precedente, e con distribuzione normale di media $m_2 = 4$ *cm* e $s2 = 0,8$ cm. Una generica barra prodotta può essere direttamente venduta senza modifiche se la sua lunghezza è compresa tra 4,95 *m* e 5,05 *m* e la sua sezione tra 2,8 *cm* e 5,2 *cm*. La tavola della funzione di ripartizione della distribuzione normale standardizzata è, per alcuni valori, la seguente:

Ascissa: x	–1,50	–1,45	–1,35	–1,25	–1,15	–1,05	–0,95
F(x)	0,067	0,074	0,089	0,106	0,125	0,147	0,171
Ascissa: x	0,95	1,05	1,15	1,25	1,35	1,45	1,50
F(x)	0,829	0,853	0,875	0,894	0,912	0,927	0,933

Il candidato: a) verifichi che la probabilità p di poter mettere in vendita senza modifiche una generica barra prodotta è 0,68; b) indicata con f_n la frequenza relativa alle barre direttamente vendibili su *n* barre prodotte, esprima, in funzione di *p*, la numerosità n necessaria perché la probabilità che f_n disti da *p* più di 0,05 sia non superiore a 0,05; c) dato il valore di *p* rilevato in a), se su 2000 barre prodotte 1000 risultano non direttamente vendibili, dica se si può sospettare che la macchina non funzioni più secondo lo standard riportato sopra, se, cioè, il risultato ottenuto risulta a priori poco probabile (probabilità inferiore a 0,05) subordinatamente alle modalità di funzionamento della macchina, come indicato; d) descriva una procedura che consenta di calcolare la probabilità di ottenere la prima barra direttamente vendibile solo alla *n*–esima prova, al variare di *p* e di *n*, e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

5. (Liceo scientifico PNI 2004/2005) Sia γ la curva d'equazione: $y = k \cdot e^{-\lambda \cdot x^2}$ ove *k* e λ sono parametri positivi. a) Si studi e si disegni γ. $\left[M \equiv O; F_1 \equiv \left(-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}, \frac{k}{\sqrt{e}}\right); F_2 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}, \frac{k}{\sqrt{e}}\right)\right]$ b) Sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ e assumendo λ = ½, si trovi il valore da attribuire a *k* affinché l'area compresa tra γ e l'asse *x* sia 1. $\left[k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]$ c) Per i valori di *k* e λ sopra attribuiti, γ è detta *curva standard degli errori* o *delle probabilità* o *normale di Gauss* (da *Karl Friedrich Gauss,* 1777–1855). Una *media* μ ≠ 0 e uno *scarto quadratico medio* σ ≠ 1come modificano l'equazione e il grafico?

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

H = High School Math Contest University of Huston

1. (H 2011) I punteggi un test nazionale sono distribuiti normalmente con media di 700 e scarto quadratico medio di 75. Il 60° percentile è più vicino a quale intero? [720]
2. (H 2011) Un campionamento casual di 25 elementi è preso da una *N*(20; 9). Sia *X* la media campionaria. Con che probabilità *X* è maggiore di 21? [fra 4,75% e 4,85%]
3. (H 2011) Si vuole stimare la percentuale di studenti di high school che hanno provato caramelle al peppermint. Si vuole un errore non superiore al 2,5% con almeno il 95% di confidenza e si vuole considerare il campione più piccolo possibile. Quanto deve essere grande? [1540]
4. (H 2012) I sacchi di grano sono distribuiti normalmente con media 100 lb. e σ = 2 lb. Un vagone trasporta 9 sacchi di grano. Con che probabilità il carico del vagone supera 910 lb? [fra 4,5% e 4,9%]
5. (H 2012) Viene eseguito un campionamento di 225 misure di una variabile numerica, ottenendo una media di 2,58 e uno scarto quadratico medio di 1,50. Determinare un intervallo di confidenza al 99% per la media della popolazione. [tra 2,32 e 2,84.]
6. (H 2012) Quali delle seguenti variabili casuali può essere descritta da una distribuzione binomiale? [d)]

a) Il numero di incendi scoppiati in una certa zona in una settimana. X è il numero di incendi.
b) Il numero di auto contato in un'ora in un certo posto di una data strada. X è il numero di auto.
c) Un campione ampio 20 di studenti in una classe di 60. X è il numero di campionamenti di studenti che hanno ottenuto almeno C nel test di ingresso.
d) Un campione di 100 studenti scelti a caso dai laureati dell'area di Houston. X è il numero di laureati con lode.
e) Un dado regolare è lanciato finché non si ottengono due sei consecutive. X è il numero di lanci eseguiti.

Questions in English

7. (H 2011) Which of the following random variables does not have a binomial distribution? [b)]
   a) The number of shirts that have defects in a sample of 20 coming from a production line.
   b) The number of boxes of Cracker Jacks that must be purchased to get all 6 of the prizes offered.
   c) The number of defective items in a sample of 10 randomly chosen without replacement from a large population of such items.
   d) The number of times a total of 7 spots appears in 100 rolls of a pair of dice.
   e) The number of base hits by Albert Pujols in the first three games next season in which he has 4 official at bats.
8. (H 2011) A random sample of 400 measurements of numeric variable were recorded. The sample average was 12.56 and the sample standard deviation was 2.44. A 95% confidence interval for the population mean is? [from 12.321 to 12.799]
9. (H 2011) Scores on a national achievement test are normally distributed with a mean of 700 and a standard deviation of 75. A student scores 830. What is her percentile score? [96%]
10. (H 2012) Previous studies of levels of a pollutant in Galveston Bay indicated a mean level of 0.035 with a standard deviation of 0.005. Scientists would like to revise their estimate of the mean level with an error no greater than 0.001 with 95% confidence and to be as economical about it as possible. How large a sample of measurements should they take? You may assume that pollutant levels are normally distributed [97]
11. (H 2012) Scores on a national achievement test are normally distributed with a mean of 700 and a standard deviation of 75. The 85th percentile of test scores is closest to? [775]
12. (H 2012) 100 cards are dealt one at a time from a standard deck, with replacement and with reshuffling after each card is dealt. The deck contains 13 cards in each of four suits: hearts, diamonds, clubs and spades. The probability of getting more than 30 hearts is closest to? [0.1020]
13. Scores on a national achievement test are normally distributed with a mean of 650 and a standard deviation of 35. A student scores 690. Which of the following is closest to her percentile score? [a)]
    a) 87% b) 83% c) 94% d) 70% e) 99%